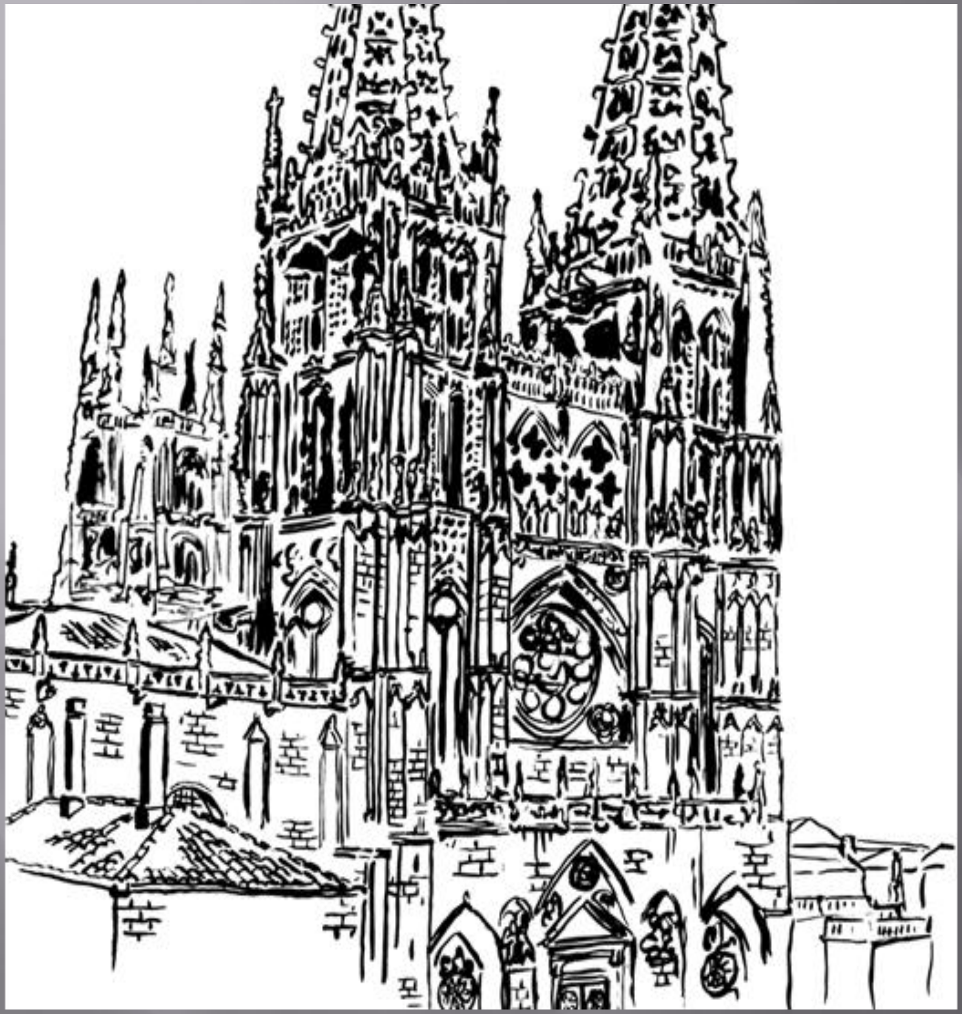
V Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas

IX Reunion nacional de Estalmat

30 de Marzo al 1 de Abril 2012
CENTRO INTERNACIONAL DE ENCUENTROS MATEMÁTICOS
Castro Urdiales (Cantabria)



MATEMÁTICAS EN LA CATEDRAL DE BURGOS

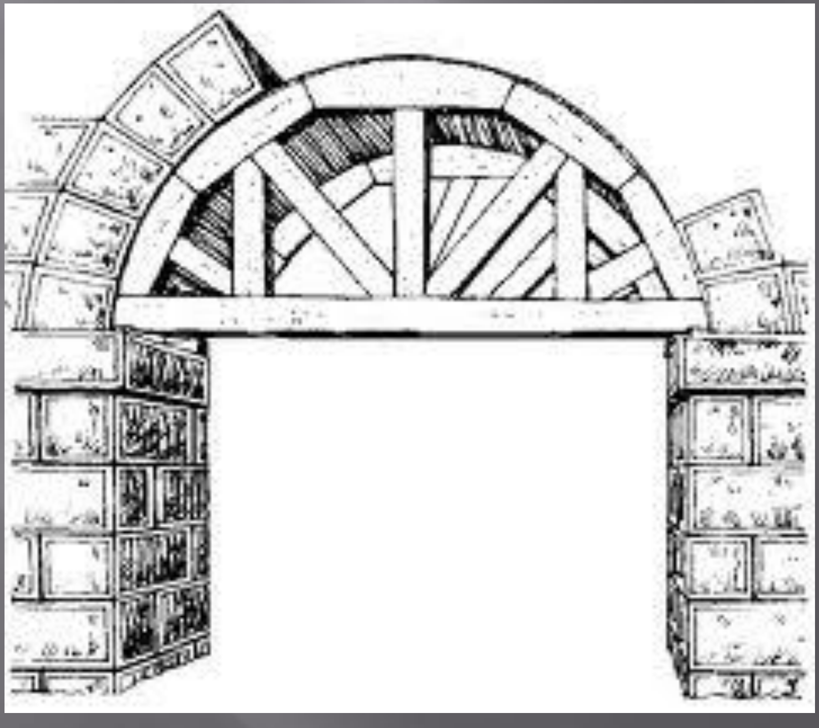
Maite de la Asunción Azpiazu

PROYECTO ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

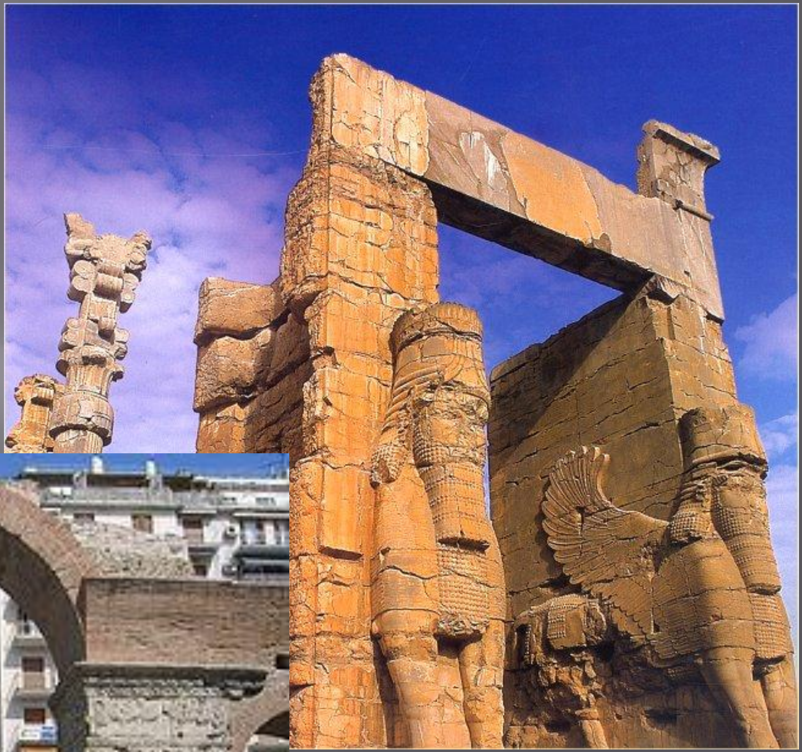
EL ARCO OJIVAL EN LA CATEDRAL DE BURGOS

¿QUÉ ES UN ARCO?

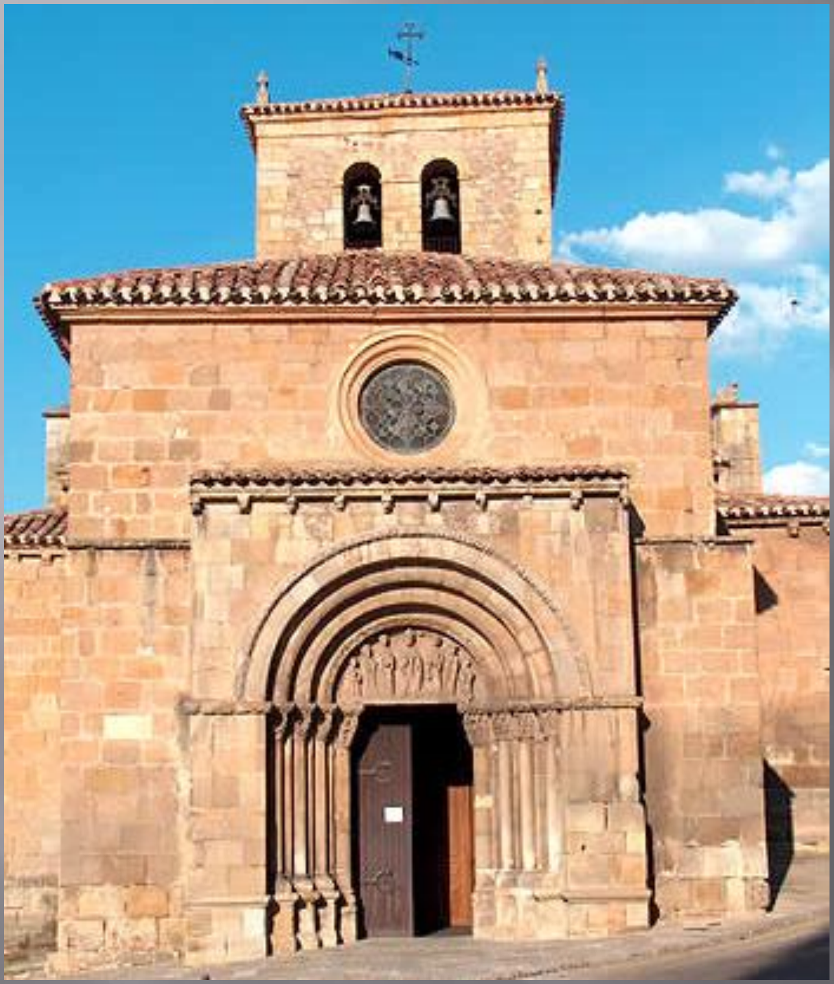
Un arco, en construcción, es una estructura curva que cubre el espacio entre dos puntos de apoyo.



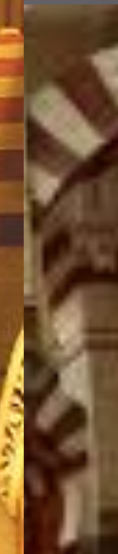
UN POCO DE HISTORIA











hosted at
www.PoliMalo.com

OBJETIVOS

- Relacionar geometría y aritmética en un contexto artístico.
- Profundizar en el conocimiento histórico, artístico y cultural de Castilla y León tomando como instrumento de trabajo a las Matemáticas.
- Potenciar en los alumnos el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación en el proceso de aprendizaje.

CONTENIDOS

- Construcción con regla, compás y Geogebra del arco ojival:
  - A partir de la vésica piscis.
  - A partir del triángulo equilátero.
- Análisis de arcos ojivales:
  - Arcos interiores: centros, dimensiones, etc.
  - Figuras tangentes al arco principal y/o a los arcos interiores: circunferencias, triángulos, cuadrados, elementos de cada uno.
- Estudio de otro tipo de arcos:
  - Construcción
  - Principales elementos: centros, arcos, etc.

METODOLOGÍA

- Participativa y activa.
- Menor ayuda posible, el profesor guía el aprendizaje.
- Herramientas: geoplano y GEOGEBRA.
- Tareas de investigación.

TEMPORALIZACIÓN

Cuatro sesiones de una hora y media de duración:

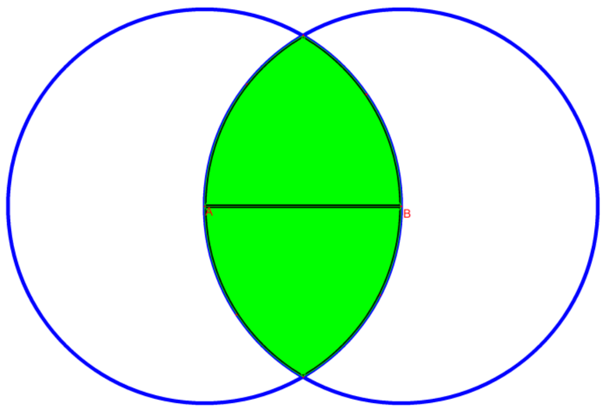
- ***Primera sesión:*** Construcción de la vésica piscis y el arco ojival.
- ***Segunda sesión:*** Construcción de arcos ojivales mediante triángulos equiláteros. Tipos de arcos ojivales. Construcción.
- ***Tercera sesión:*** Figuras tangentes al arco principal y/o a los interiores.
- ***Cuarta sesión:*** Construcción de otro tipo de arcos y del triángulo de Reuleaux.

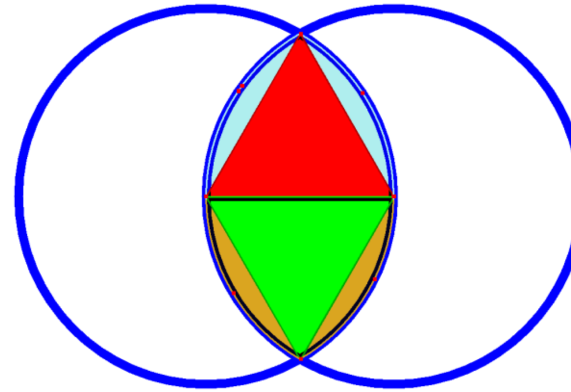
PRIMERA SESIÓN: *Construcción de la Vésica Piscis y el Arco Ojival.*

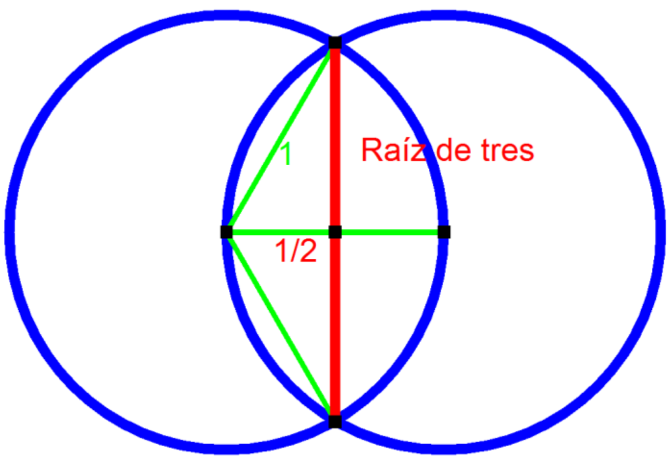
Ejercicio 1.1

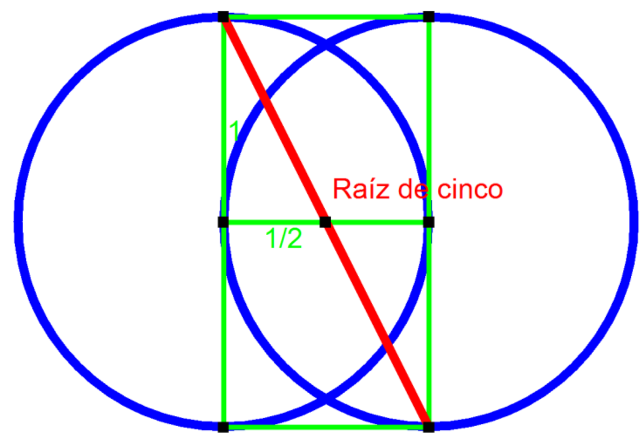
En el altar mayor aparece una de las figuras más utilizadas en las obras góticas: la *vésica piscis.*

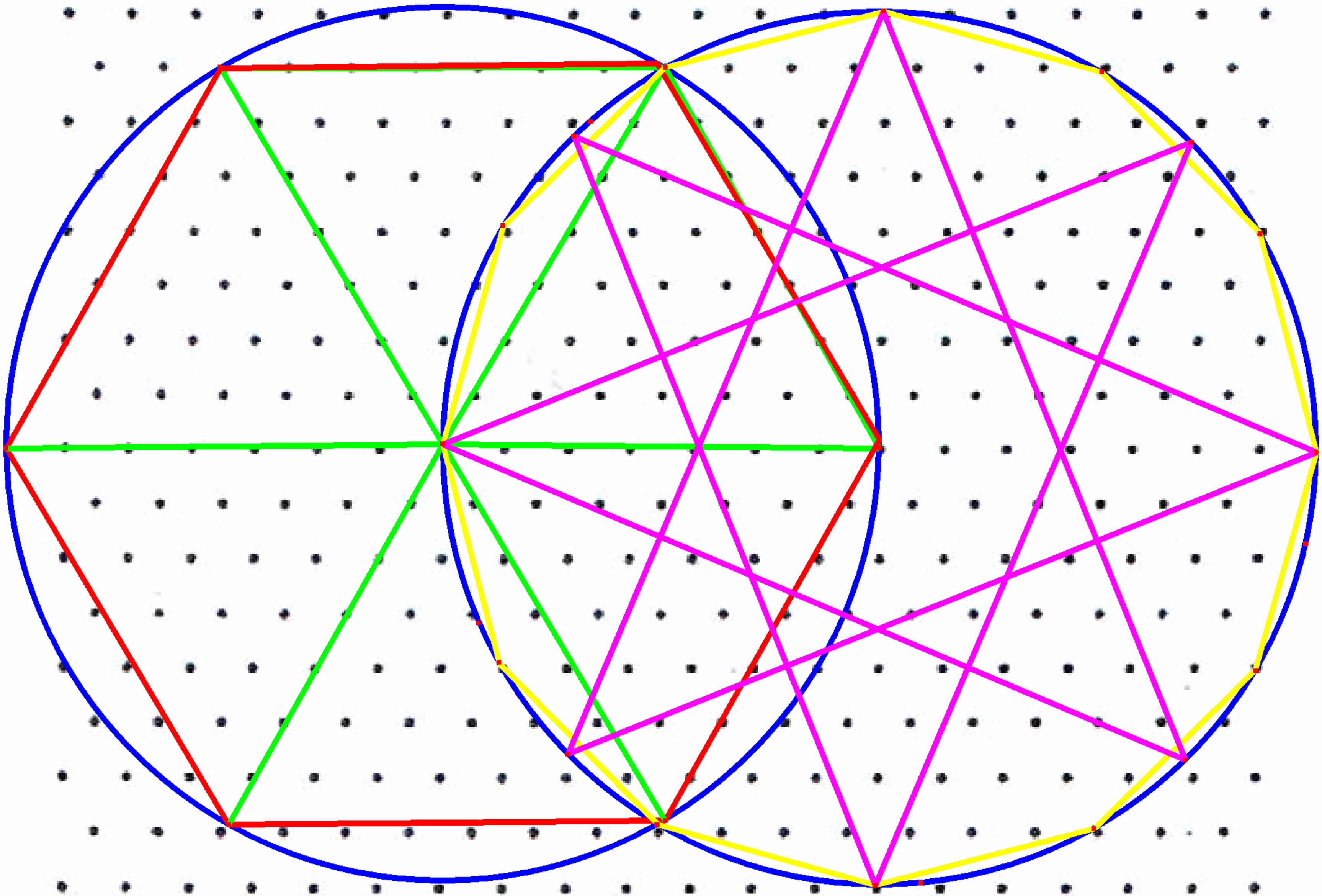
- Construye una *vésica piscis.*
- Calcula su correspondiente área y longitud.
- Representa gráficamente $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ y\ \sqrt{5}$ a partir de la *vésica piscis* de amplitud uno. ¿Qué ocurriría en el caso en que su amplitud fuera un cierto **r**?
- Reproduce la *vésica piscis* de amplitud 7 unidades. ¿Qué polígonos regulares podemos encontrar inscritos? Dibújalos.

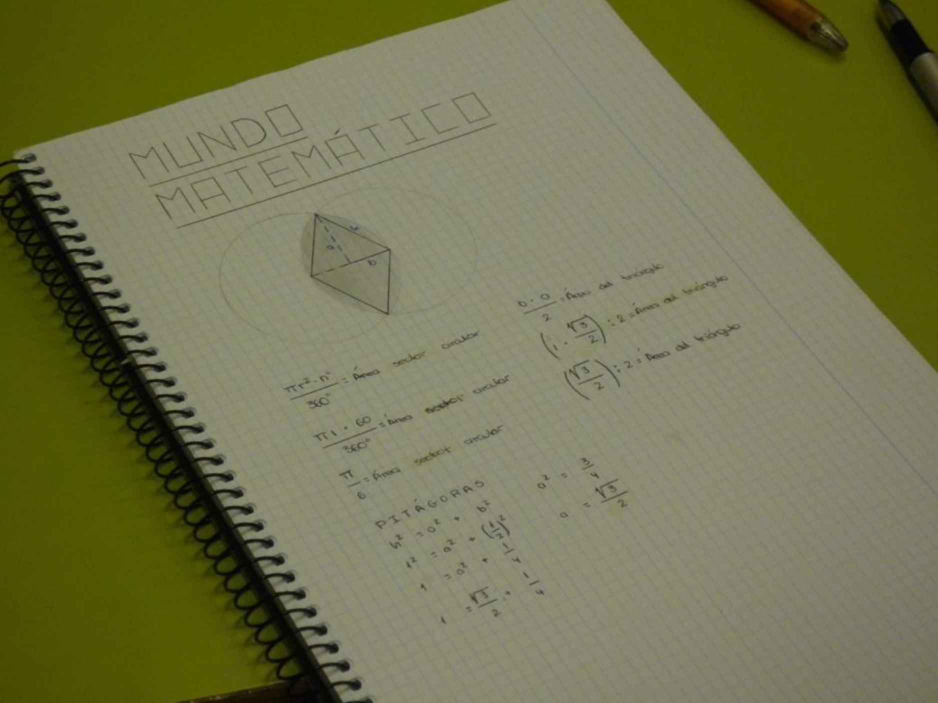

A
B



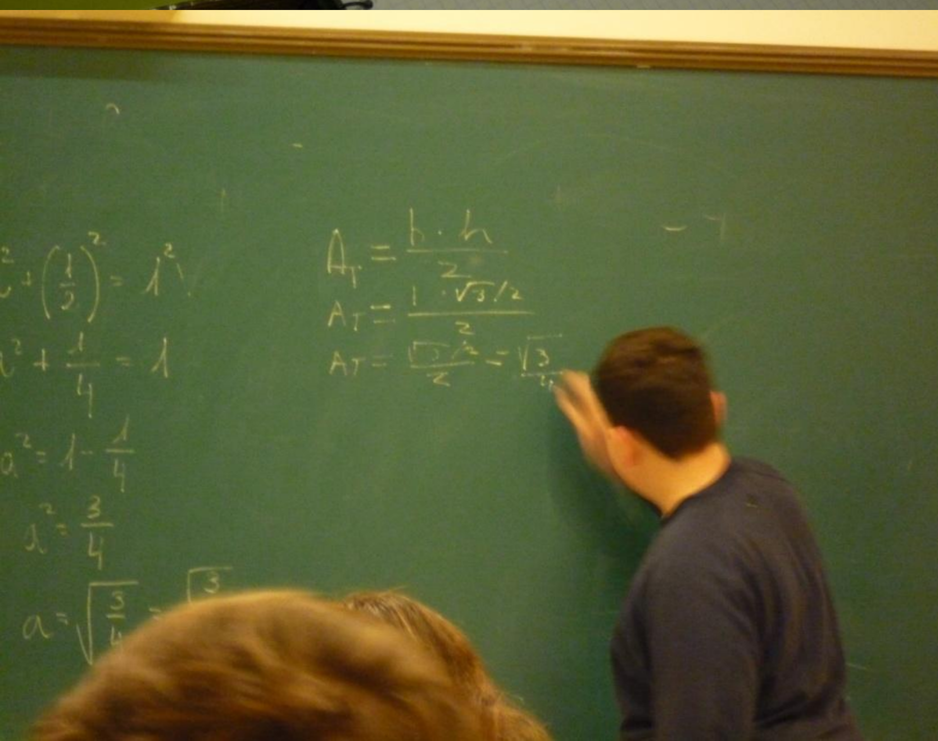

1
Raíz de tres
1/2

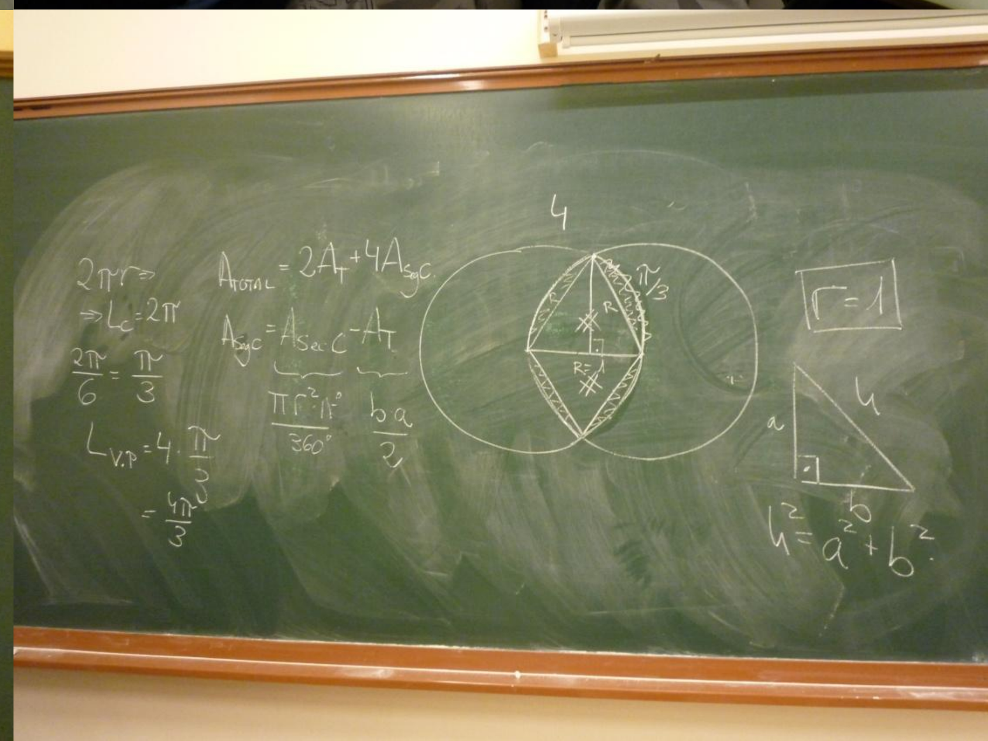

1
Raíz de cinco
1/2




MUNDO
MATEMÁTICO
PITÁGORAS


MUNDO
MATEMÁTICO


$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$

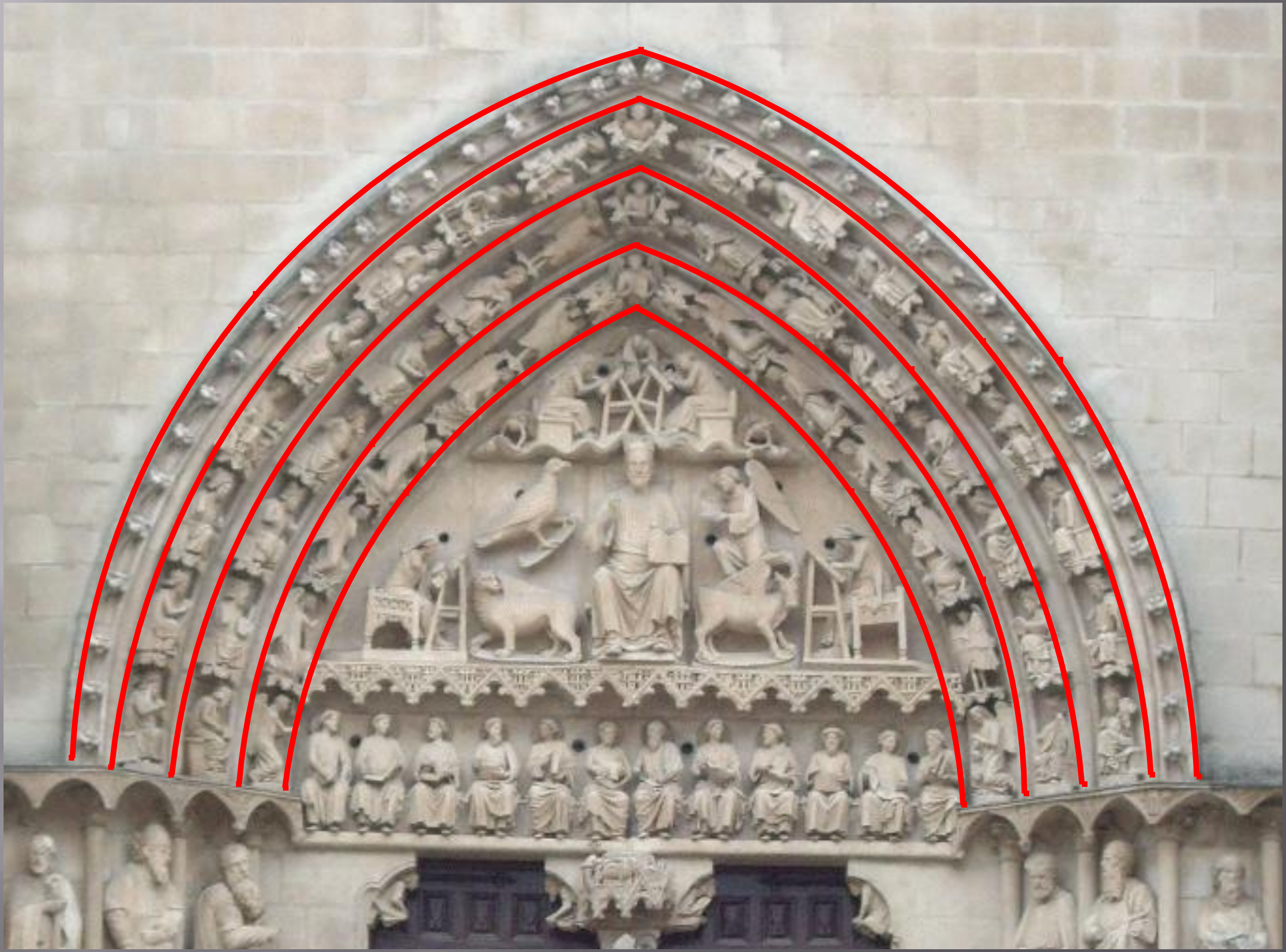

$A_{TOTAL} = 2A_T + 4A_{SgC}$
$r = 1$
$h^2 = a^2 + b^2$

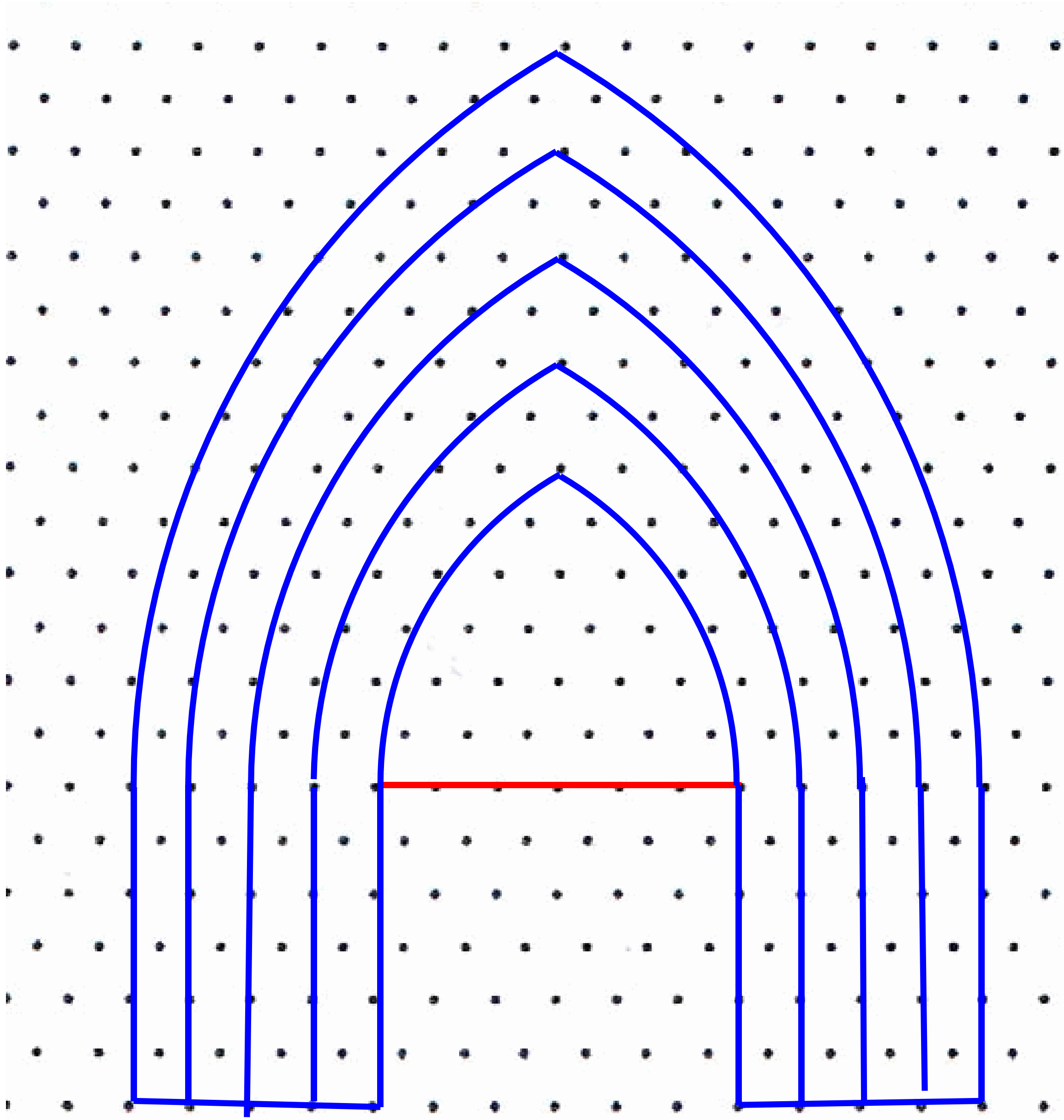
Ejercicio 1.2

- Reproducir los arcos que aparecen en la *Puerta del Sarmental.*

  AYUDA: Dibujar la sucesión de arcos interiores con amplitudes 10, 8, 6 y 4 unidades respectivamente.

- Observar la semejanza entre los diferentes arcos ojivales, y calcular la razón de semejanza, del mayor con respecto al menor, teniendo en cuenta la amplitud de la *vésica piscis* y la longitud de arcO. ¿Coinciden? ¿Por qué?



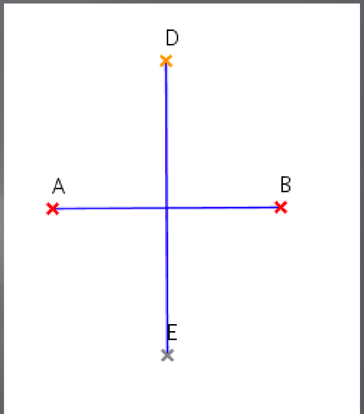


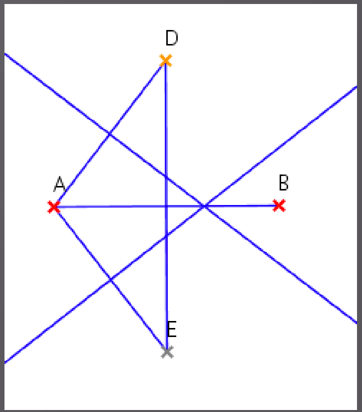
Ejercicio 1.3

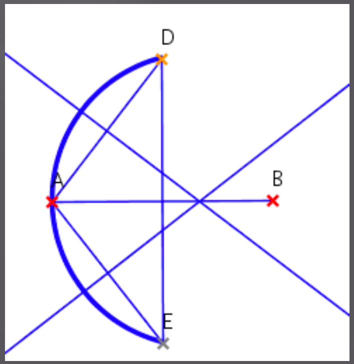
Observa el friso situado a la derecha de la Capilla de los Condestables

¡¡¡¡PERO!!!! En el Sepulcro del obispo Don Domingo de Arroyuelo

- Observa la figura central.
- ¿Es una vésica piscis?
- Vamos a dibujar esa figura...





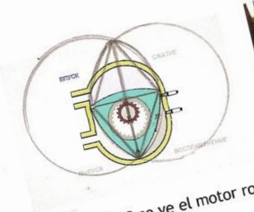


Motor Wankel

tor Wankel es un tipo de motor de combustión interna, inventado por Felix
kel, que utiliza rotores en vez de los pistones de los motores convencionales. En
motor alternativo; en el mismo volumen (cilindro)se efectúan sucesivamente 4
rentes trabajos - admisión, compresión, combustión y escape. En un motor
nkel se desarrollan los mismos 4 tiempos pero en lugares distintos de la carcasa o
oque; es decir, viene a ser como tener un cilindro dedicado a cada uno de los
empos, con el pistón moviéndose continuamente de uno a otro. Más
oncretamente, el cilindro es una cavidad con forma de 8, dentro de la cual se
encuentra un pistón triangular que realiza un giro de centro variable. Este pistón
comunica su movimiento rotatorio a un cigüeñal que se encuentra en su interior, y
que gira ya con un centro único.

Como se puede comprobar en el dibujo 1 el rotor (parte que se mueve) del motor es
una parte (un segmento circular mas grande de la mitad) de la vésica piscis.

Dibujo 1:



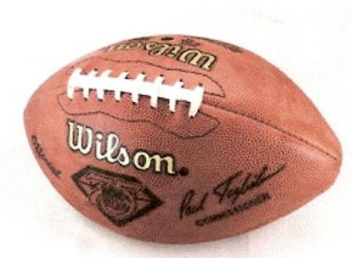
Dibujo 2:

En el dibujo 2 se ve el motor rotativo (motor wankel) al completo.

El motor está diseñado de esta manera para que el giro del rotor sea
diferencias de peso sean menores.

Proyecto ESTALMAT Burgos 20/02/0

En un balón de futbol americano



En un puente

Vesica Piscis

Los piscis de la vejiga son un símbolo hecho a partir de dos círculos del mismo radio, intersecándose de una manera tal que el centro de cada círculo mienta en la circunferencia de la otra. El nombre significa literalmente la *vejiga de los pescados* en latín. En la tradición cristiana, es una referencia a Cristo, como en ichthys.

En esta imagen se contempla la figura de
Jesús en el interior de
ca Piscis.

ran los símbolos,
s evangelistas.

adoptaron el
propio, y le
ecreto para
ón.

iva de la
ción del
o de la
mundo
n. La
osa.

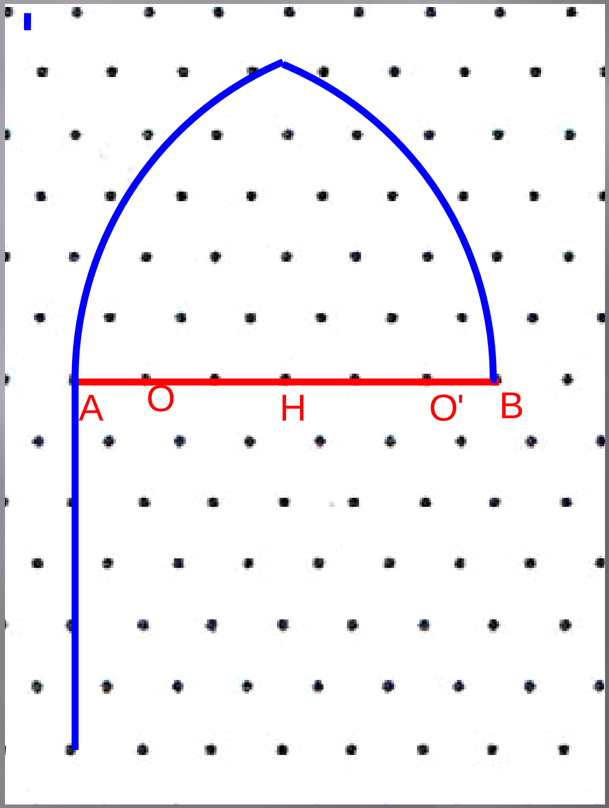
SEGUNDA SESIÓN: *Construcción de arcos ojivales mediante triángulos equiláteros. Tipos de arcos ojivales. Construcción.*

Ejercicio 2.1

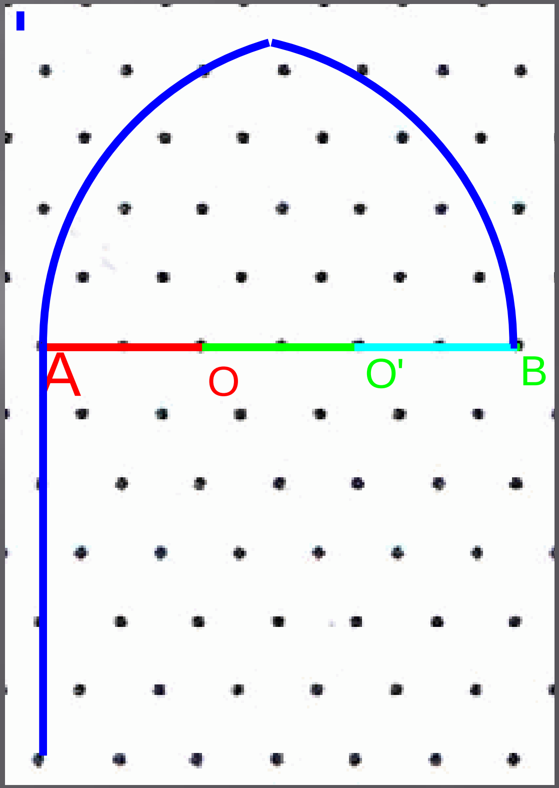
- Reproduce los arcos ojivales que aparecen en la foto (*Tomar los triángulos equiláteros de lados 12, 6 y 3 unidades respectivamente)*
- Calcula el área encerrada por los distintos arcos ojivales equiláteros.
- Calcula la razón de las áreas entre el mayor arco ojival y el menor. ¿Qué relación tiene con su razón de semejanza?

Ejercicio 2.2
Construir los siguientes modelos de arcos ojivales.

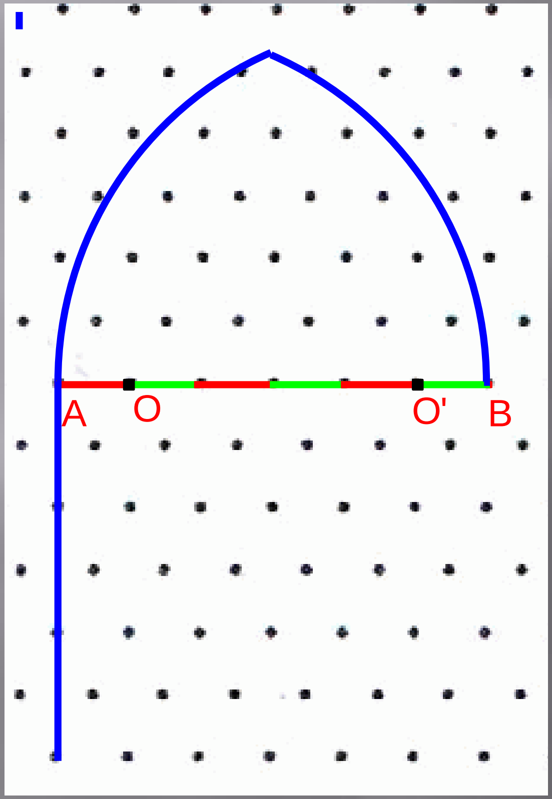
OJIVAL GENÉRICO



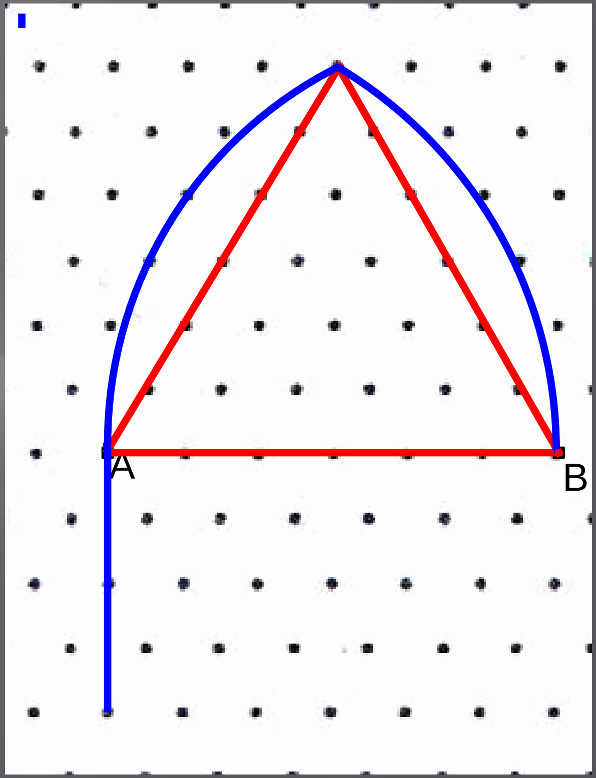
OJIVAL ROMANO



OJIVAL ÁRABE

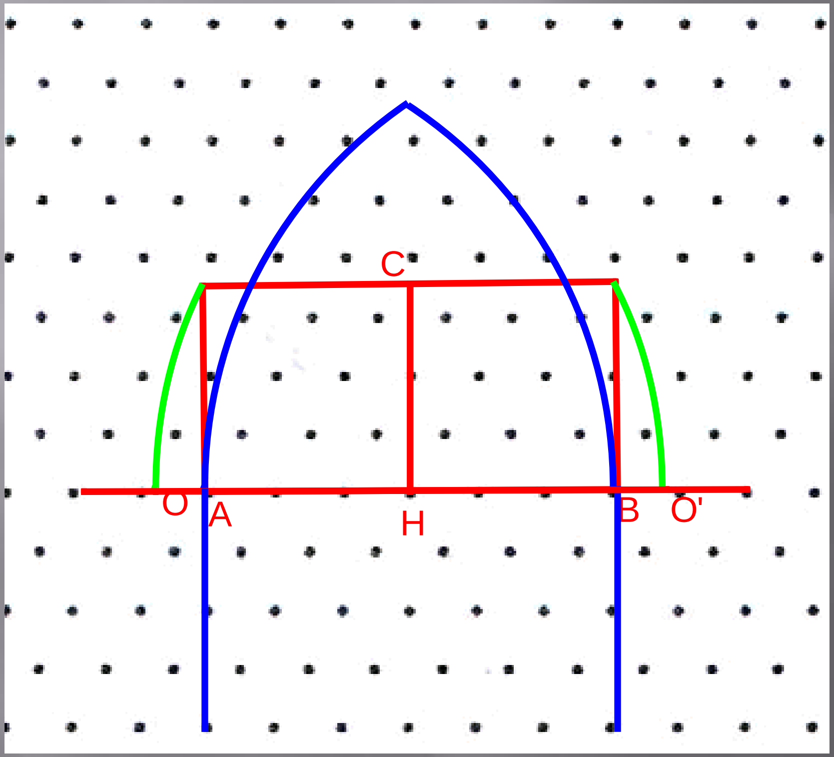


OJIVAL EQUILÁTERO

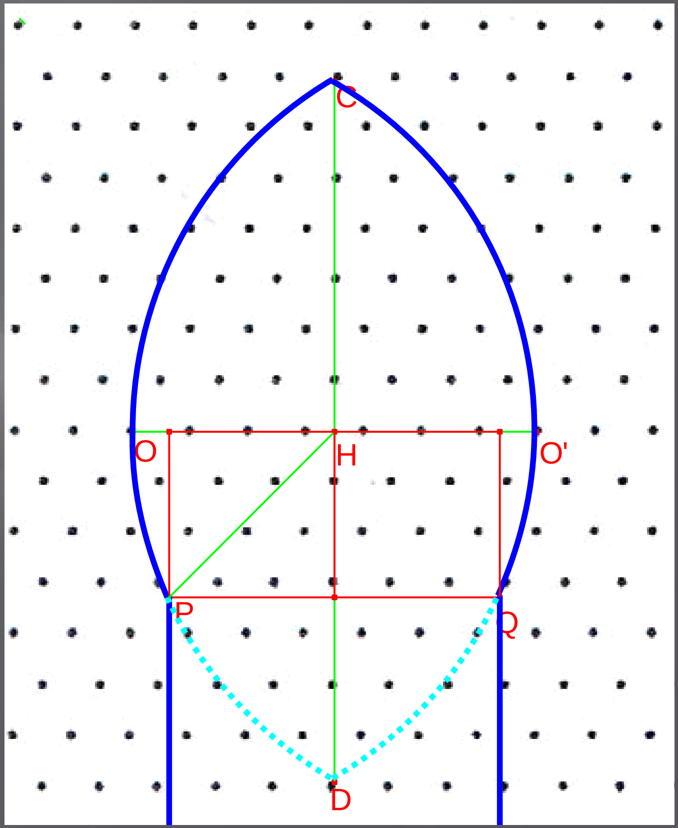


OJIVAL EQUILÁTERO

LANCETADO DE OJIVAS

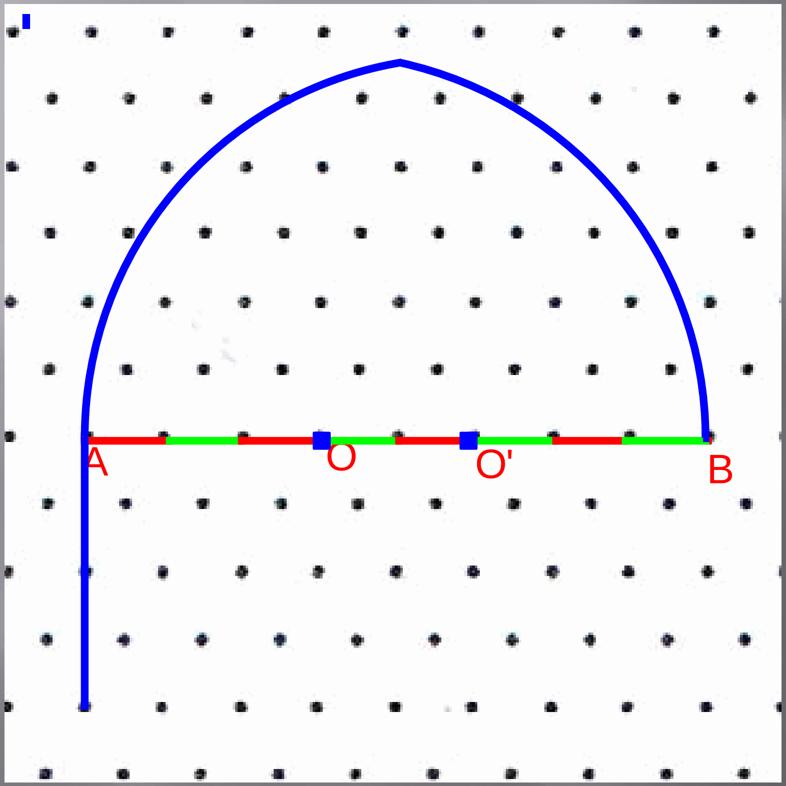


TUMIDO DE OJIVAS

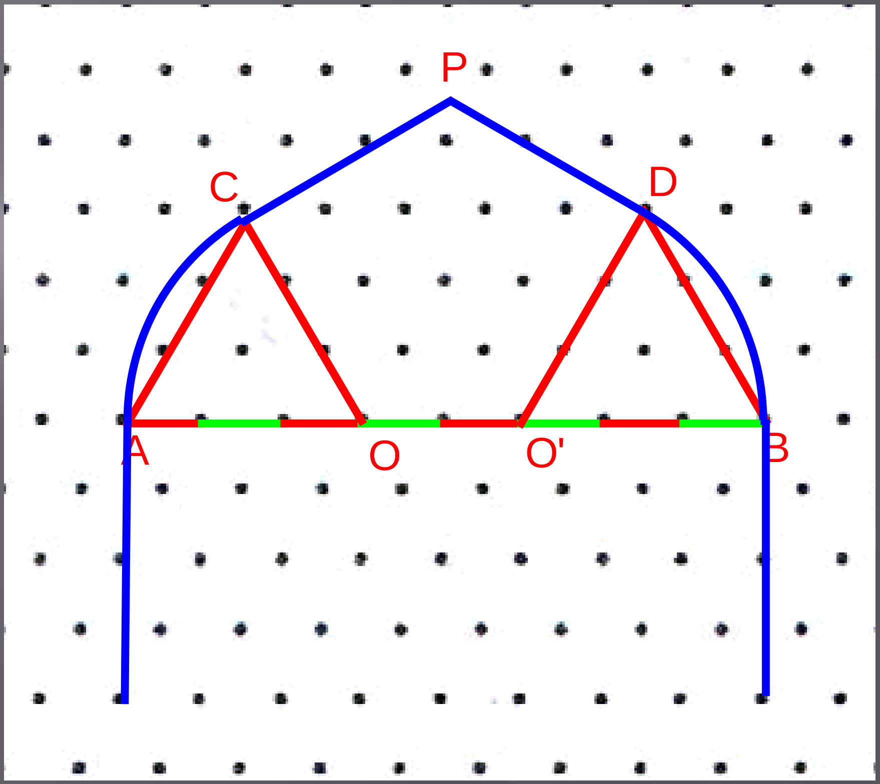


LANCENTADO DE OJIVAS

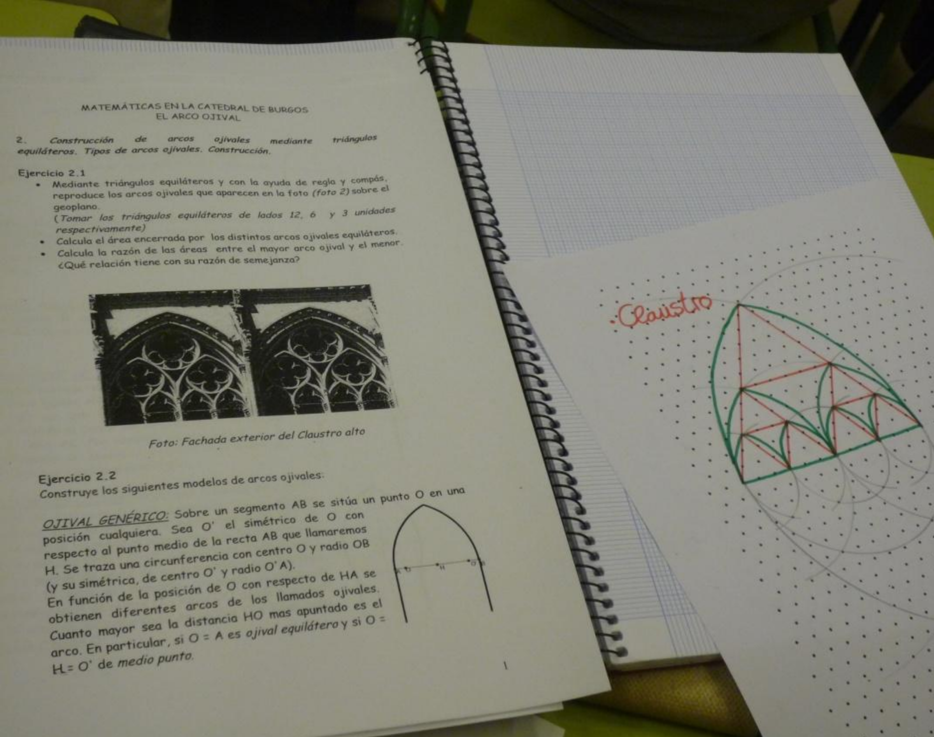
TURCO



TURCO DE PORTILLO



CON GEOGEBRA...

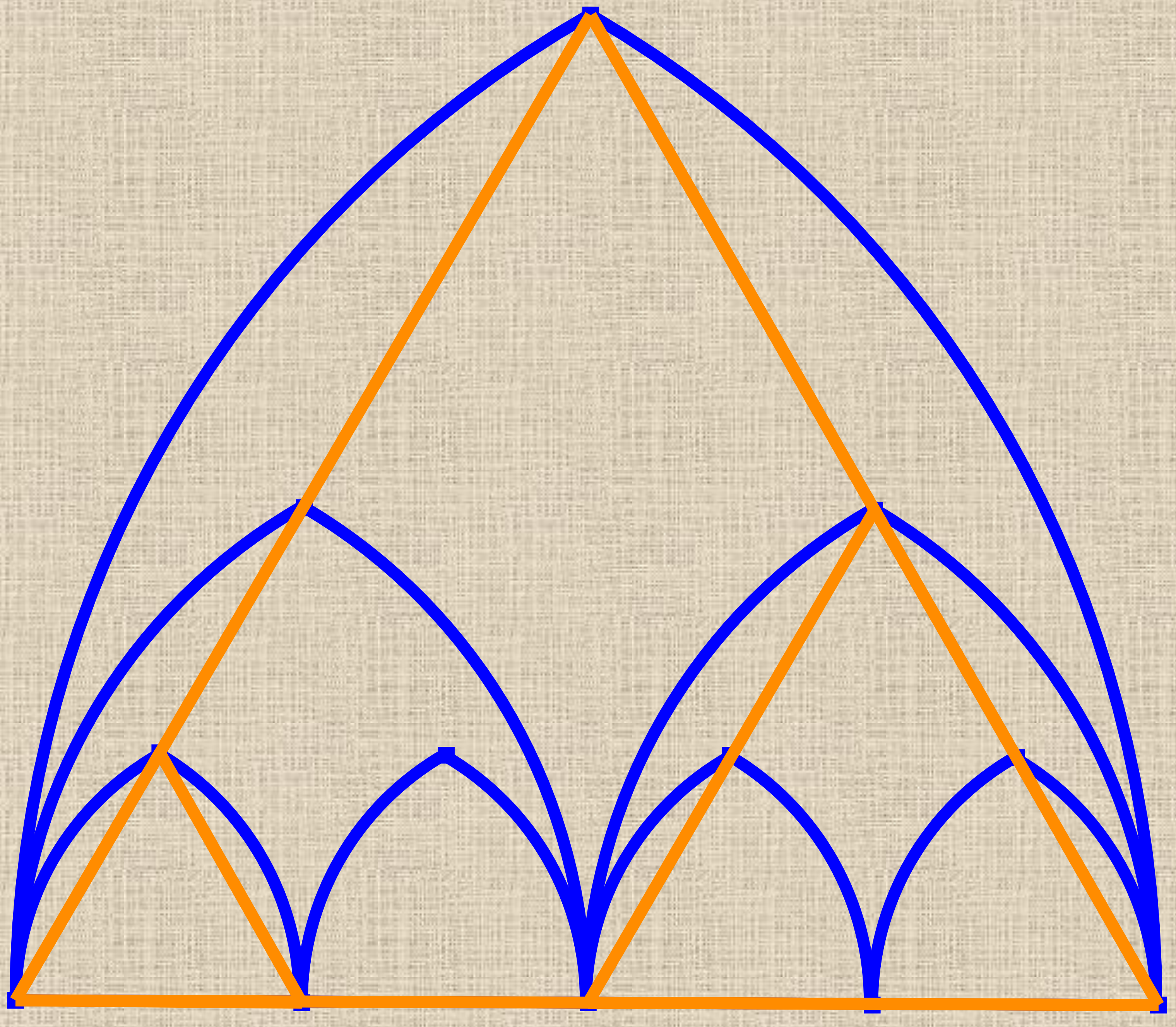

MATEMÁTICAS EN LA CATEDRAL DE BURGOS
EL ARCO OJIVAL
2. Construcción de arcos ojivales mediante triángulos equiláteros. Tipos de arcos ojivales. Construcción.
Ejercicio 2.1
Mediante triángulos equiláteros y con la ayuda de regla y compás, reproduce los arcos ojivales que aparecen en la foto (foto 2) sobre el geoplano.
(Tomar los triángulos equiláteros de lados 12, 6 y 3 unidades respectivamente)
Calcula el área encerrada por los distintos arcos ojivales equiláteros.
Calcula la razón de las áreas entre el mayor arco ojival y el menor. ¿Qué relación tiene con su razón de semejanza?
Foto: Fachada exterior del Claustro alto
Ejercicio 2.2
Construye los siguientes modelos de arcos ojivales:
OJIVAL GENÉRICO: Sobre un segmento AB se sitúa un punto O en una posición cualquiera. Sea O' el simétrico de O con respecto al punto medio de la recta AB que llamaremos H. Se traza una circunferencia con centro O y radio OB (y su simétrica, de centro O' y radio O'A).
En función de la posición de O con respecto de HA se obtienen diferentes arcos de los llamados ojivales. Cuanto mayor sea la distancia HO mas apuntado es el arco. En particular, si O = A es ojival equilátero y si O = H = O' de medio punto.
1
Claustro

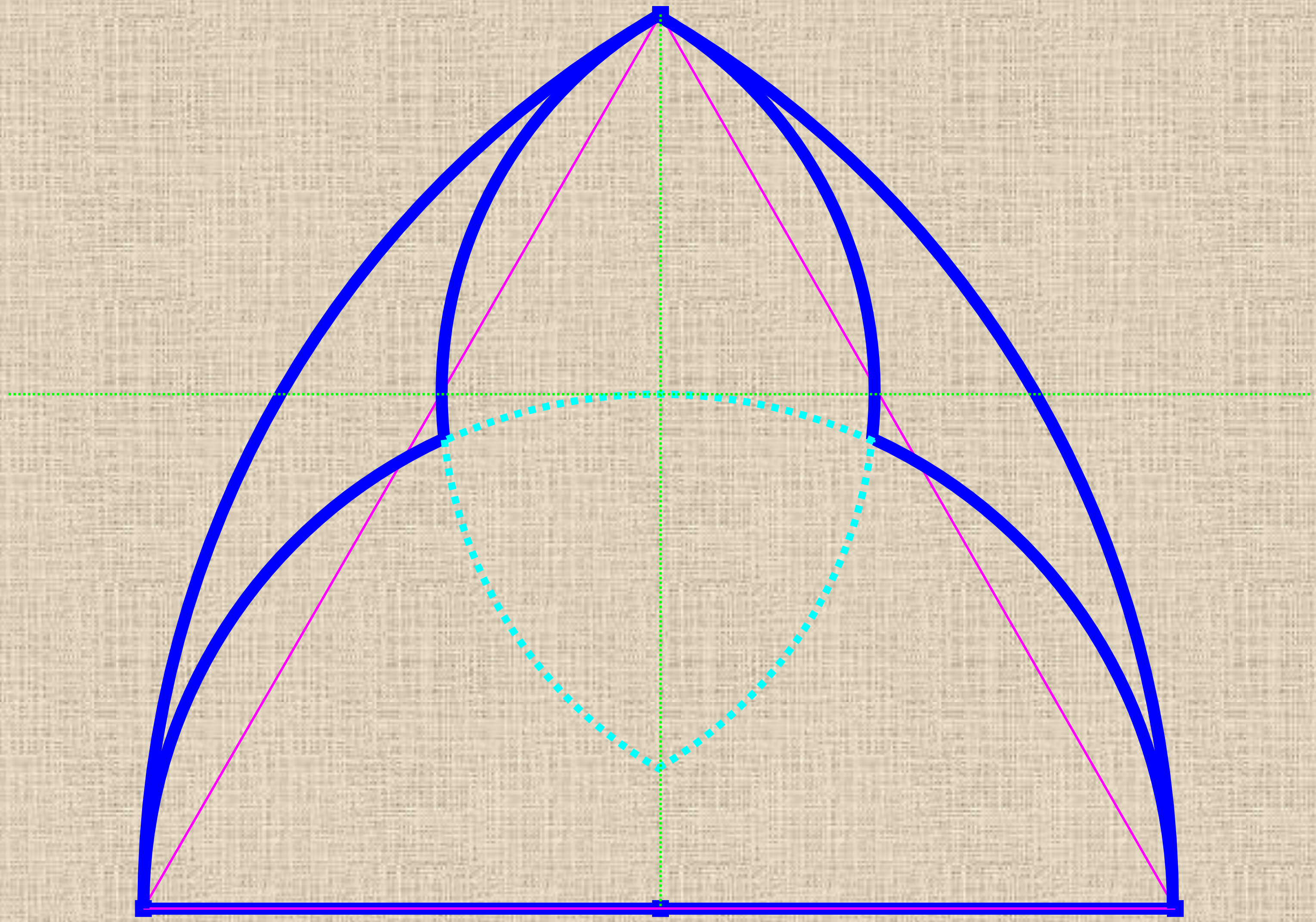
TERCERA SESIÓN: Figuras tangentes al arco principal y/o a los interiores.

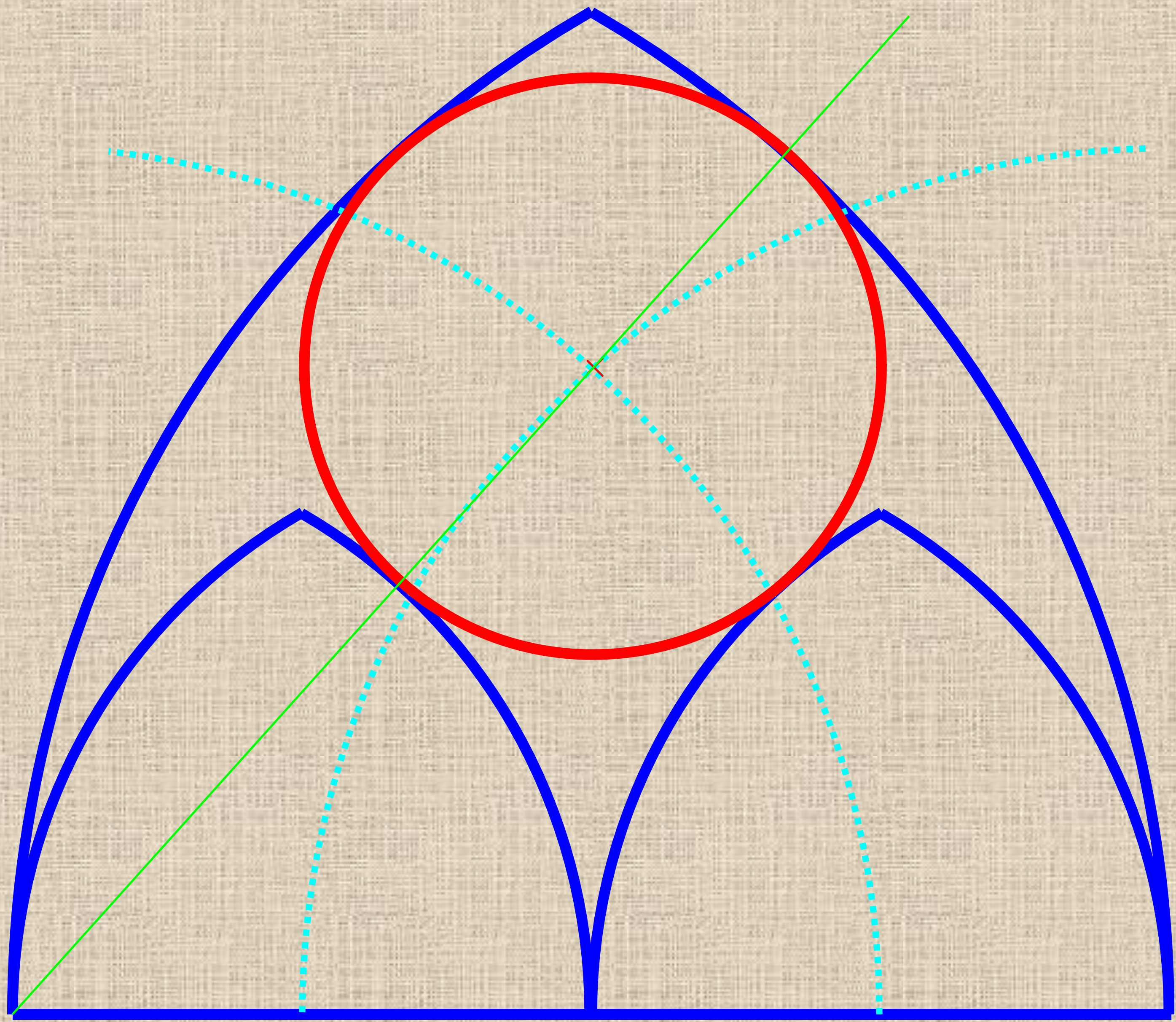
Ejercicio 3.1:

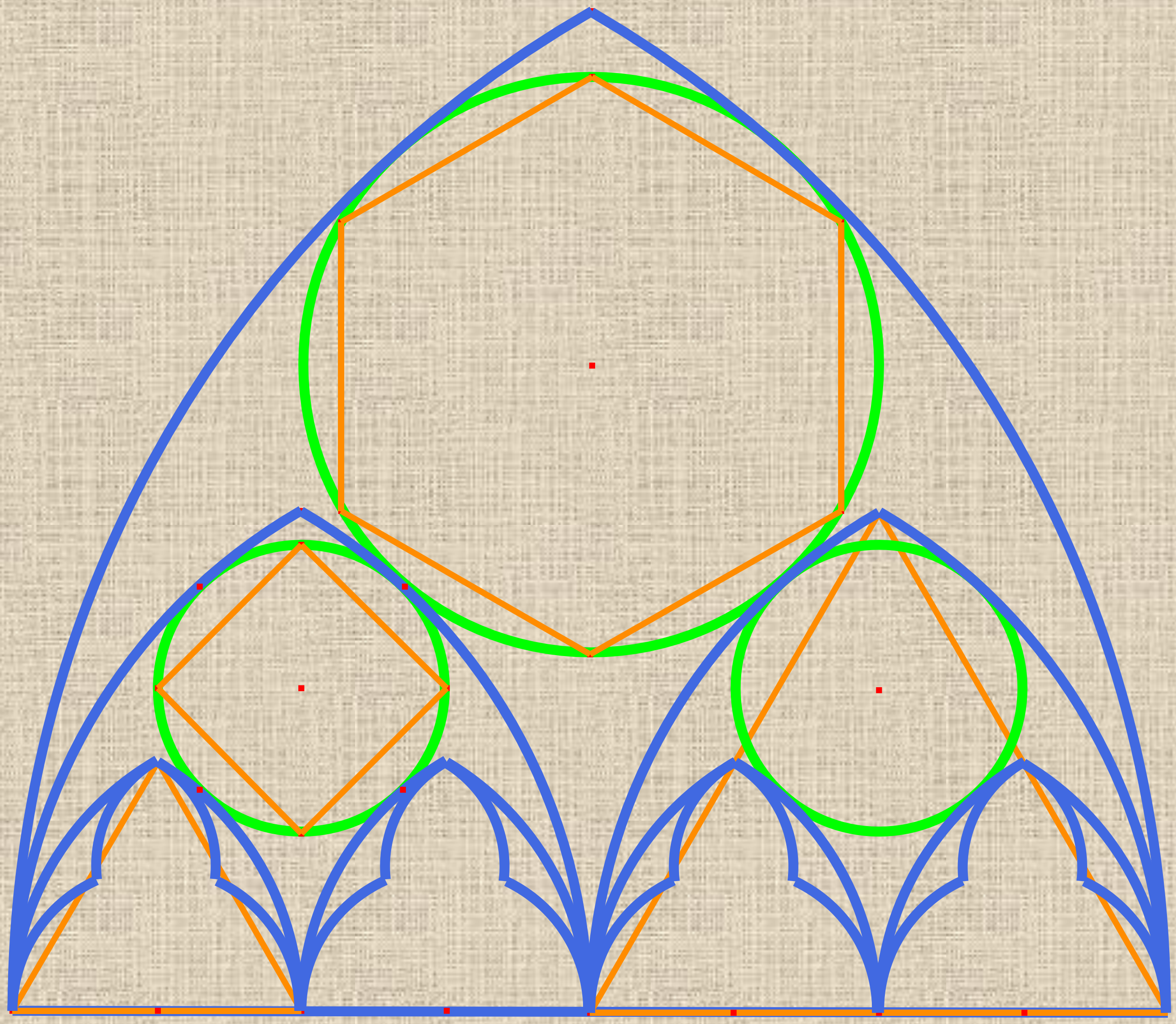
Reproducir la Fachada exterior del Claustro alto, incluyendo:

- Tipos de arcos.
- Circunferencias tangentes a los arcos e interiores.
- Polígonos regulares.
- Polilóbulos.

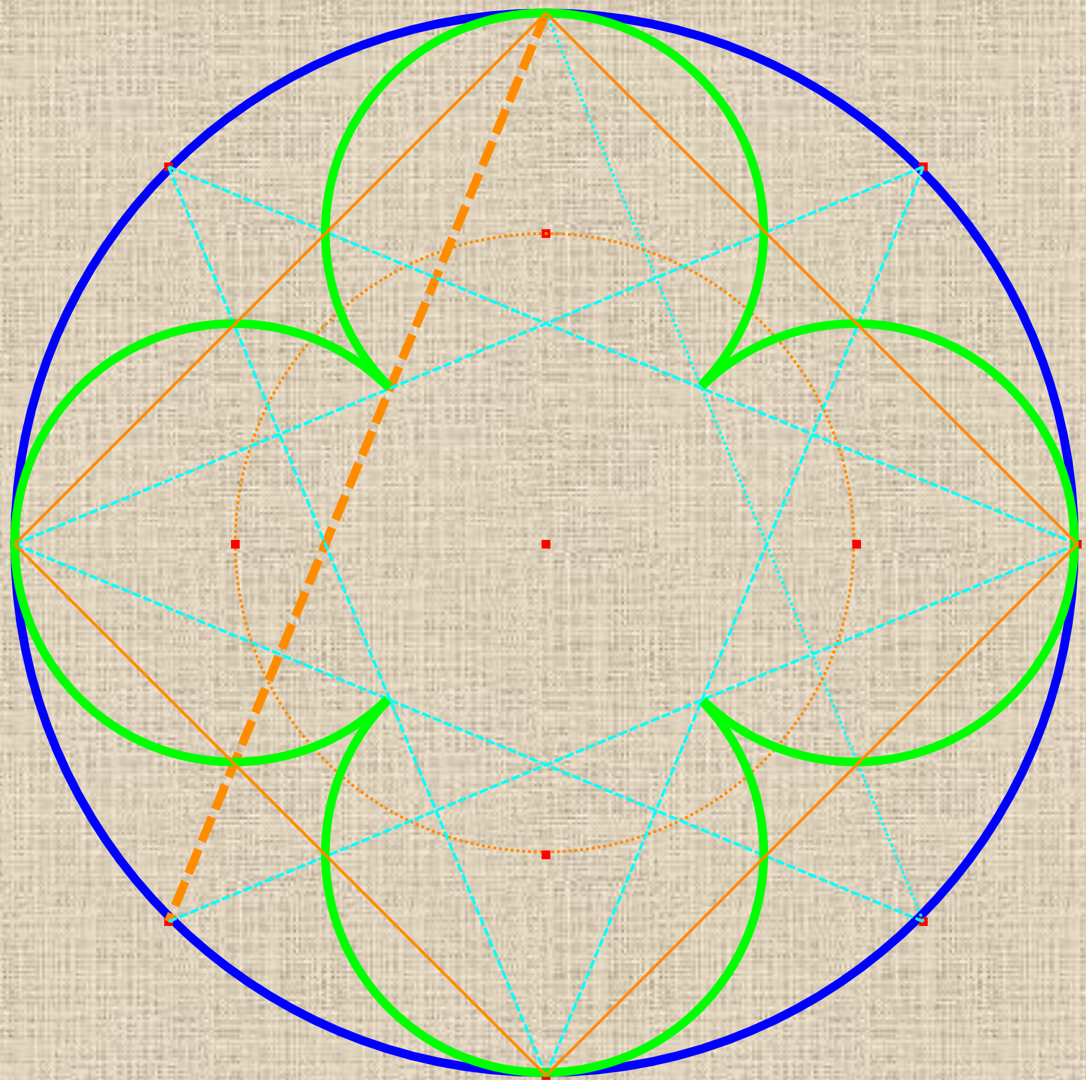




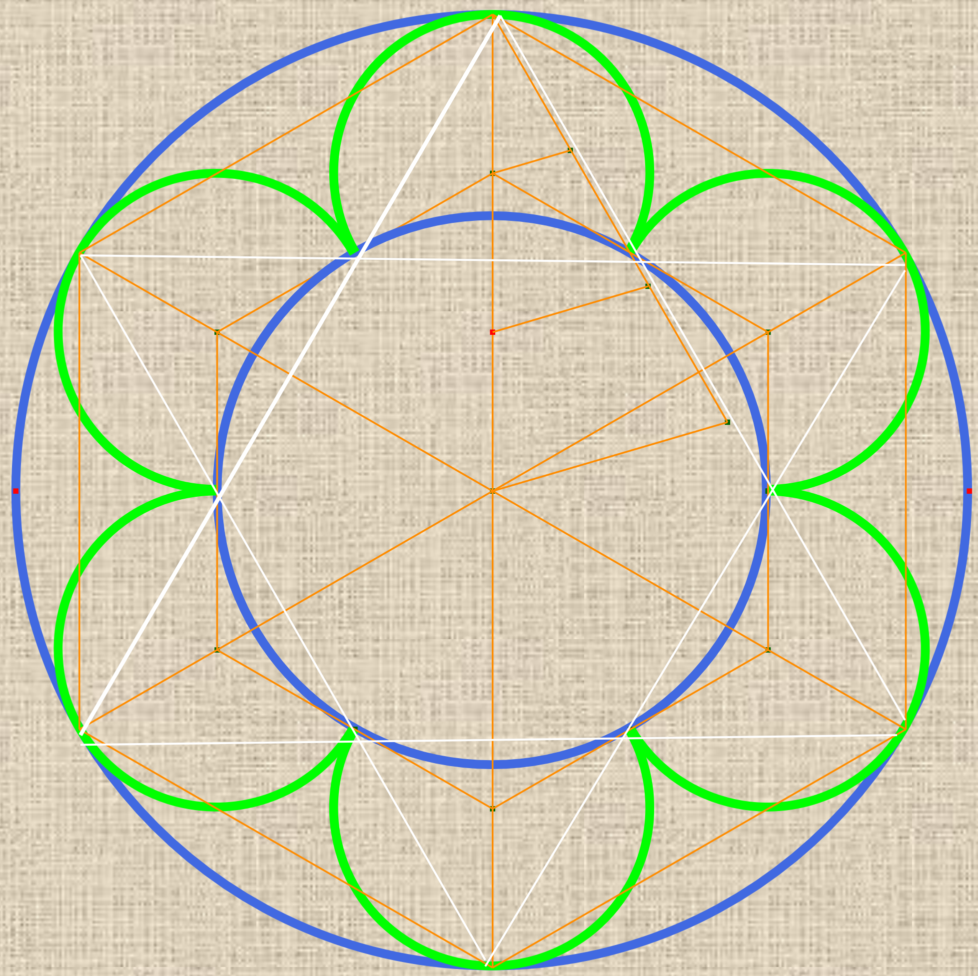




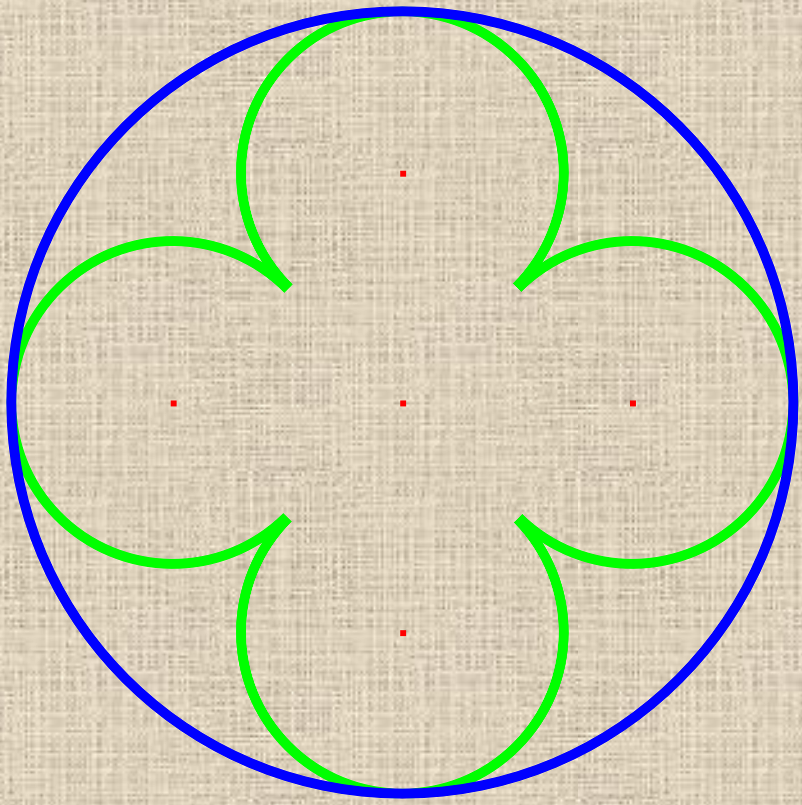
TETRALÓBULO



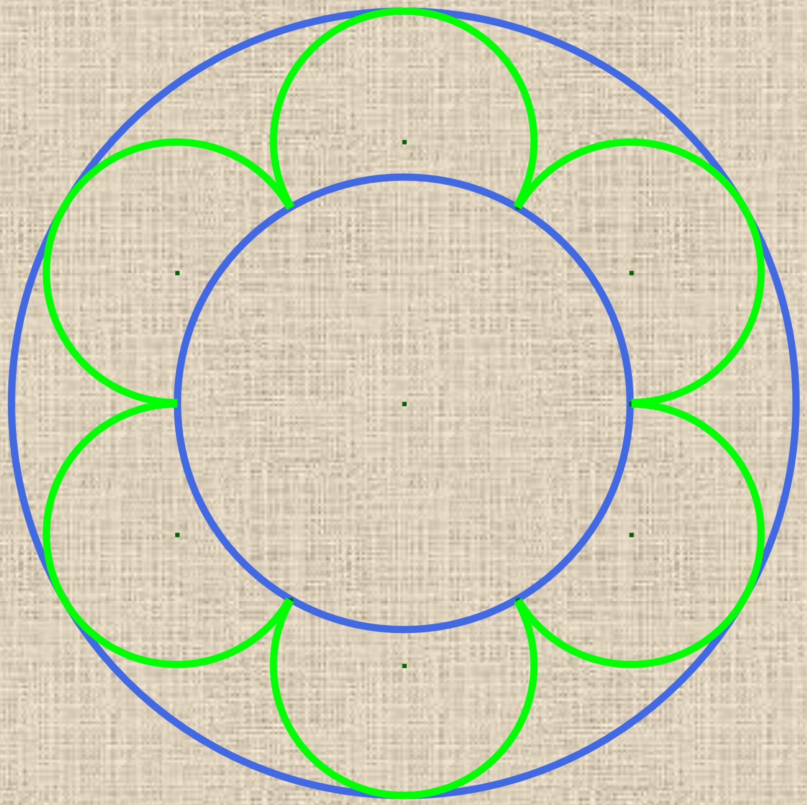
HEXALÓBULO

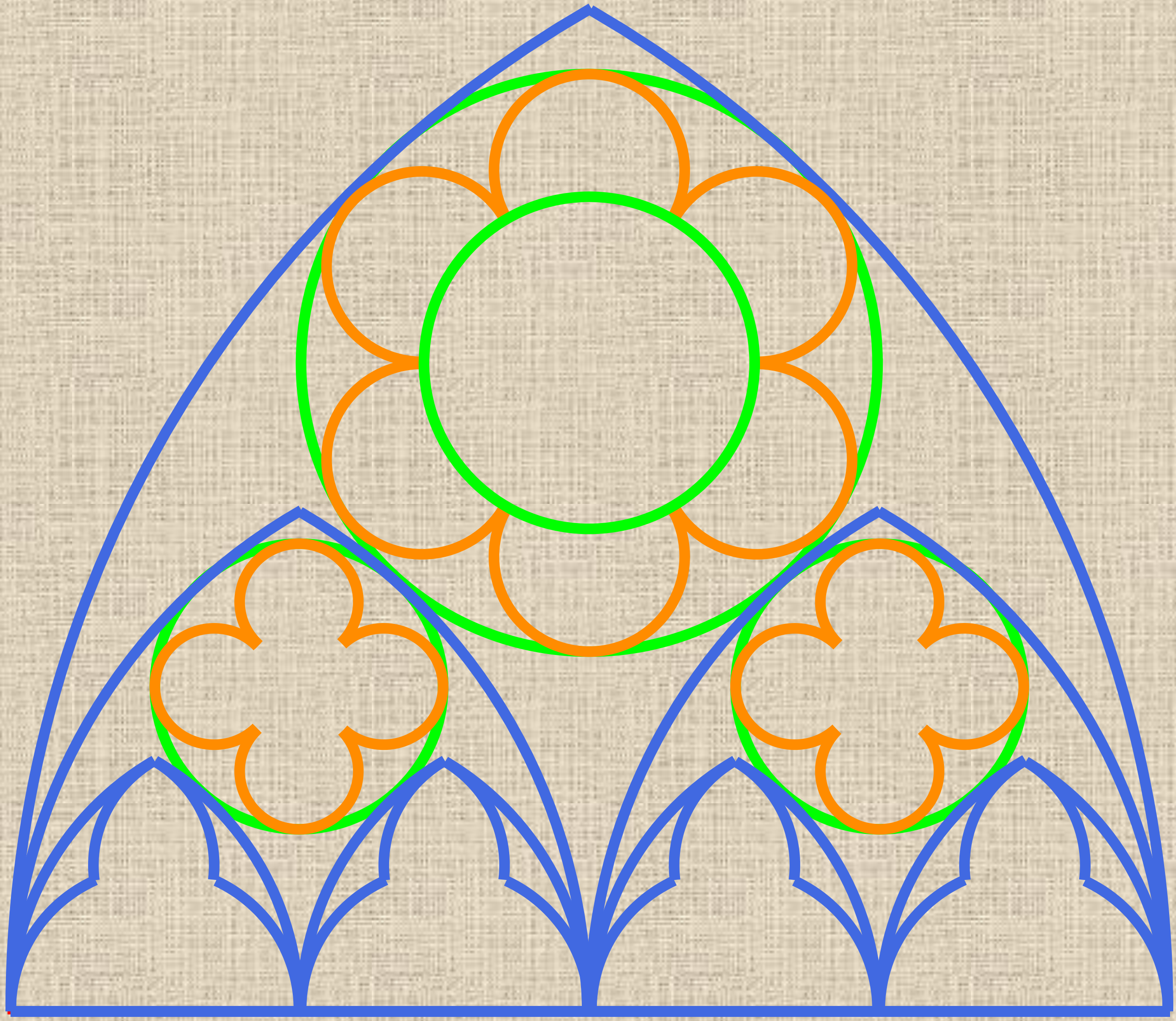


Tetralóbulo



Hexalóbulo



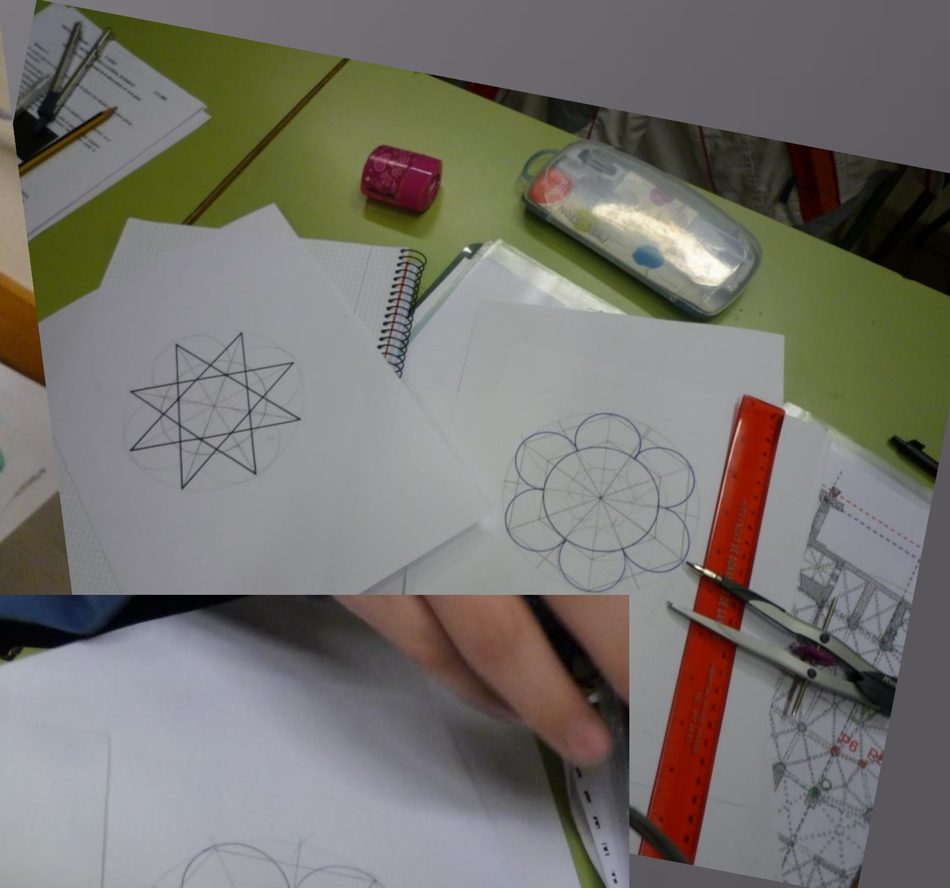
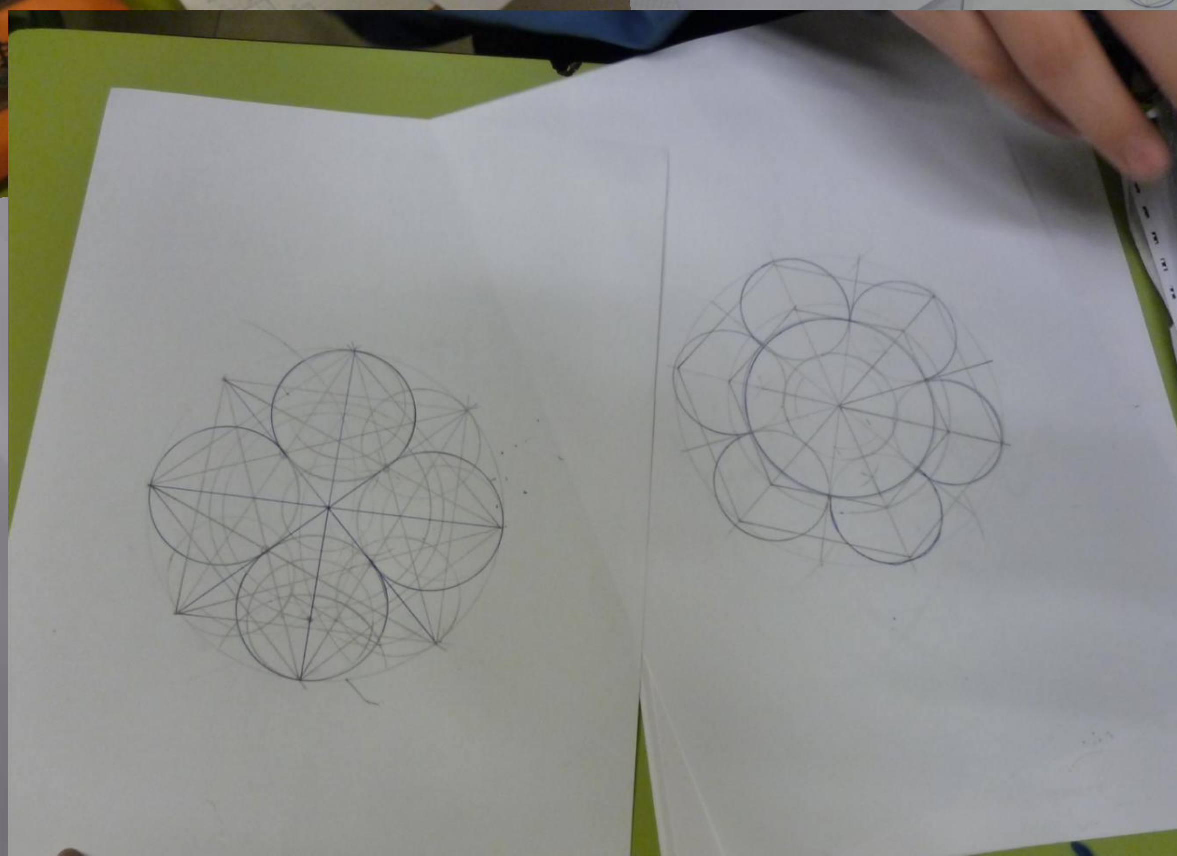



ESCOLAR
P1
P2
P3


HEXALOBULO



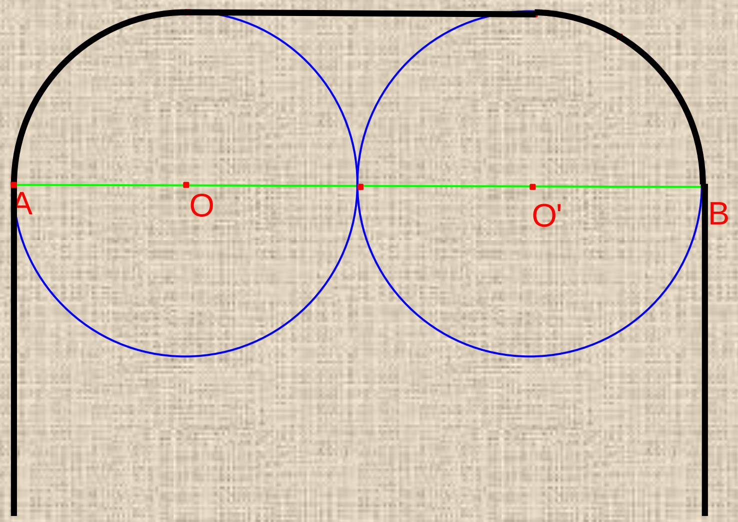
Academia Principal

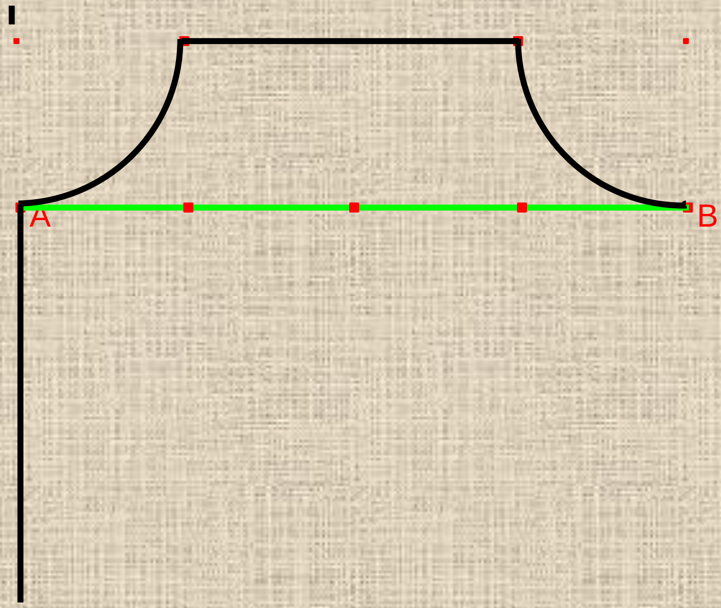
CUARTA SESIÓN: Trabajando con

Ejercicio 4.1: Dibujar los siguientes arcos arquitectónicos con Geogebra.

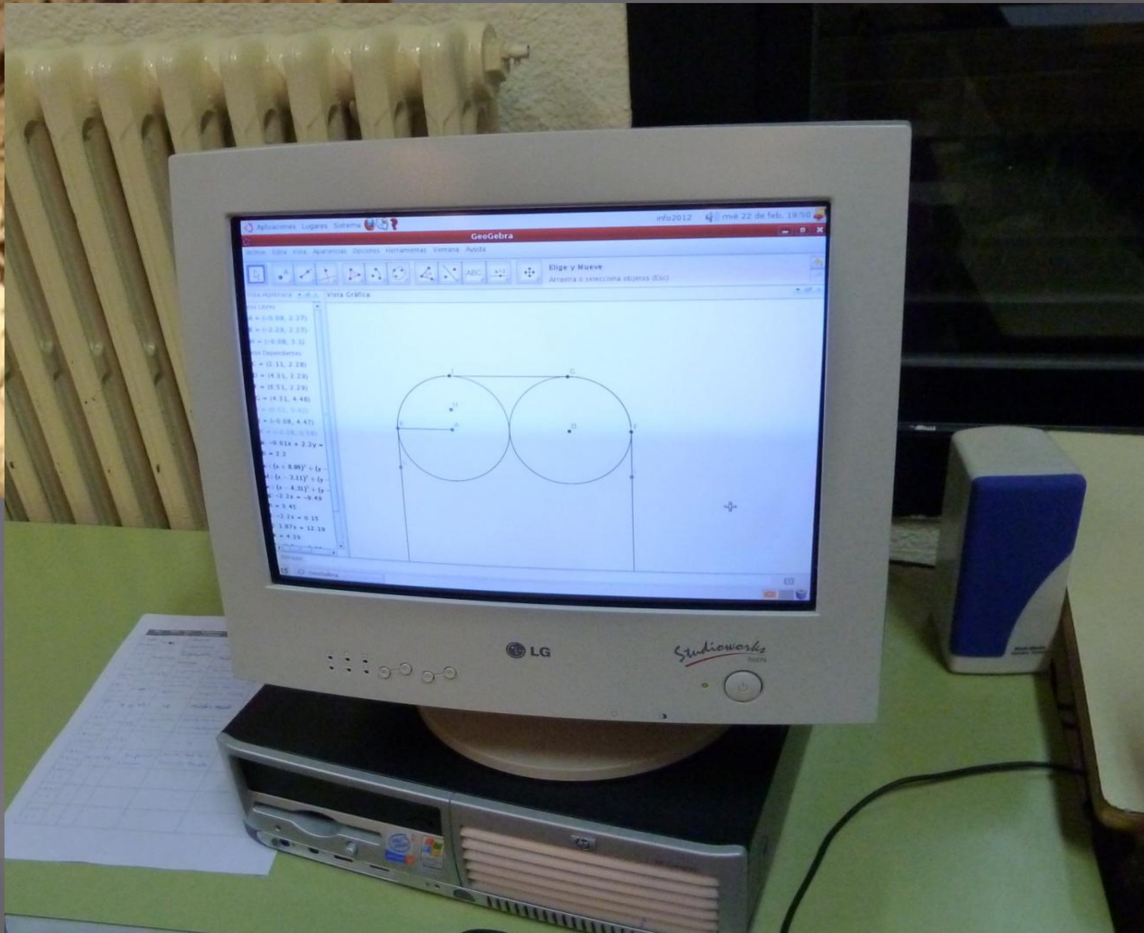
Deprimido cóncavo



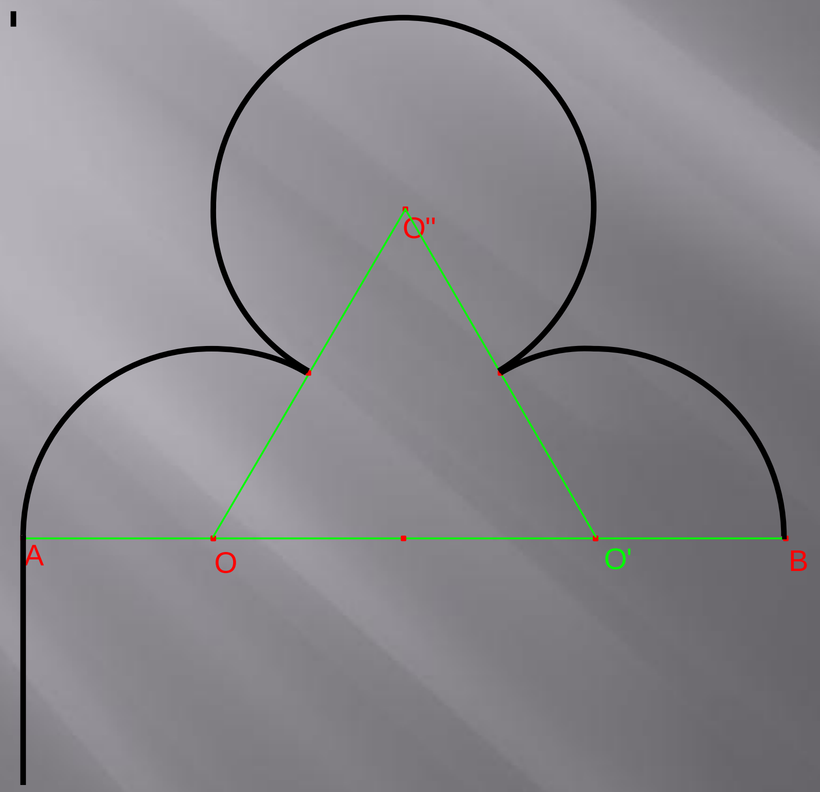
Deprimido convexo



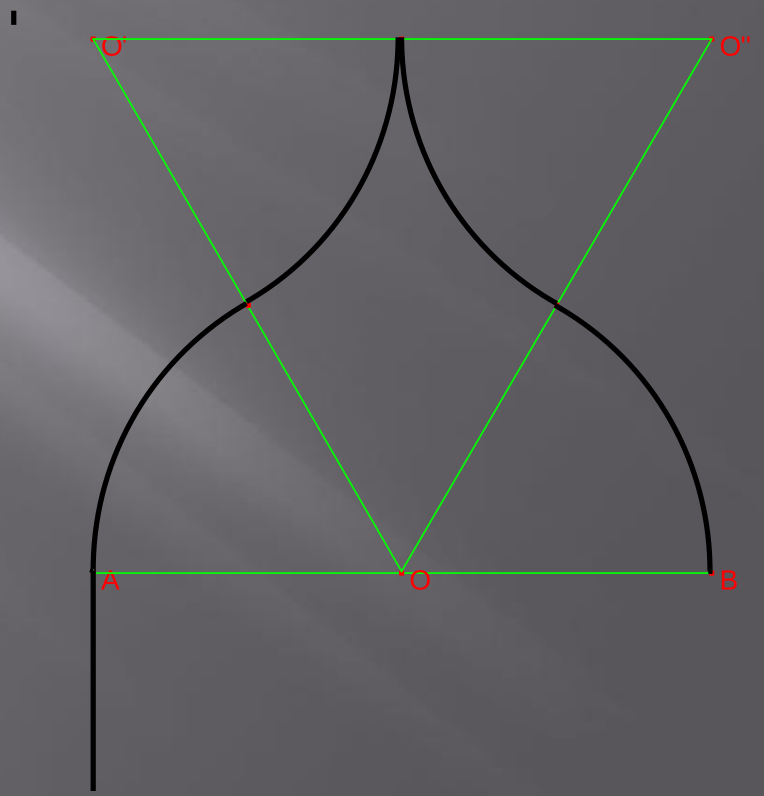
DEPRIMIDO CÓNCAVO



Trebolado

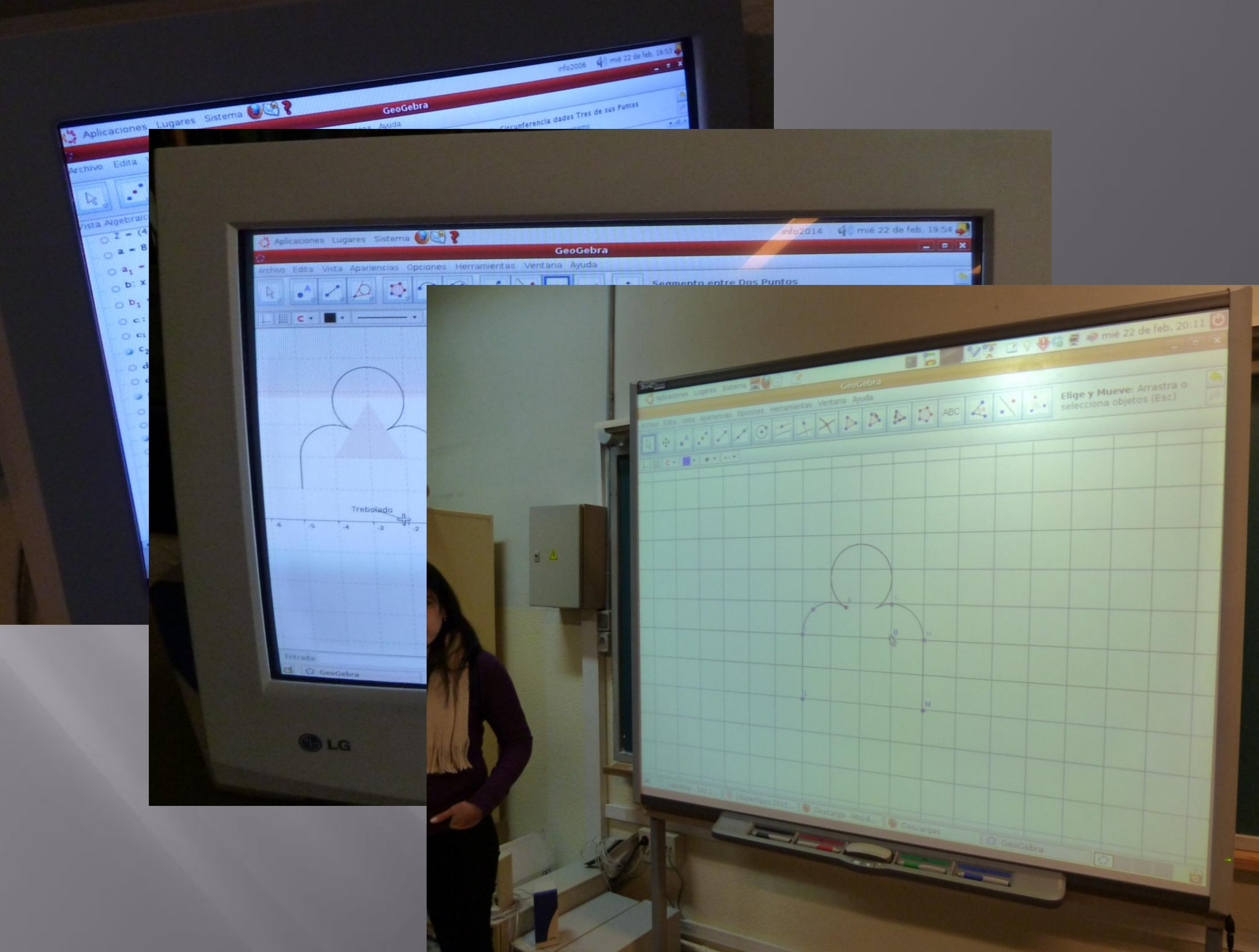


Conopial equilátero o Flamígero

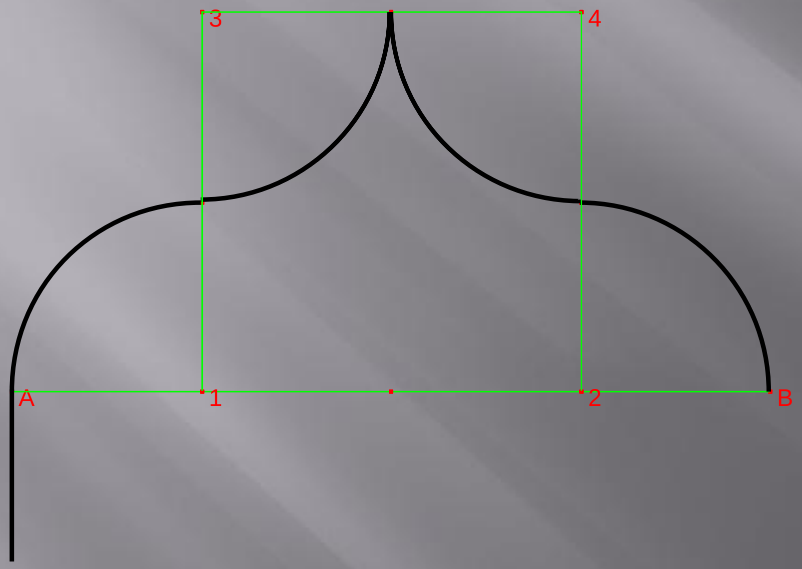


TREBOLADO

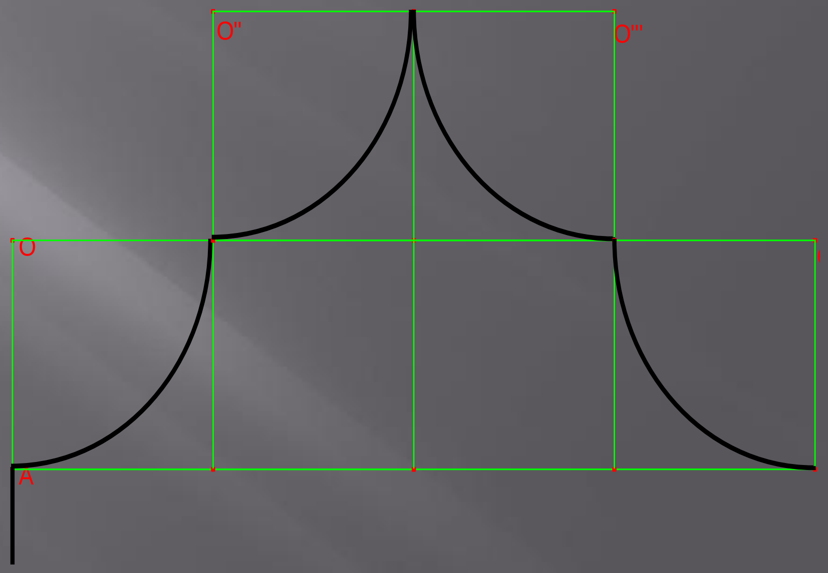
CONOPIAL EQUILÁTERO


Aplicaciones Lugares Sistema
GeoGebra
Archivo Edita
Vista Algebraica
info2014
mié 22 de feb. 19:54
Archivo Edita Vista Apariencias Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Trebolado
Entrada:
LG
mié 22 de feb. 20:11
Elige y Mueve: Arrastra o selecciona objetos (Esc)

Conopial cuadrado



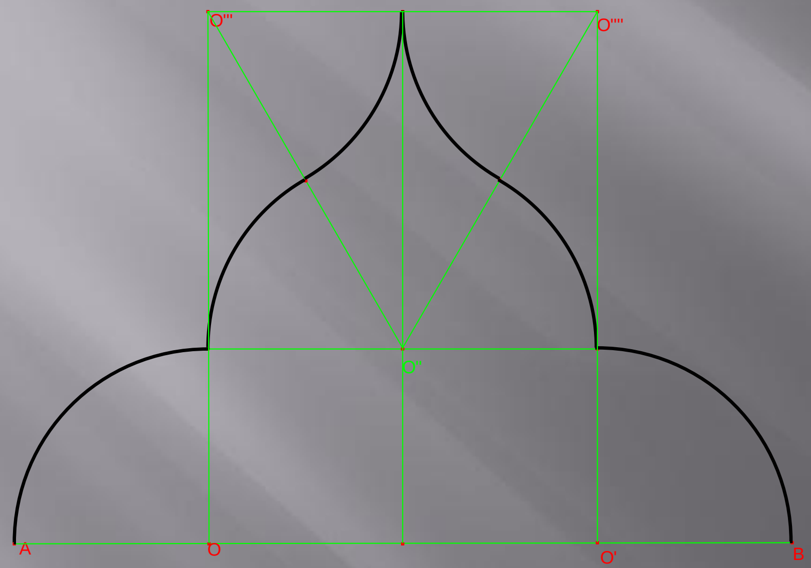
Festonado cóncavo



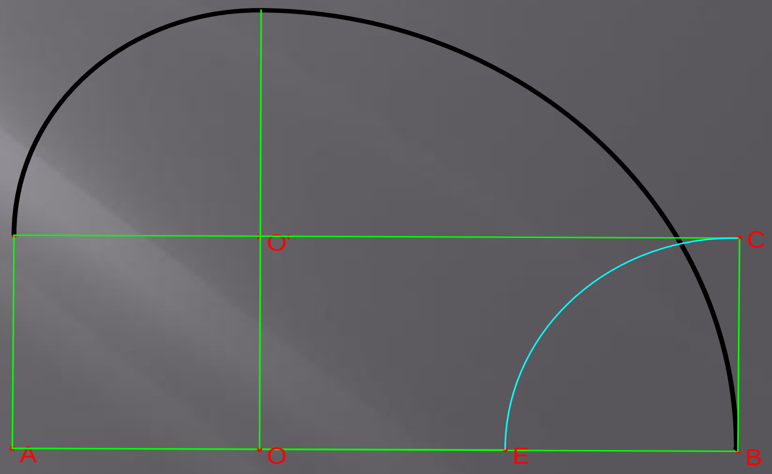
CONOPIAL CUADRADO

FESTONADO CÓNCAVO

Angrelado

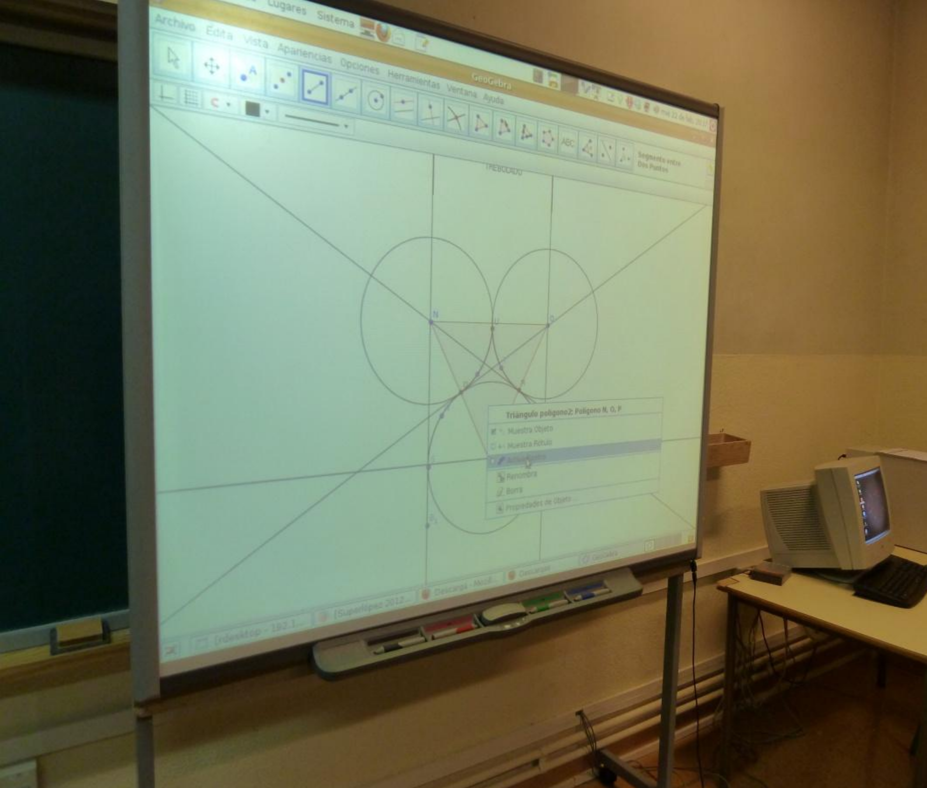


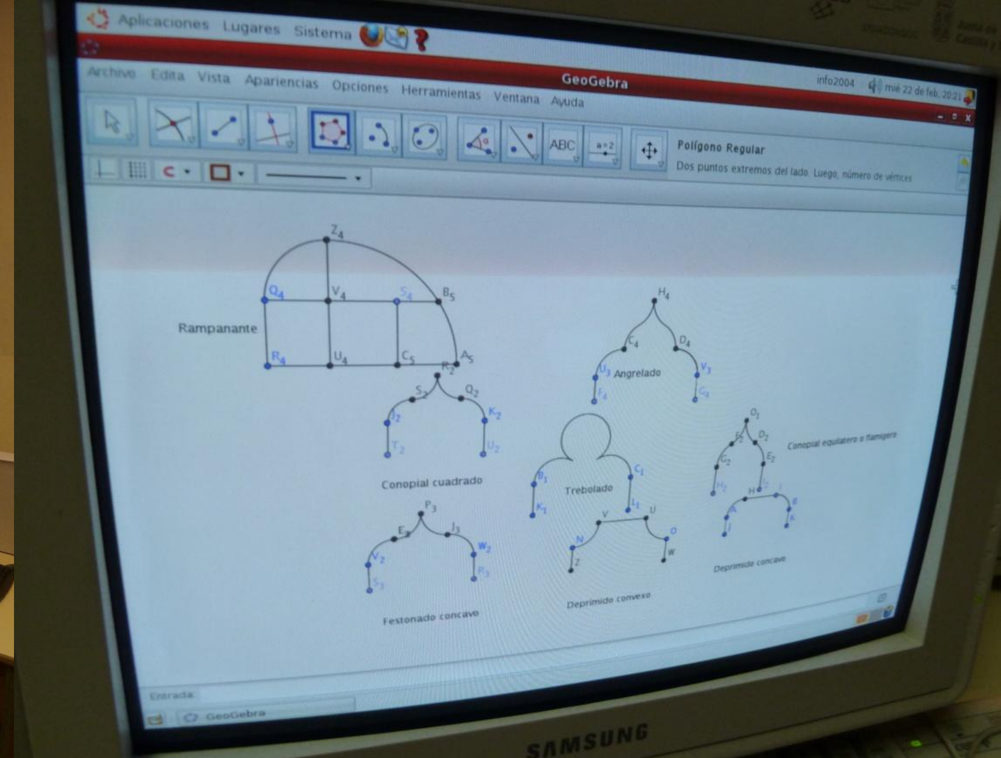
Rampante

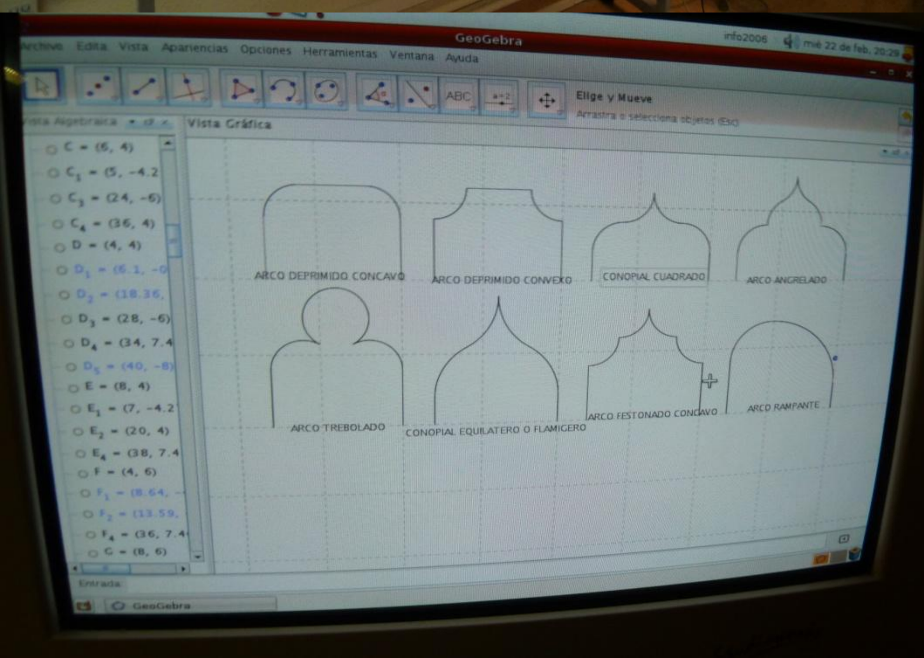


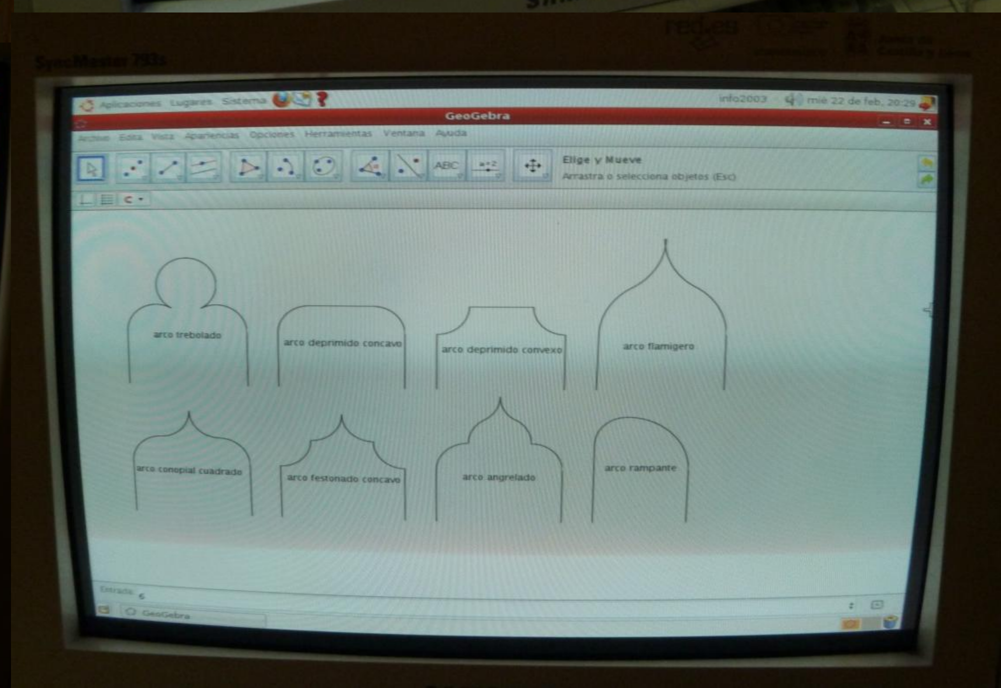
ANGRELADO

RAMPANTE




Aplicaciones Lugares Sistema
Archivo Edita Vista Apariencias Opciones Herramientas Ventana Ayuda
GeoGebra
Polígono Regular
Dos puntos extremos del lado. Luego, número de vértices
Rampanante
Angrelado
Conopial cuadrado
Trebolado
Conopial equilatero o flamigero
Festonado concavo
Deprimido convexo
Deprimido concavo
SAMSUNG

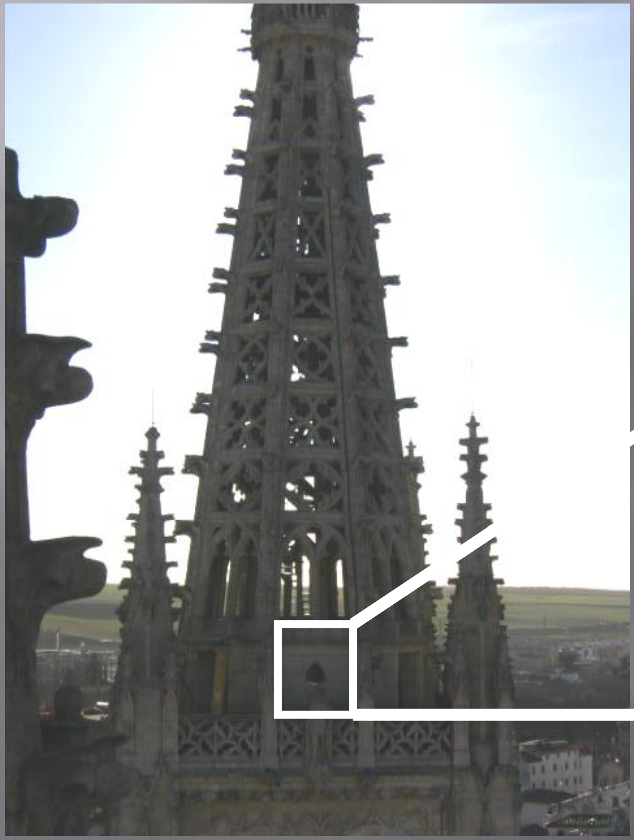

GeoGebra
Archivo Edita Vista Apariencias Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Elige y Mueve
Arrastra o selecciona objetos (Esc)
Vista Gráfica
ARCO DEPRIMIDO CONCAVO
ARCO DEPRIMIDO CONVEXO
CONOPIAL CUADRADO
ARCO ANGRELADO
ARCO TREBOLADO
CONOPIAL EQUILATERO O FLAMIGERO
ARCO FESTONADO CONCAVO
ARCO RAMPANTE

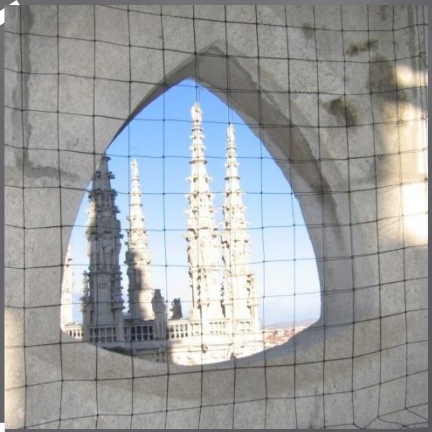

GeoGebra
Elige y Mueve
Arrastra o selecciona objetos (Esc)
arco trebolado
arco deprimido concavo
arco deprimido convexo
arco flamigero
arco conopial cuadrado
arco festonado concavo
arco angrelado
arco rampante

Ejercicio 4.2: Construcción del Triángulo de Reuleaux.

Una de las figuras de anchura constante (como el caso de la circunferencia) es el llamado triángulo de Reuleaux. Dicho triángulo se construye a partir de un triángulo equilátero de lado l, trazando los tres arcos de radio l centrados en cada uno de los vértices y que pasan por los otros vértices.

Detalle de la Capilla de la Concepción

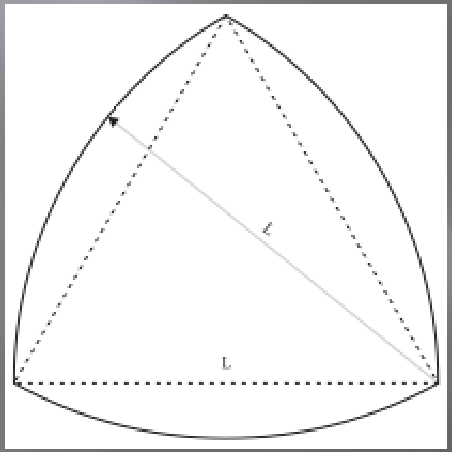


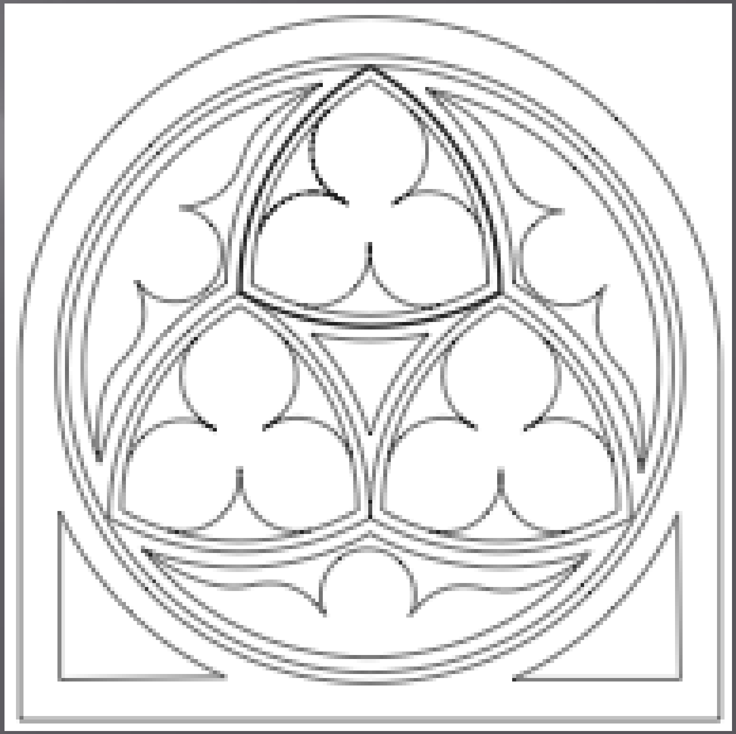


Detalle aguja de la Catedral

TRIÁNGULO de REULEAUX.

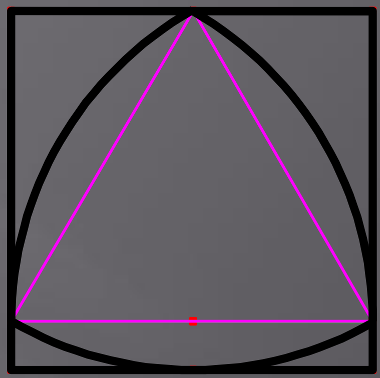
Ingeniero alemán que buscaba mecanismos para aprovechar las máquinas de vapor (gira inscrito en un cuadrado o rectángulo)



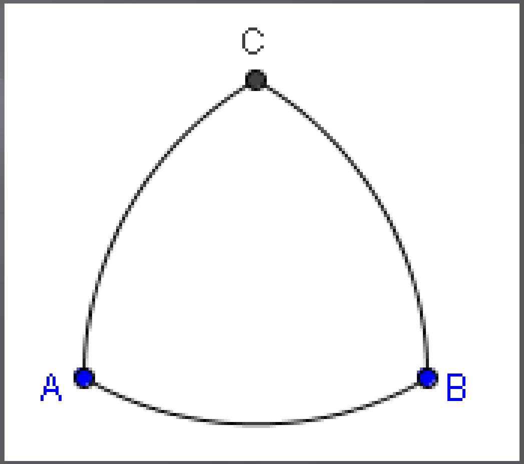


800 aplicaciones, pero en el arte mucho antes
y...

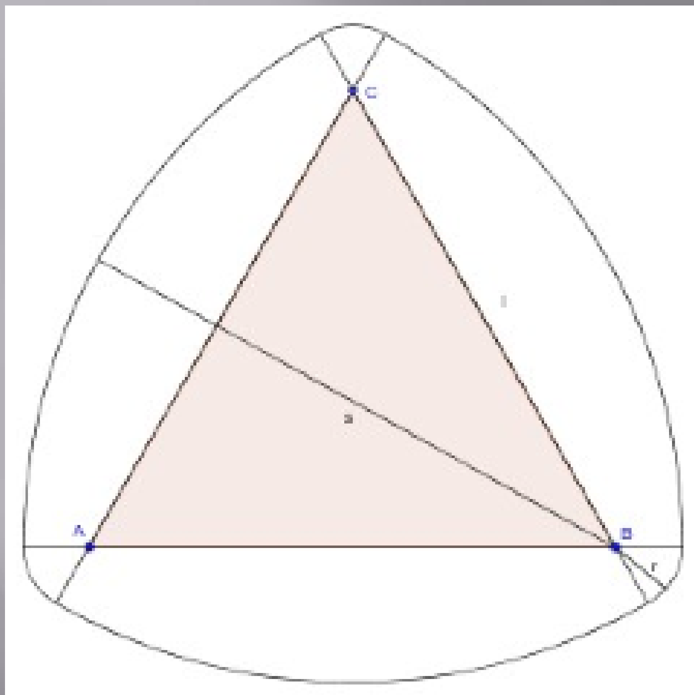
- ***Actividad 4.2-a:*** Construir con la ayuda del programa un triángulo de Reuleaux e inscribirlo en su cuadrado correspondiente.



- ***Actividad 4.2-b:*** ¿Cuál es el perímetro de un triángulo de Reuleaux construido a partir de un triángulo equilátero de lado *L*? Compáralo con el perímetro de circunferencia de diámetro *L*.



TRIÁNGULO de REULEAUX general: Propiedades geométricas



T. Equilátero lado l

Arcos de radios r y s de modo que

$$l + r = s$$

Determinado por dos de los tres parámetros

Anchura constante de "diámetro":

$$D = r + s = 2r + l$$

TRIÁNGULO de REULEAUX: algunas cuentas...

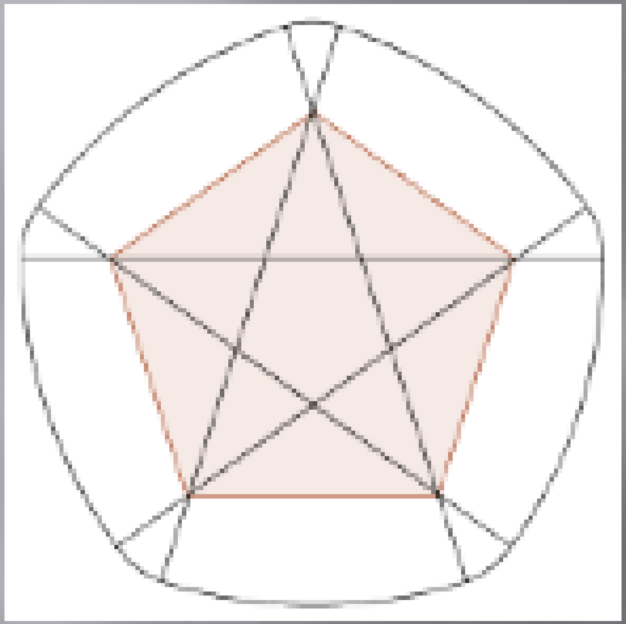
TRIÁNGULO de REULEAUX: Longitud o perímetro

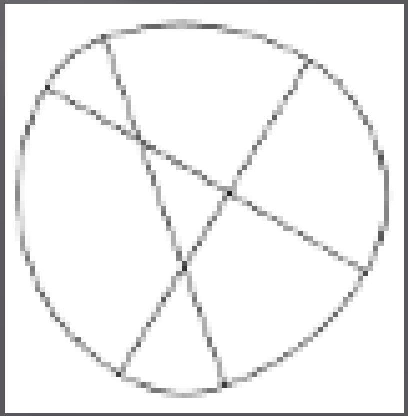
$$L = 3\frac{\pi}{3}r + 3\frac{\pi}{3}s = \pi(r+s) = \pi D$$

TRIÁNGULO de REULEAUX: Área

$$A(l,r) = \frac{(\pi - \sqrt{3})l^2 + 2\pi r l + 2\pi r^2}{2}$$

POLÍGONOS de REULEAUX: generalización





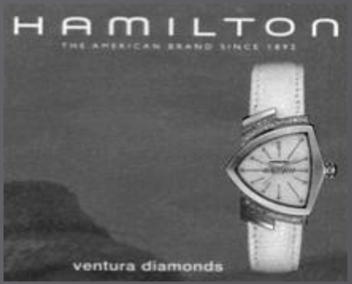
¡No hace falta que el polígono sea regular!

Dadas n rectas que generan una región cerrada...

NO TODO ES ARTE: Aplicaciones:

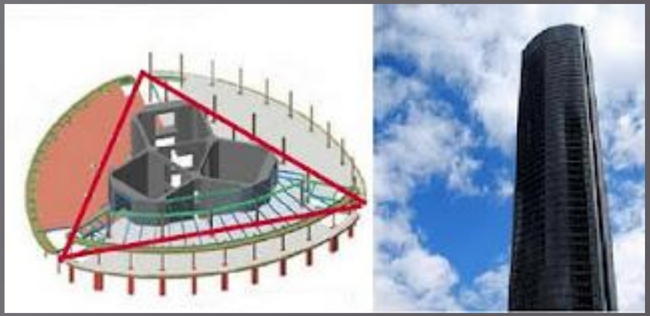
- Sin SMINT no hay beso

- HAMILTON



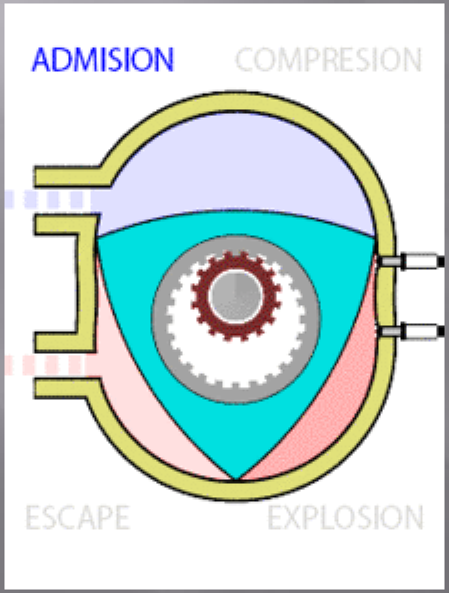
- Alcantarillas
- ¡Mis bolis STAEDLER!

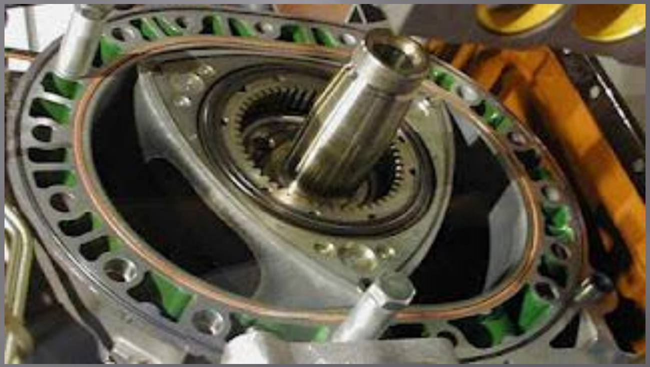
En Madrid la TORRE SACYR , el tercer rascacielos más alto de España, con 52 plantas y una altura de 236 metros, acabada de construir en 2008



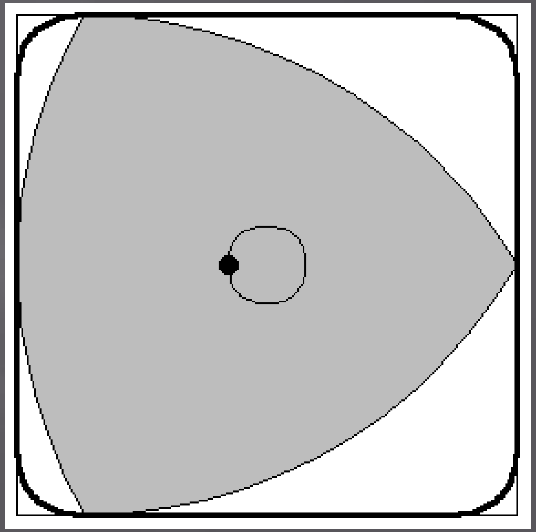
Motor WANKEL

¡Taladros cuadrados!



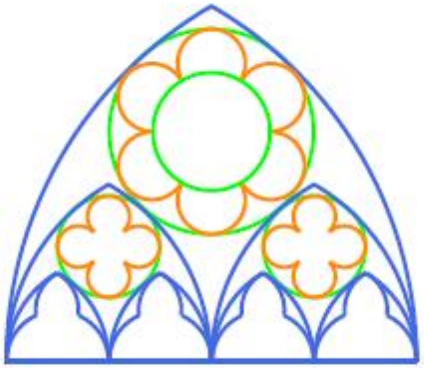
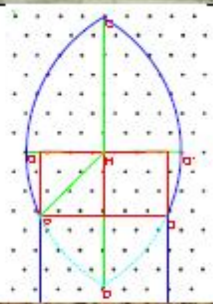


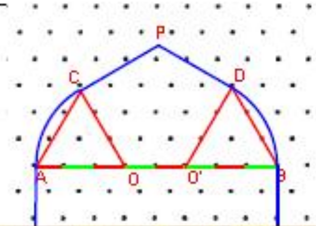
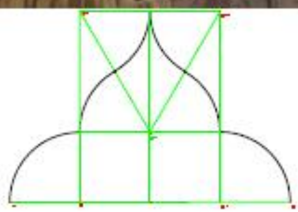
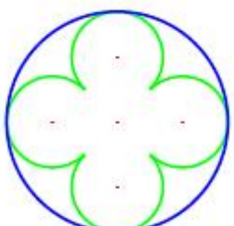
Mazda RX-8 con motor Wankel (mod. 2010)

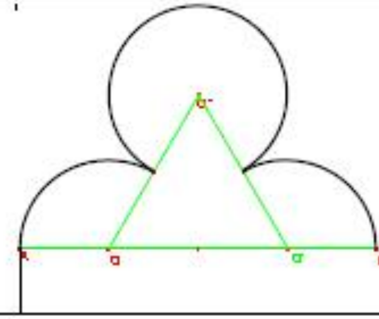
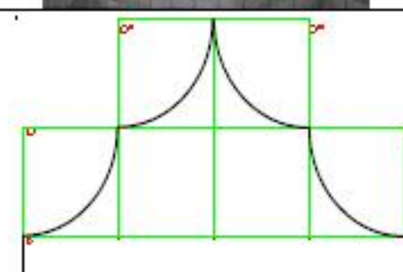


Trabajando "in situ"

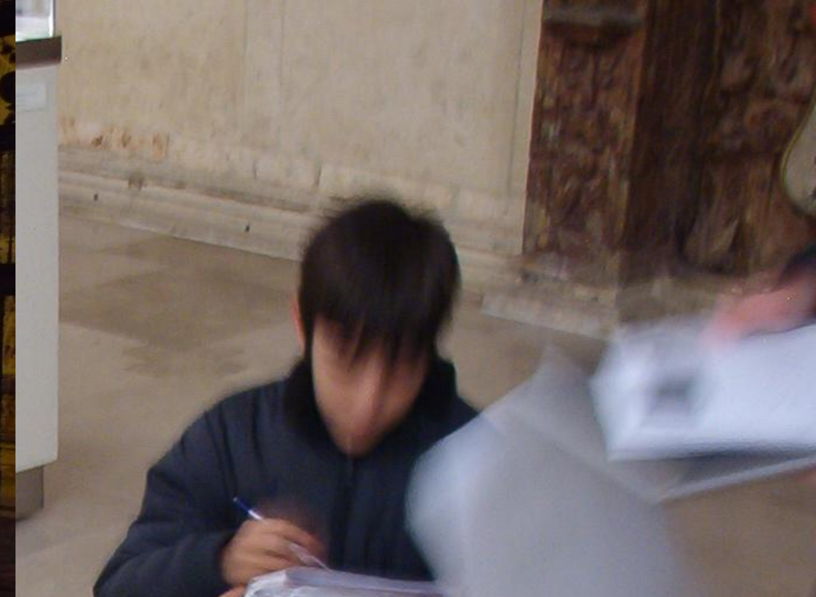
ANEXO: La siguiente tabla será completada por los alumnos durante la visita a la Catedral.

Tipo de arco	Arco o figura	¿Dónde lo hemos encontrado?
		
		
		
		
		
Tumido de ojivas		
		

Turco de portillo		
		
Angrelado		
		
		

Trebolado		
Triángulo de Reuleaux		
		
Festonado cóncavo		


MISERERE


MATEMÁTICAS EN LA
CATEDRAL DE BURGOS
GRUPO EsTalMat
de BURGOS
ASOCIACIÓN CASTELLANO Y LEONESA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
"MIGUEL DE GUZMÁN"
cajacírculo
obra social

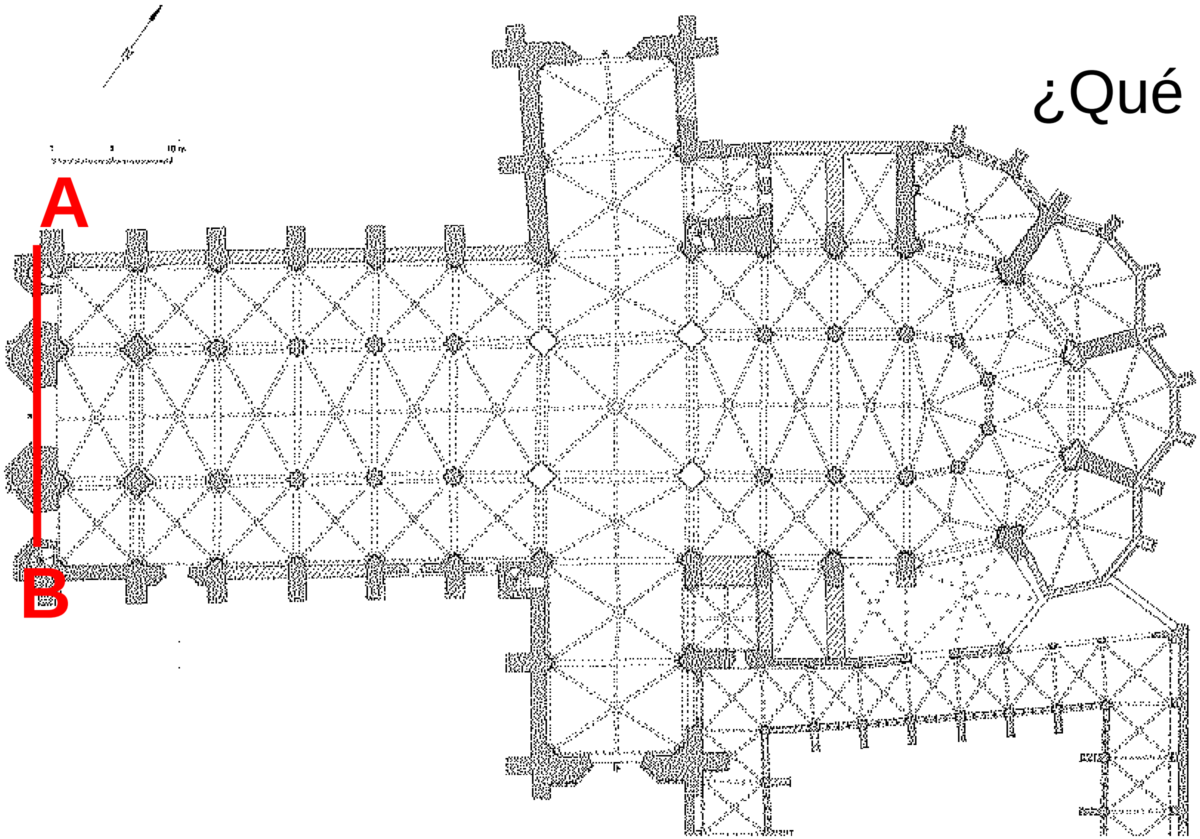
I

PLANTA PRINCIPAL

Tipos de actividades:

- Escalas.
- Rectángulos: proporciones, rectángulos dinámicos y estáticos, formatos de papel DIN.
- Otros polígonos: pentágonos y hexágonos.

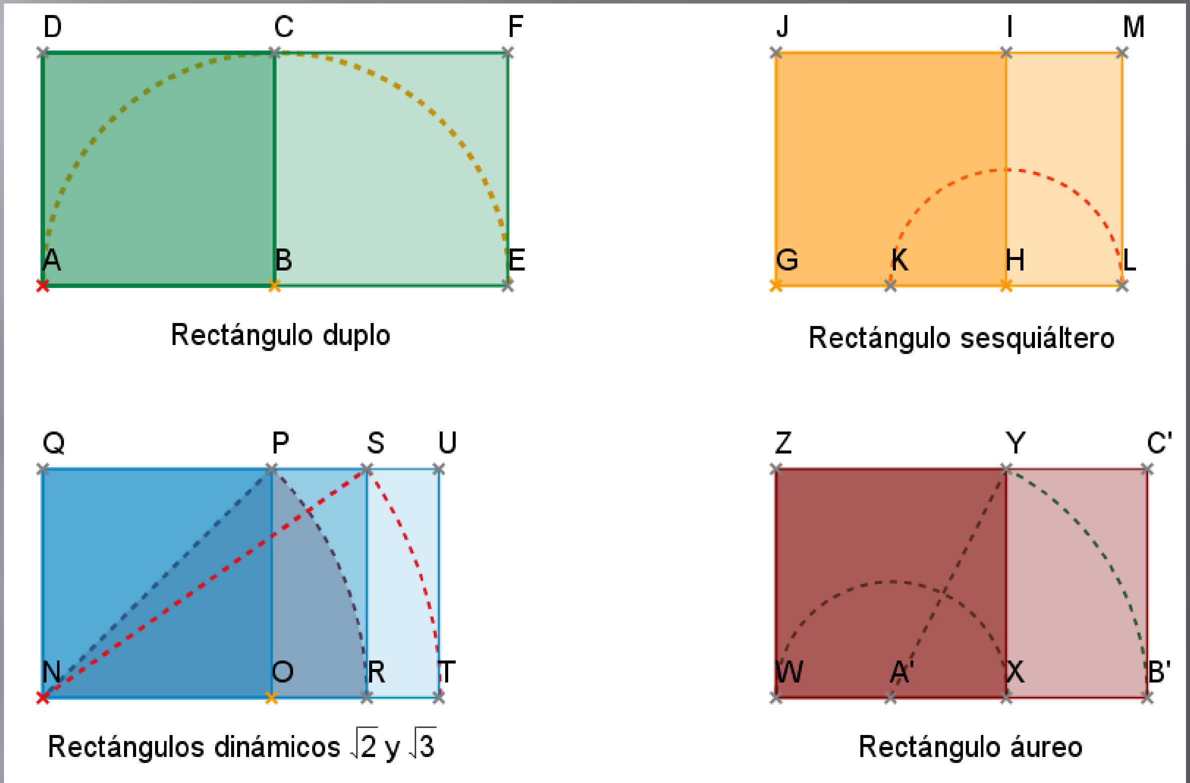
Actividades sobre escalas:



¿Qué es la escala en un plano?

Sabiendo que la medida real del segmento AB es 29,57 metros averigua la escala empleada en el plano anterior.

Rectángulos notables:

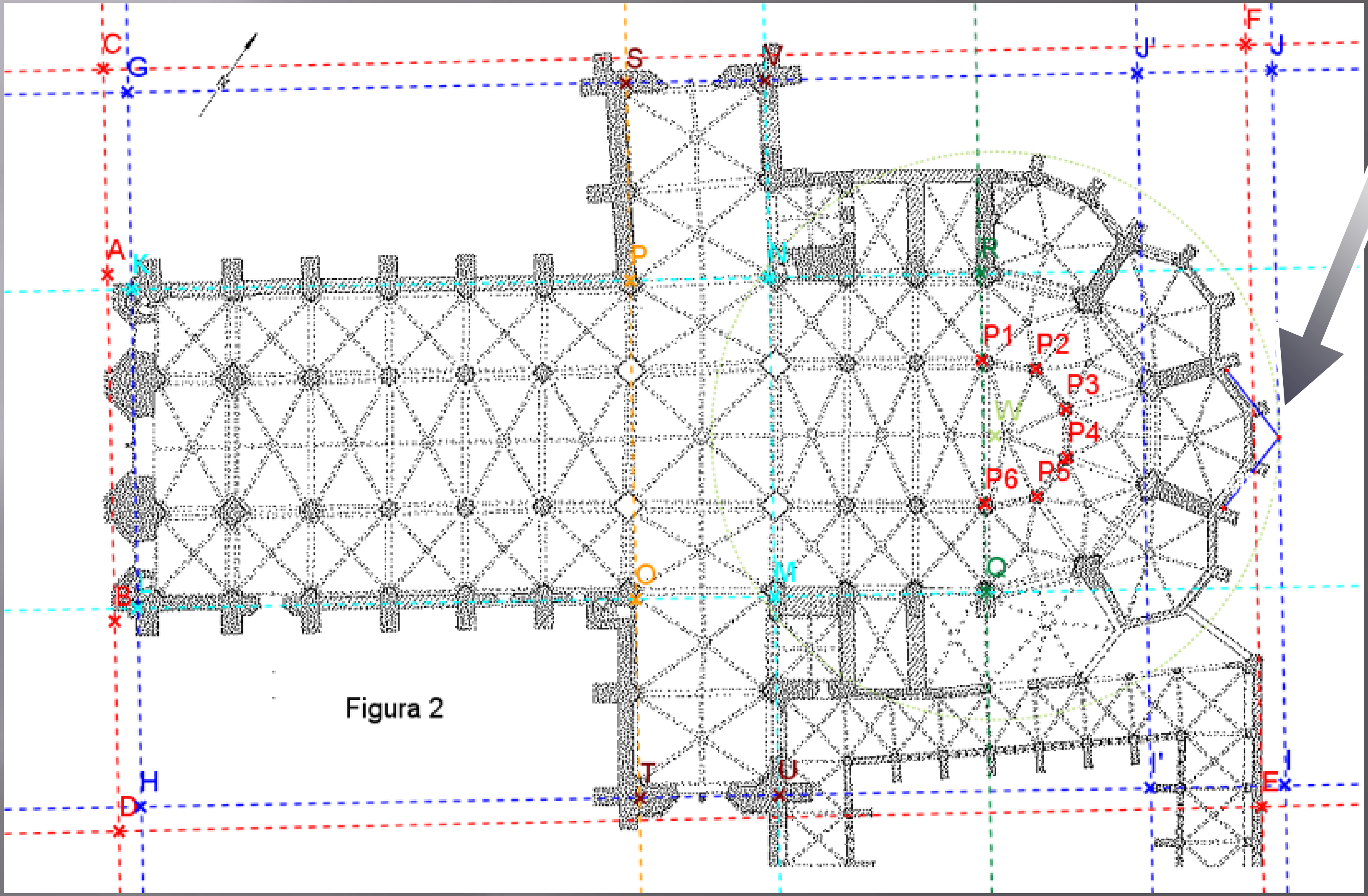


Actividades:

- Construcciones con regla y compás.
- Construcciones con un programa informático de geometría dinámica.
- Obtención de perímetros y áreas.
- Identificación sobre el plano de la catedral.

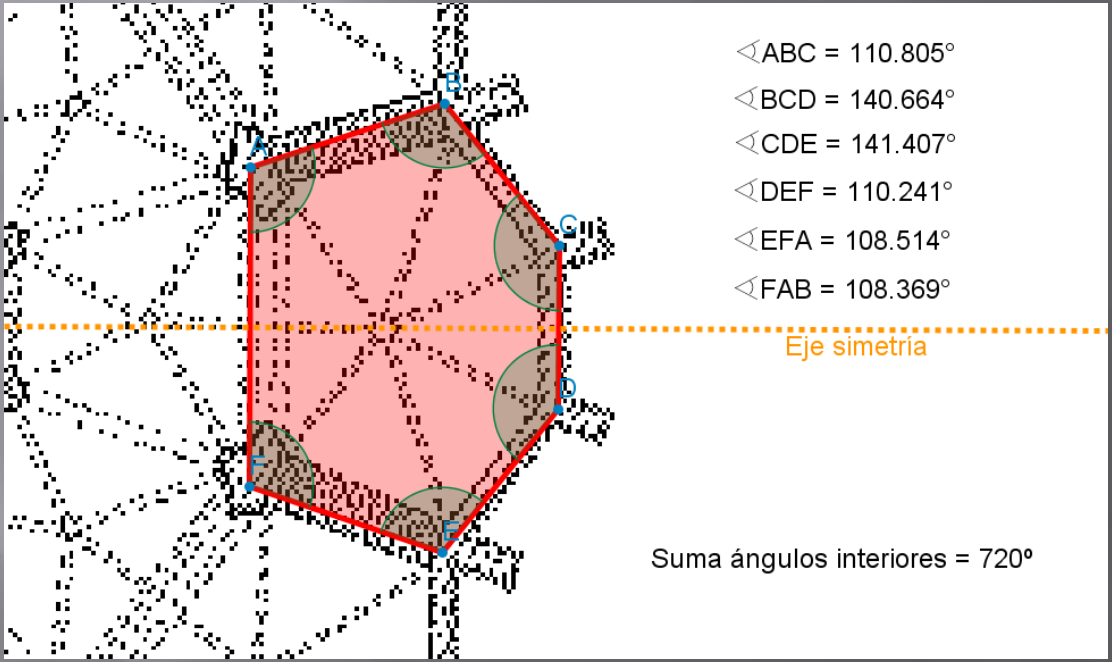
Rectángulos en la catedral:

¿?



Actividades sobre otros polígonos: hexágonos

Hexágonos en la cabecera de la catedral de Burgos, pentágonos, decágonos …

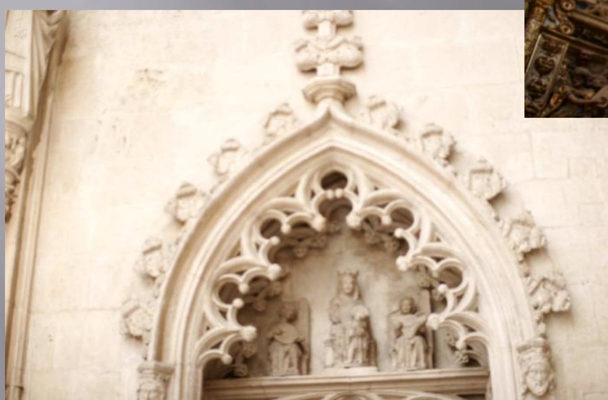


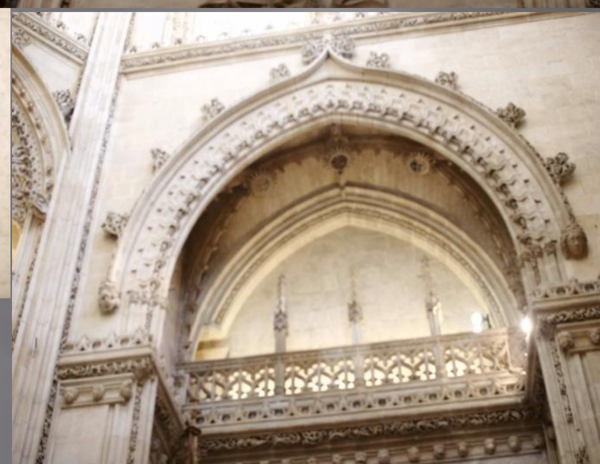
Investigar sobre: proporciones, regularidad, ángulos interiores y su suma, simetrías, etc.

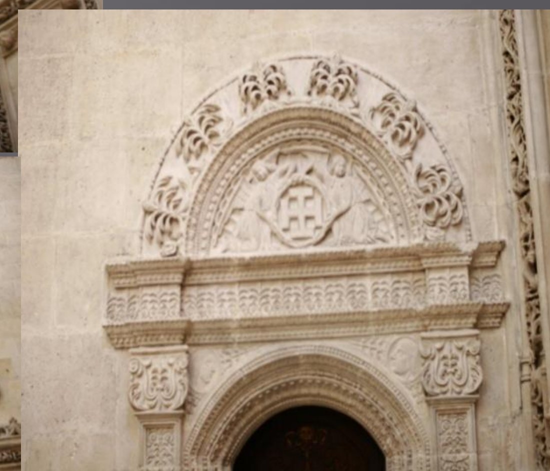
II

CAPILLA DE LOS CONDESTABLES

ARCOS EN LA CAPILLA







En paredes, ventanas y sepulcros de la Capilla podemos encontrar distintos tipos de arcos.

LA BÓVEDA

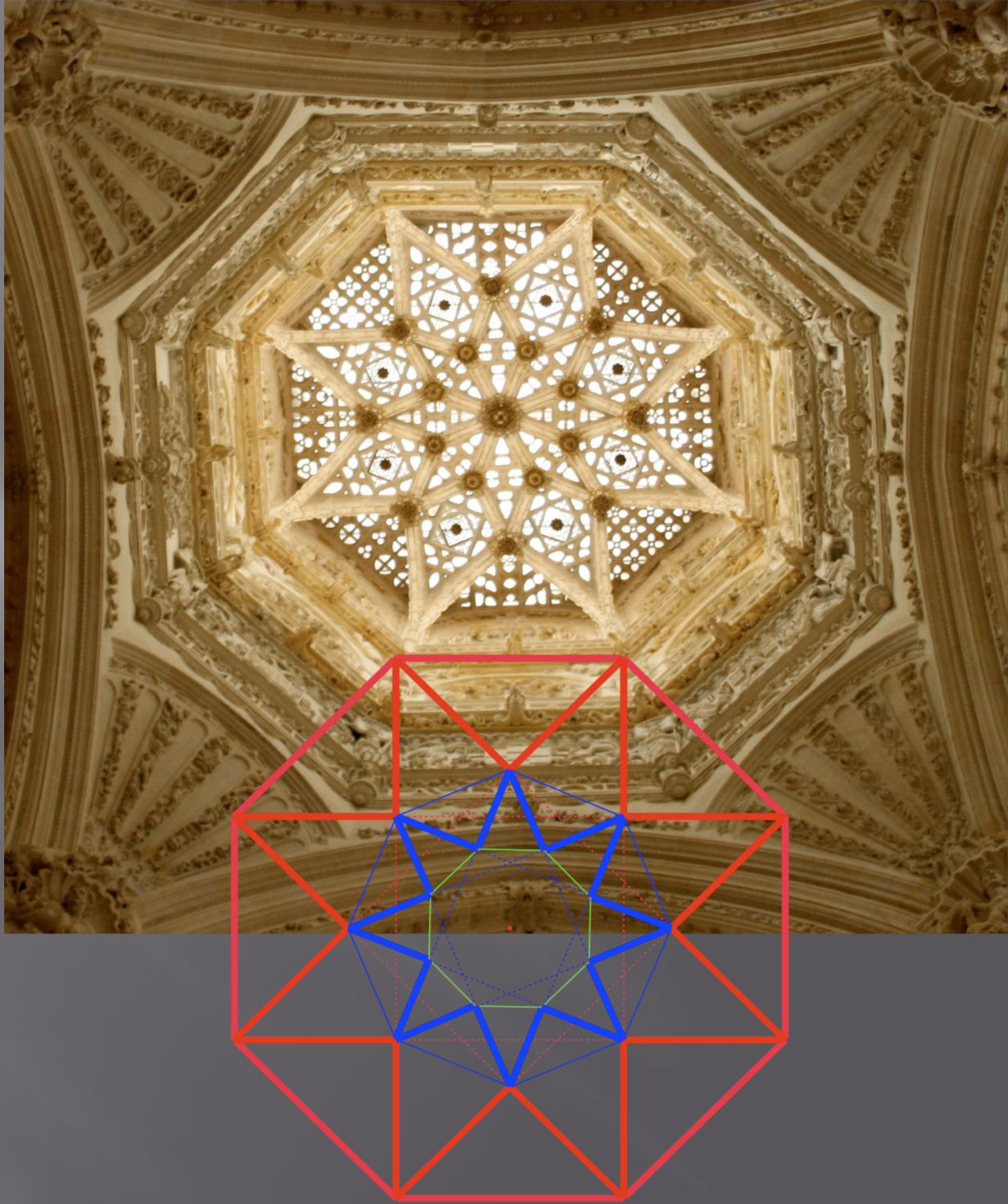
Es la primera bóveda/cúpula* calada que aparece en el gótico en Europa.

Dibuja dicho polígono con la triangulación central que presenta. Calcula la medida de los ángulos de dicho triángulo y la de los ángulos interiores del polígono.

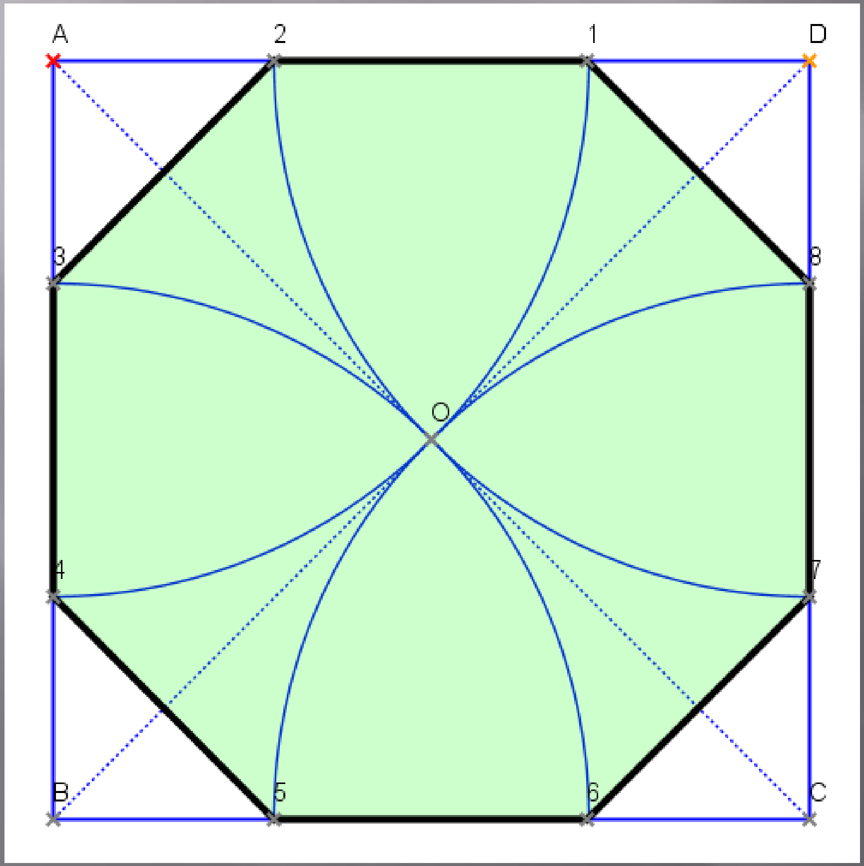
Investiga cuál es la razón entre la longitud de los lados de la estrella de ocho puntas y la de los lados del octógono regular

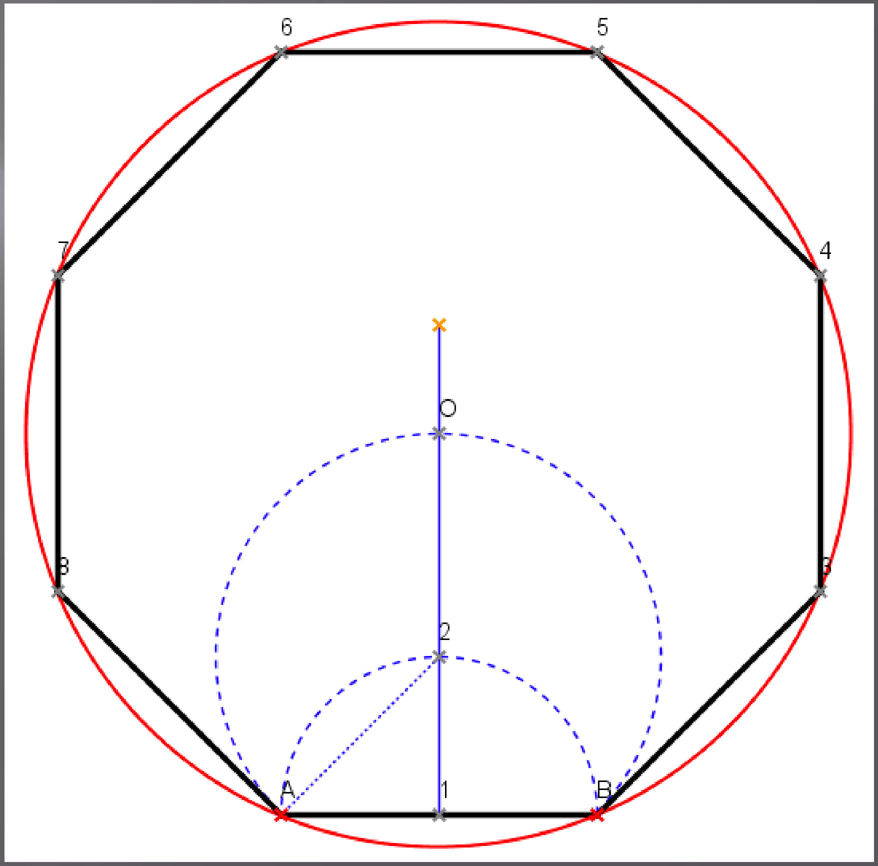
III
EL CIMBORRIO

- Construcciones con regla y compás de figuras geométricas presentes en el cimborrio: octógonos, polígonos estrellados.
- Polígonos equivalentes y equicompuestos.
- Disecciones en polígonos.
- Trabajo con proporciones en polígonos.



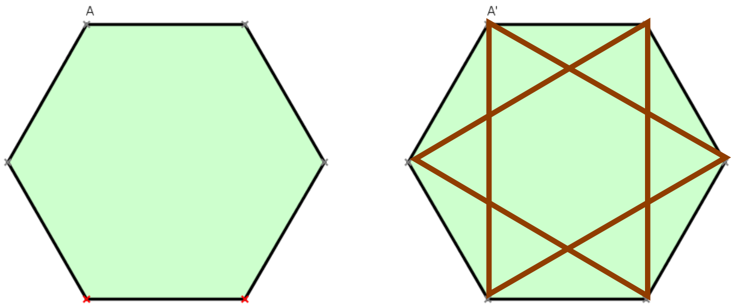
Dos maneras de construir un octógono regular.
Una se denomina “corte sagrado” (¿?)



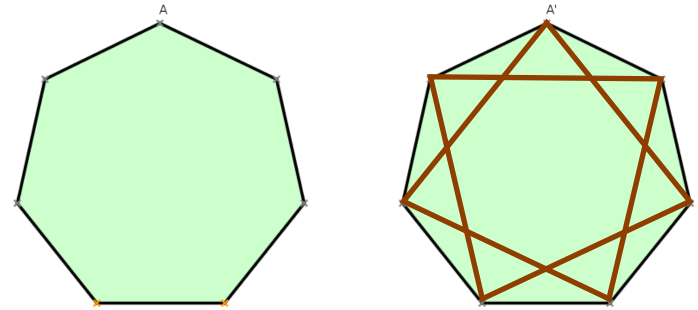


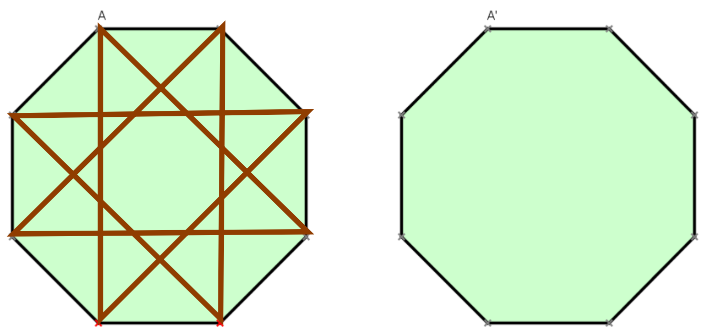
Construcción de POLÍGONOS ESTRELLADOS y ESTRELLAS a partir de polígonos

Un hexágono

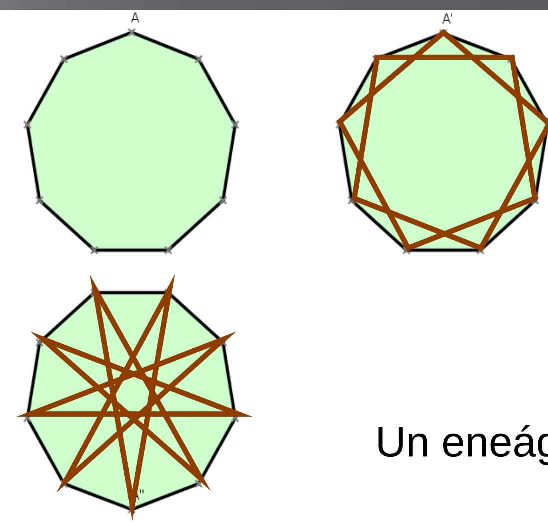


Un heptágono





Un octógono

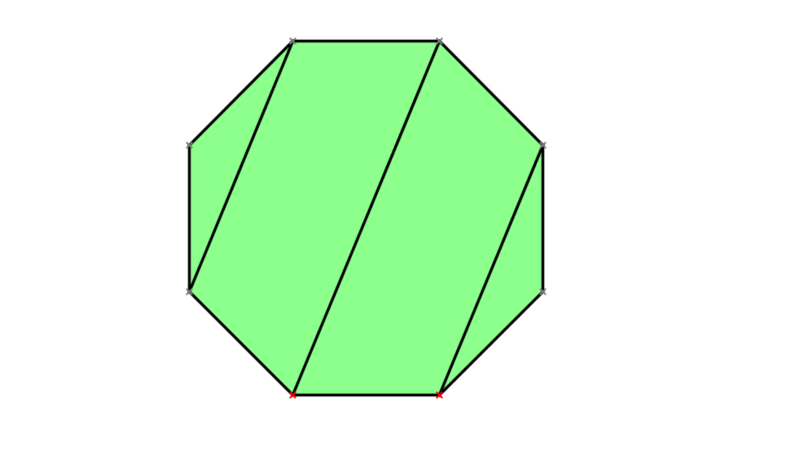


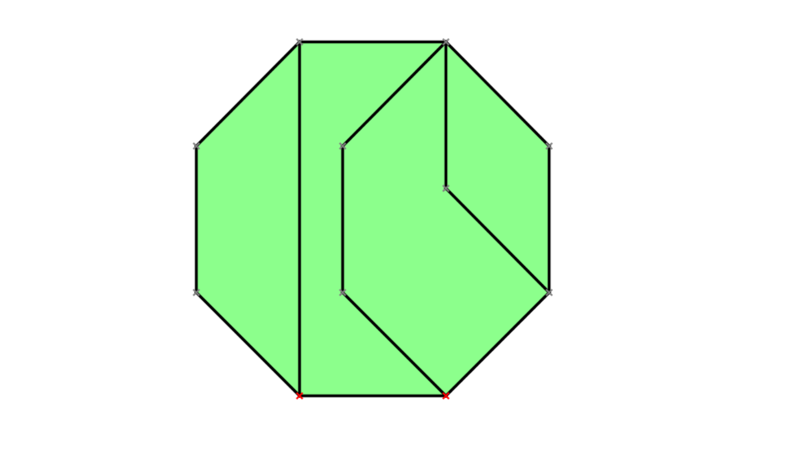
Un eneágono

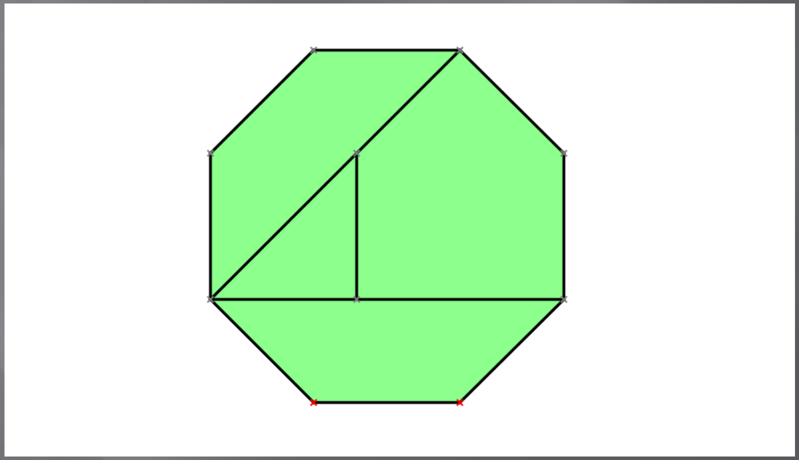
¿Alguien me sabe decir cuáles son de un tipo y cuáles de otro?

¿Cuál es la diferencia? ¿HAY MÁS POSIBILIDADES?

Disecciones de un octógono en cuatro piezas para formar un rectángulo. ¿Se ve?







Trabajamos con estos y otros polígonos

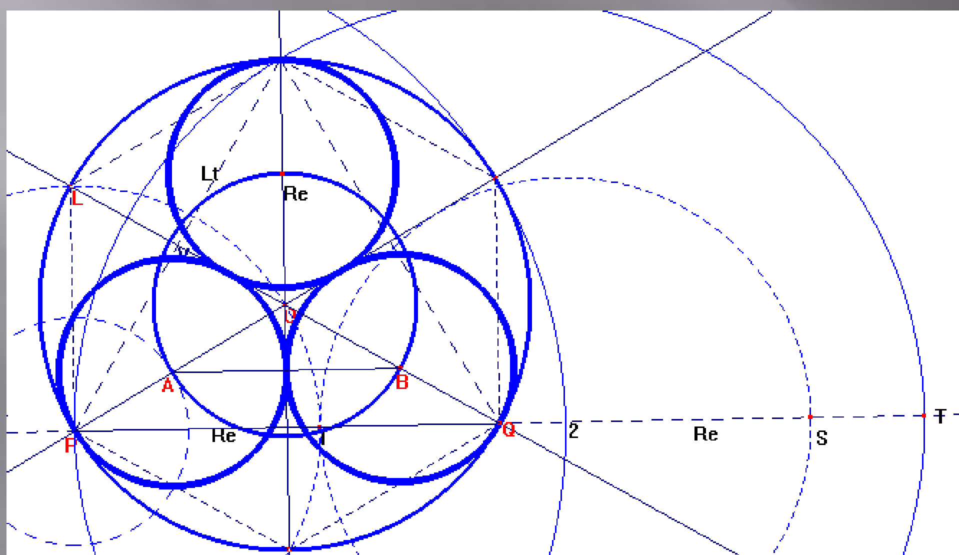
Capilla de la Presentación

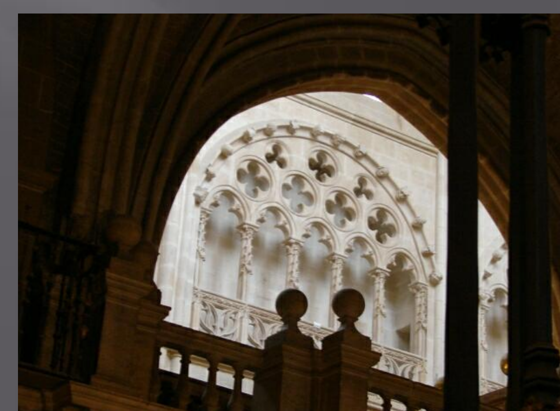
V

ROSETONES

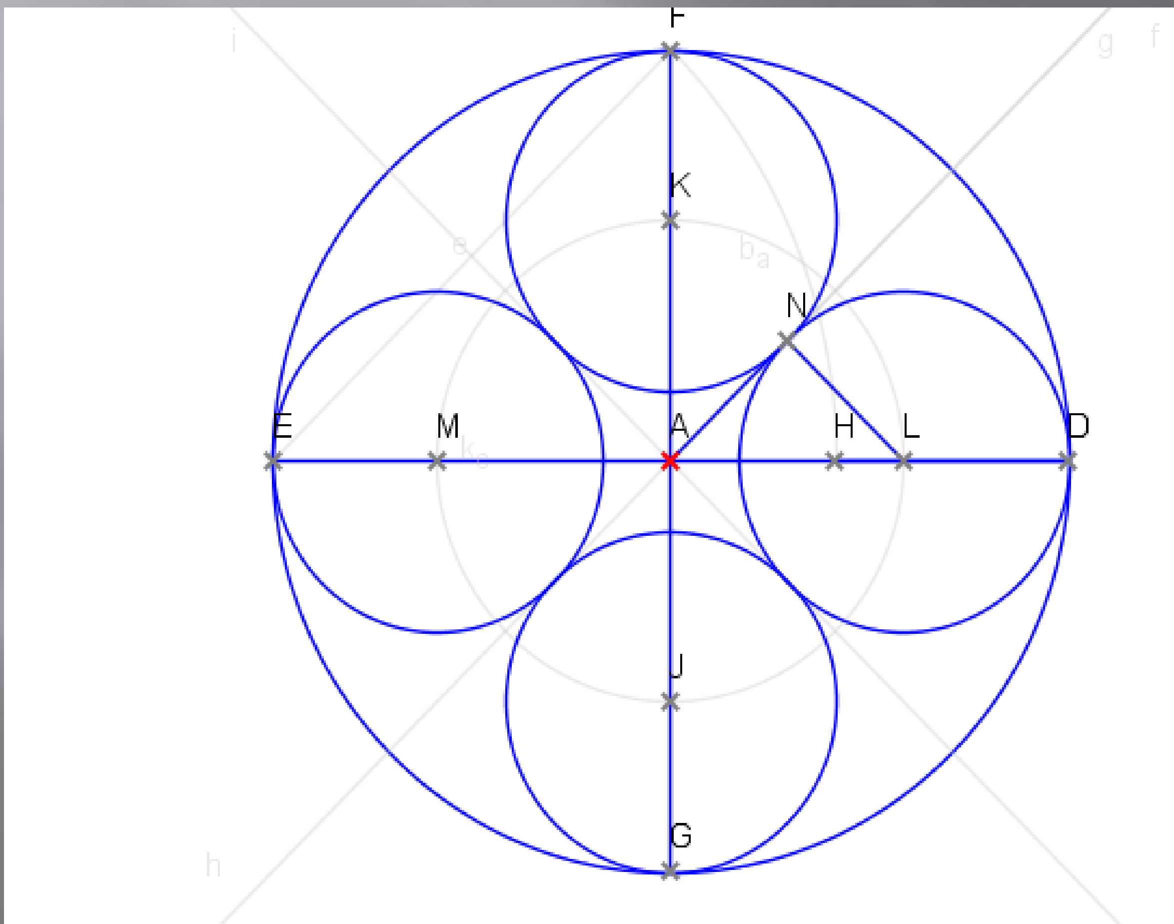
Distribuidos por toda la Catedral de Burgos podemos encontrar rosetones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y 20 pétalos:

Rosetón de 3 pétalos

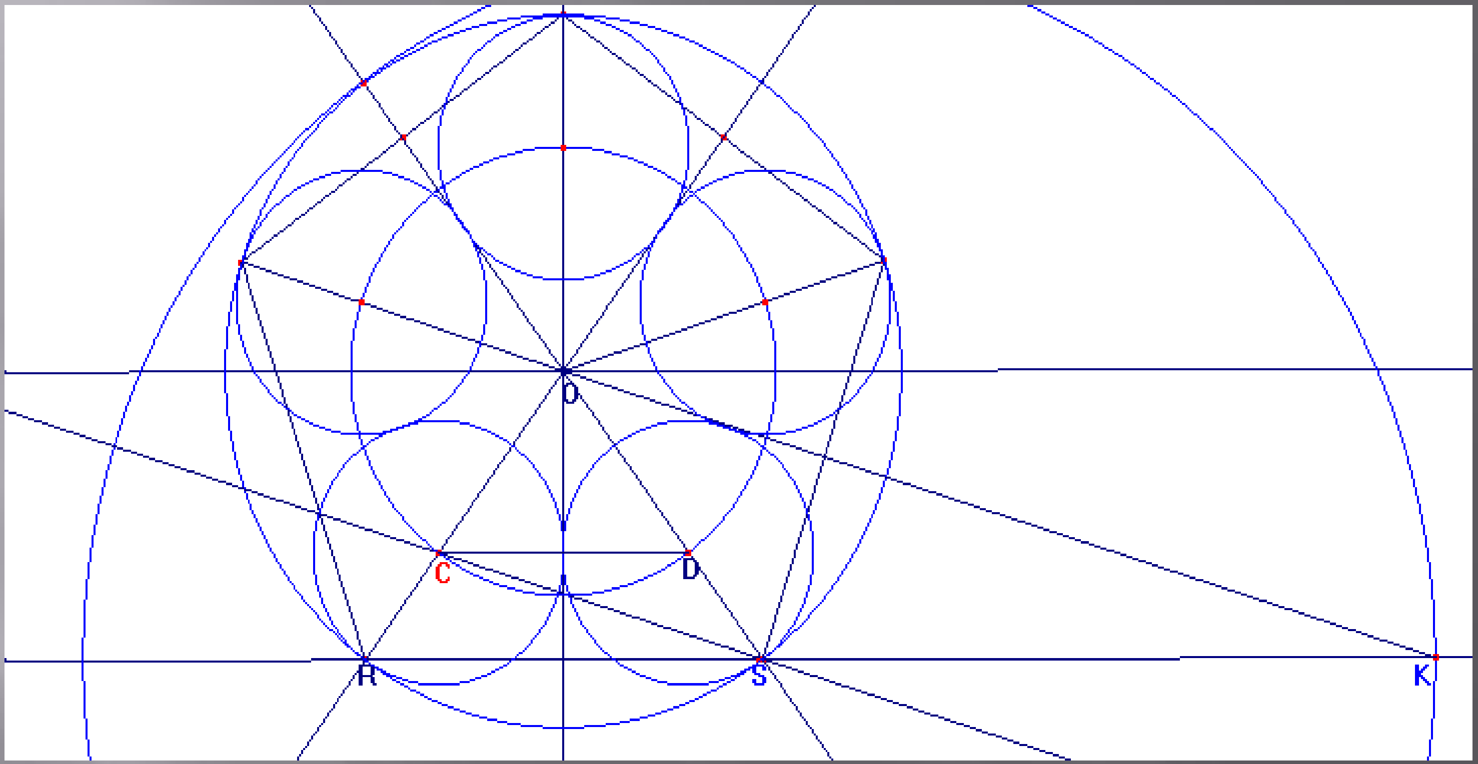




Rosetón de 4 pétalos



Rosetón de 5 pétalos

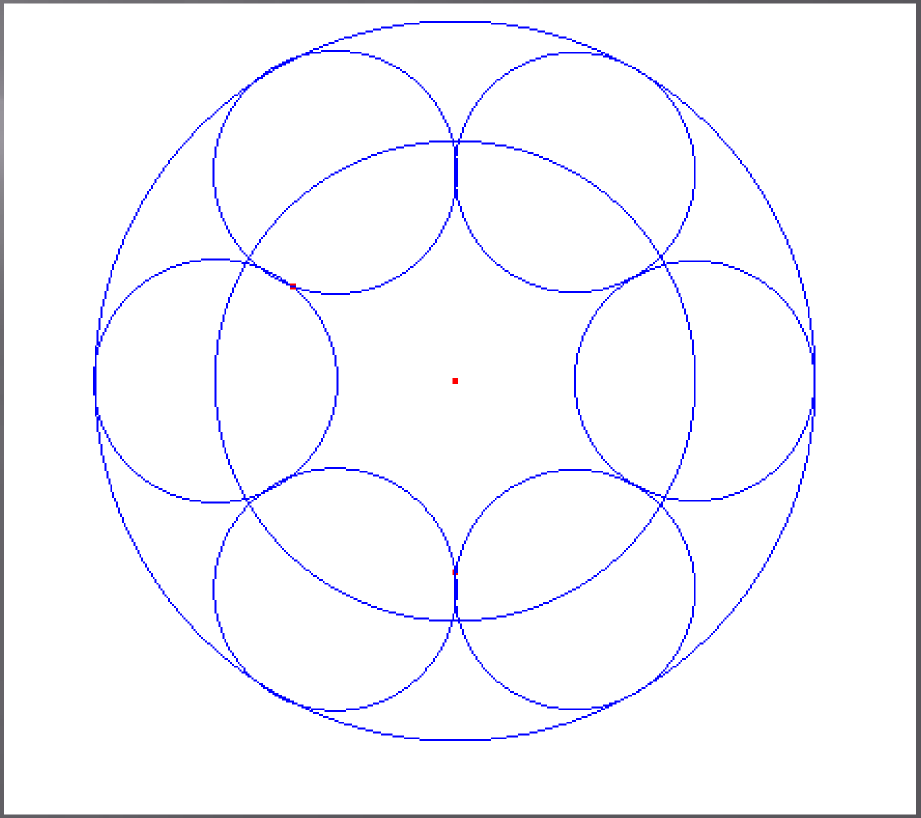


Actividad

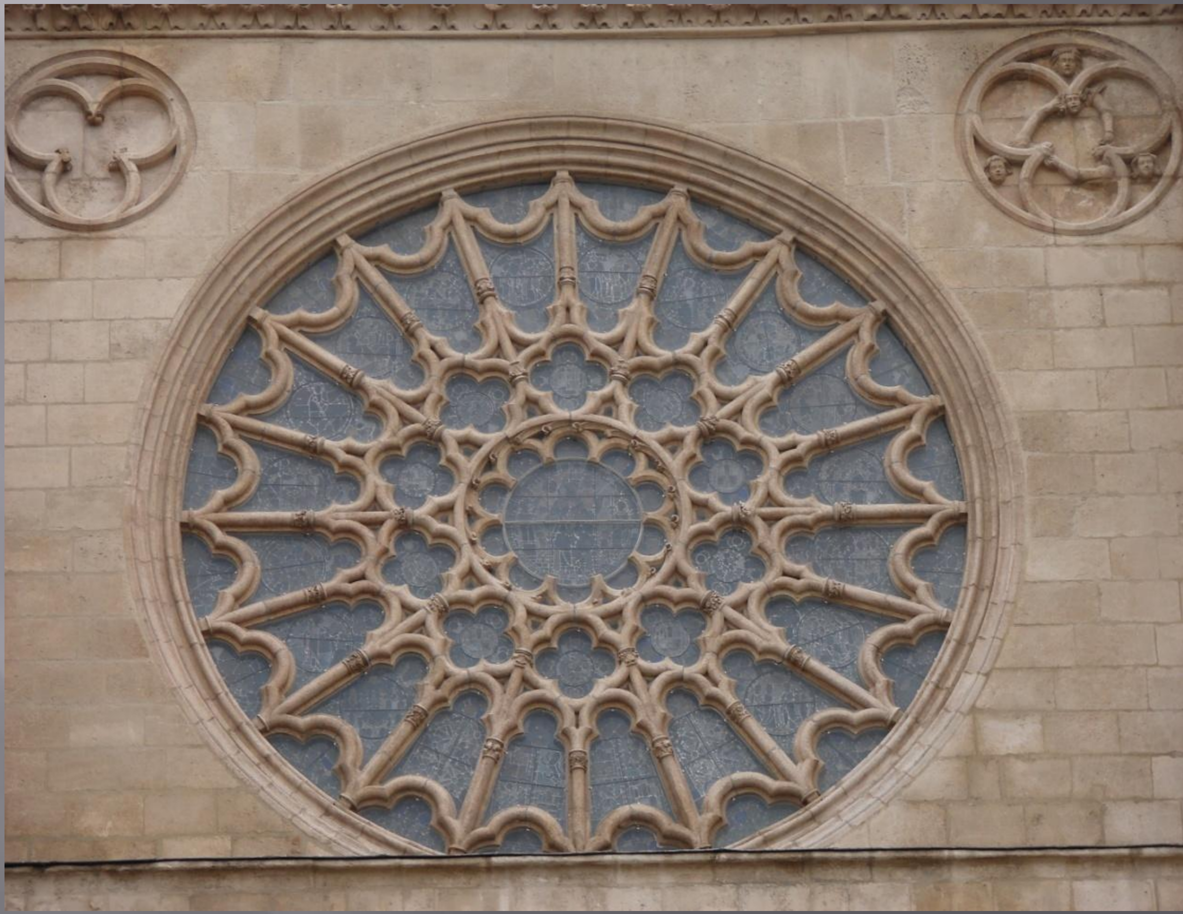
Demuestra que el cociente entre una diagonal y el lado de un pentágono nos conduce al número de oro (φ=1,618...).

Difícil de dibujar y ¿de ver?
¿Alguien ve un pentalóbulo?

Rosetón de 6 pétalos

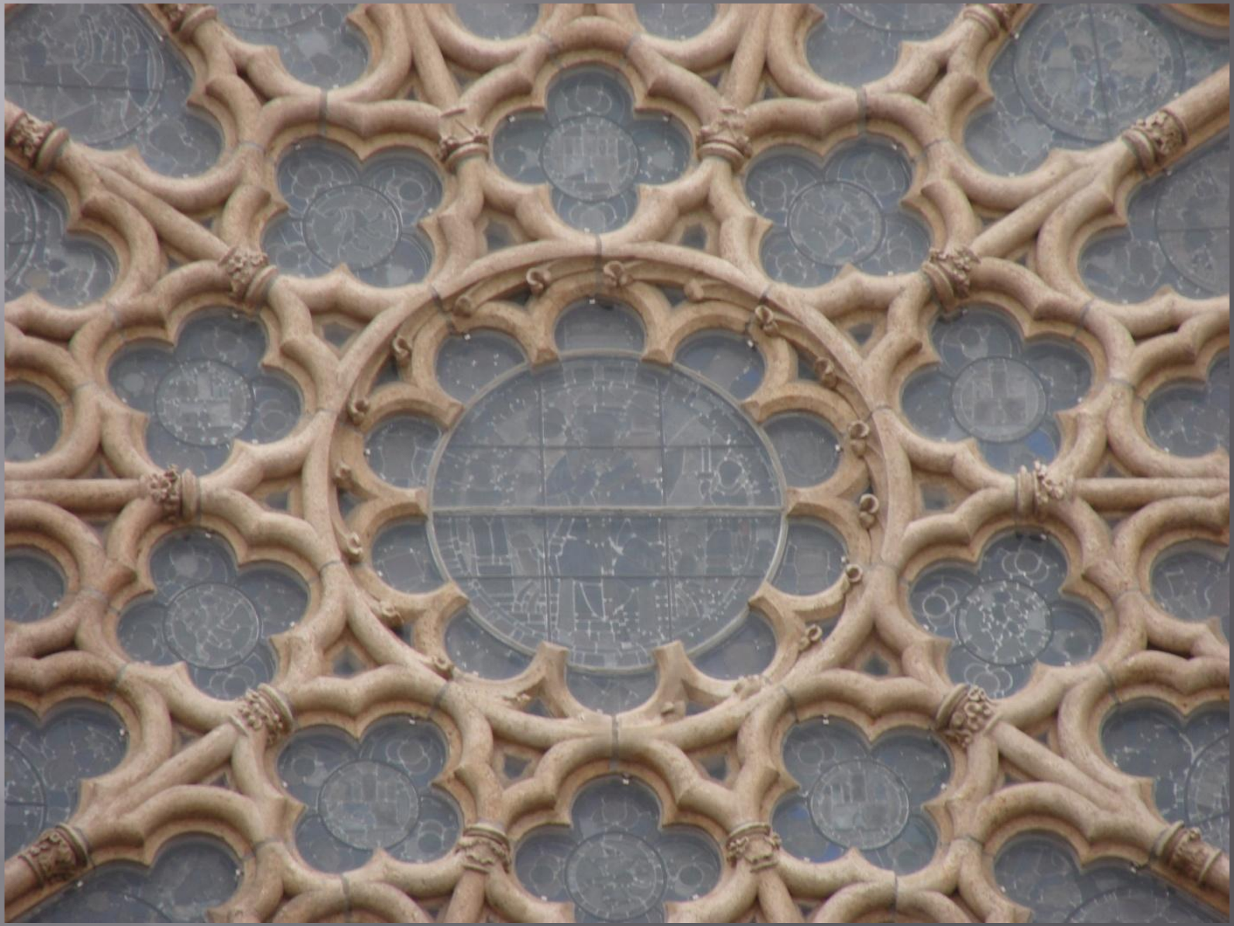


ROSETÓN DE LA PUERTA DEL SARMENTAL

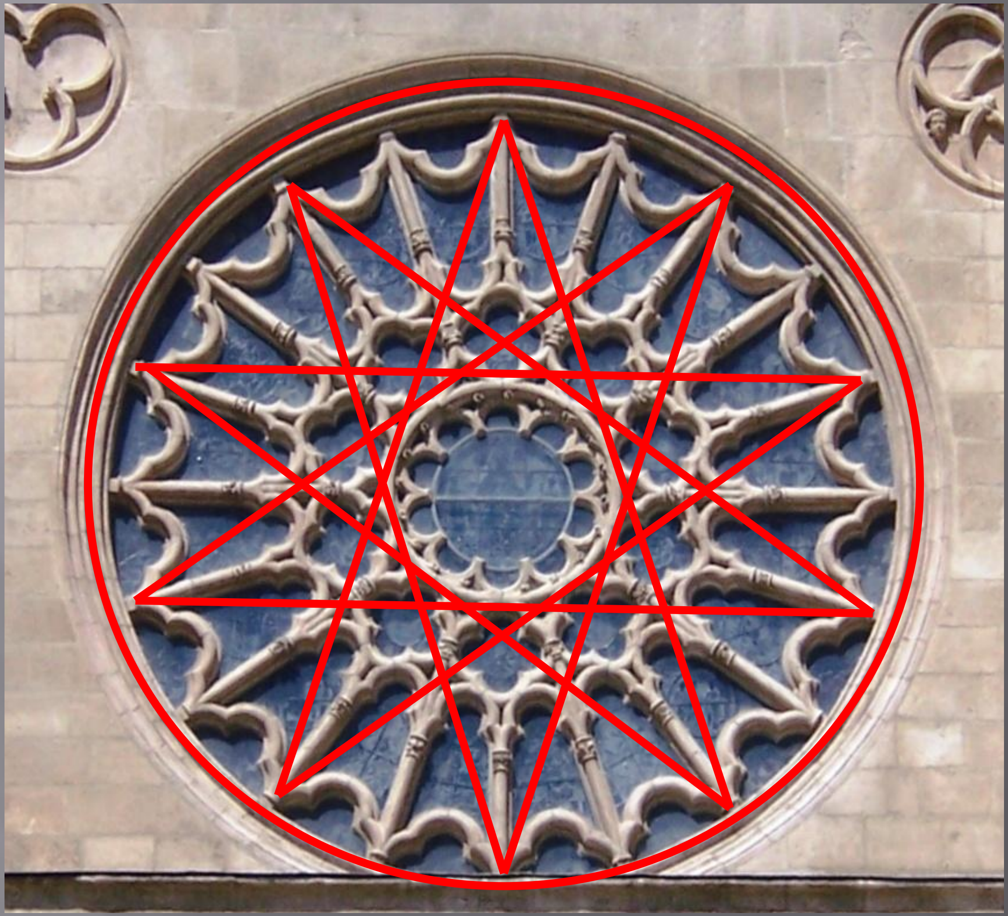


En detalle

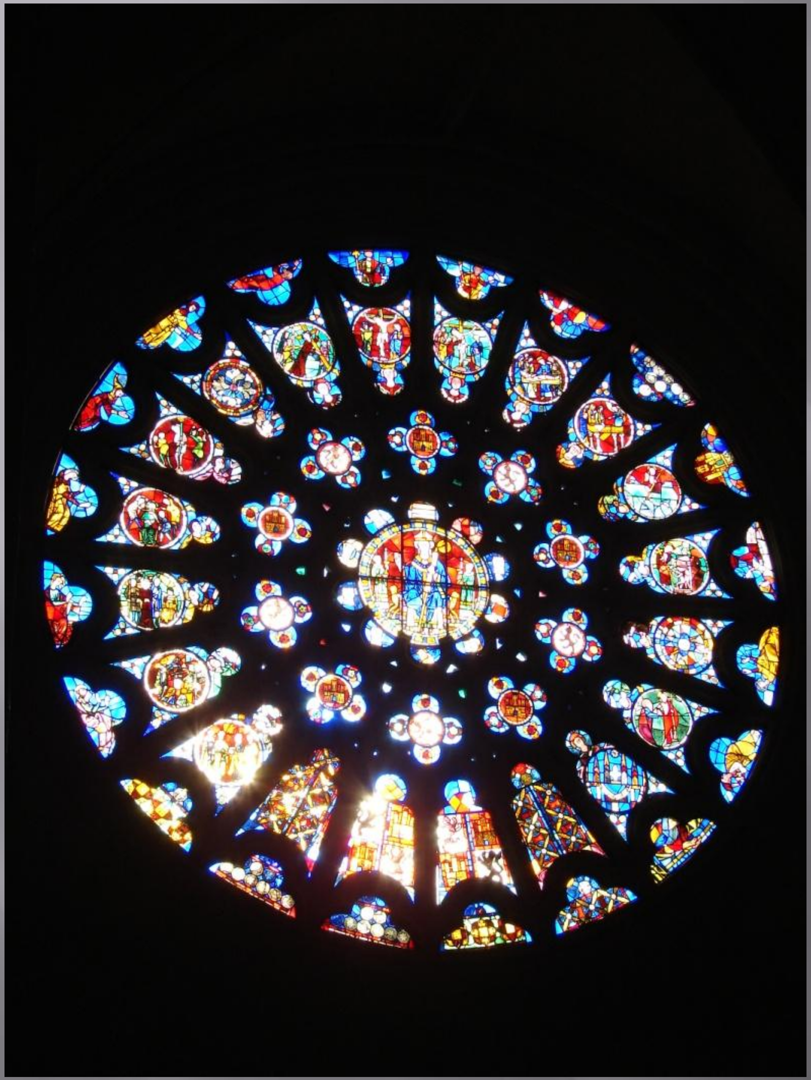
ROSETÓN CENTRAL DE 10 PÉTALOS



RODEADO DE ROSETONES DE 4 PÉTALOS O TETRALÓBULOS

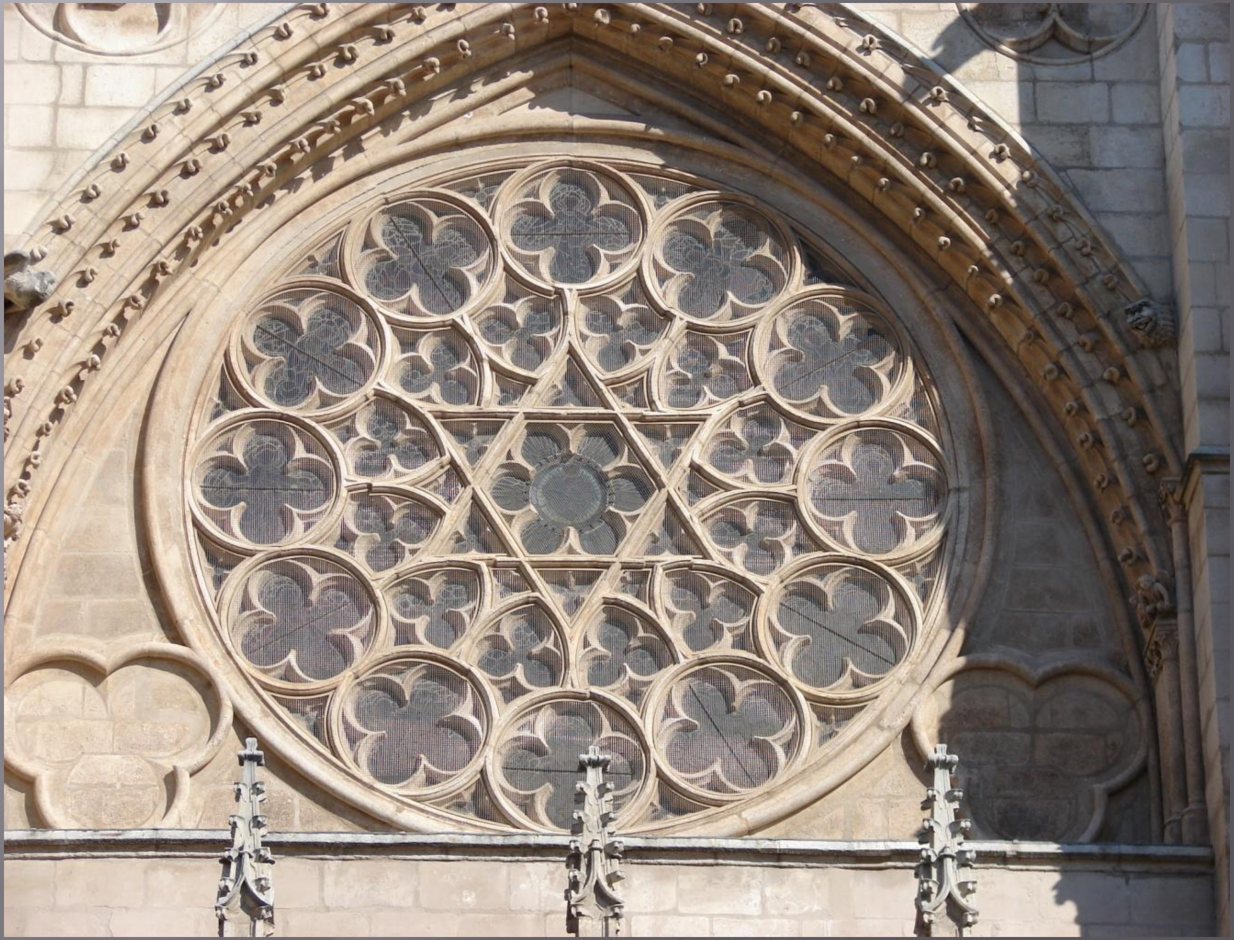


Sobre el rosetón de la siguiente imagen hemos dibujado un polígono estrellado. ¿Cuál es? ¿Qué es un polígono estrellado? ¿10/4?



- ¿Qué observas al mirar detenidamente este rosetón?
- ¿Cuántas “capas” tiene?
- ¿Cuántas figuras adornan cada capa?
- Observa los círculos interiores

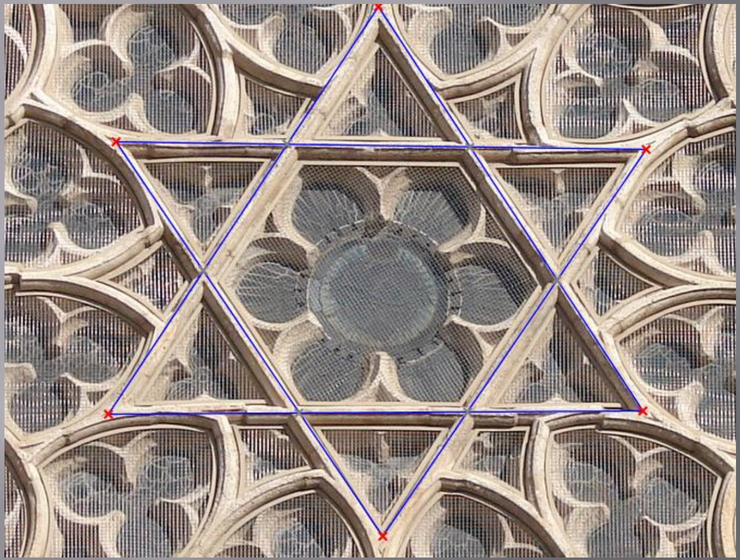
ROSETÓN DE LA PUERTA DE SANTA MARÍA

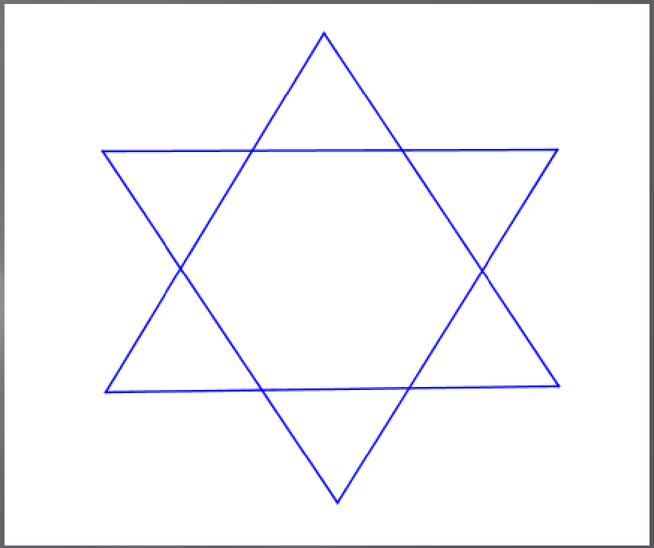


TIENE EN SU CENTRO UN HEXAGRAMA O ESTRELLA DE DAVID (¿polígono estrellado?).

TAMBIÉN APARECEN TRILÓBULOS, TETRALÓBULOS ...

Utilizando los conocimientos que has adquirido con los rosetones más sencillos, ¿serías capaz de, construir con un programa de geometría, la figura central, es decir el hexagrama y el rosetón 6p o hexalóbulo que contiene?



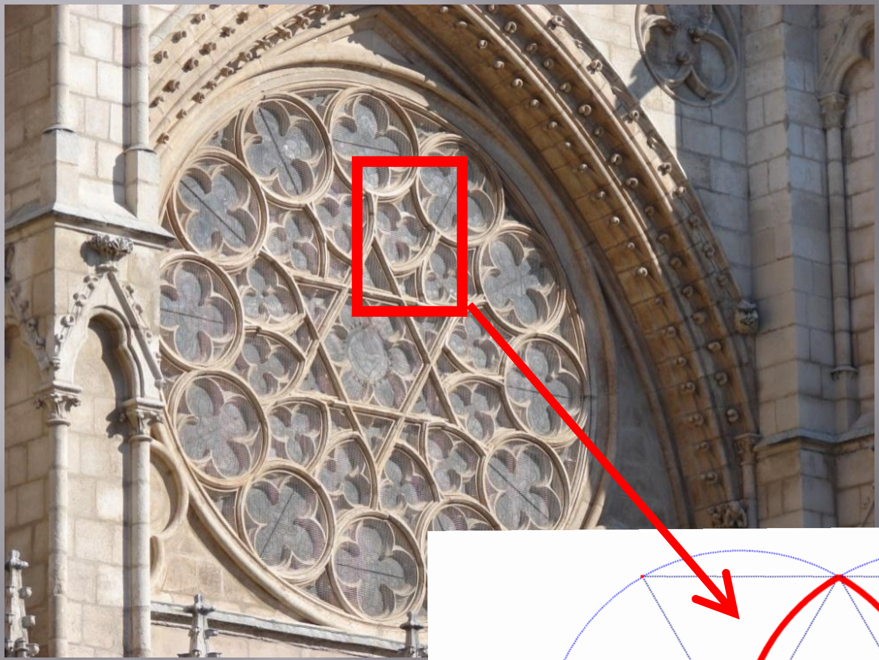


ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN:

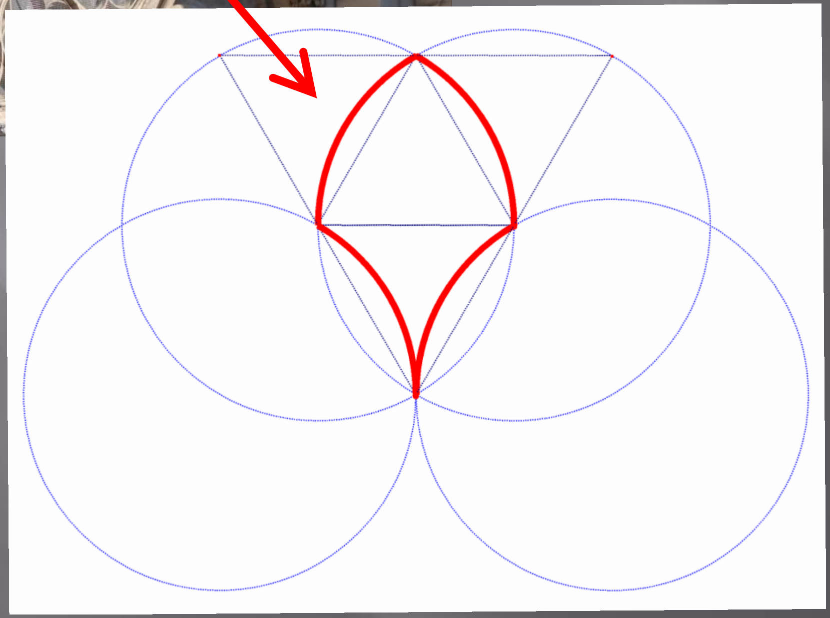
Investiga por qué no existen rosetones de 7 pétalos.

Investiga por qué no aparecen los rosetones de 15 y 17 pétalos.

EL PÉTALO NAZARÍ

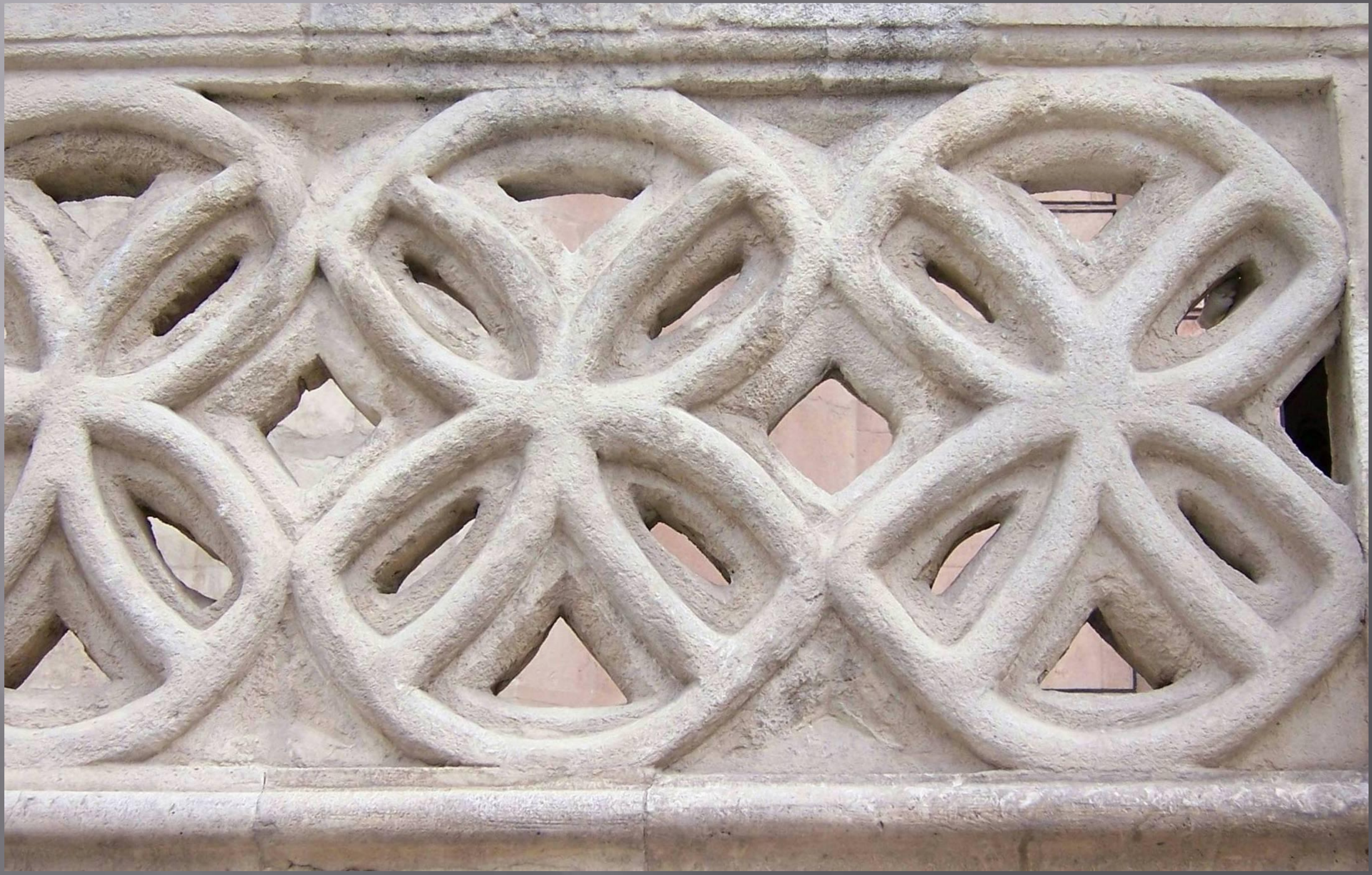


Mosaicos



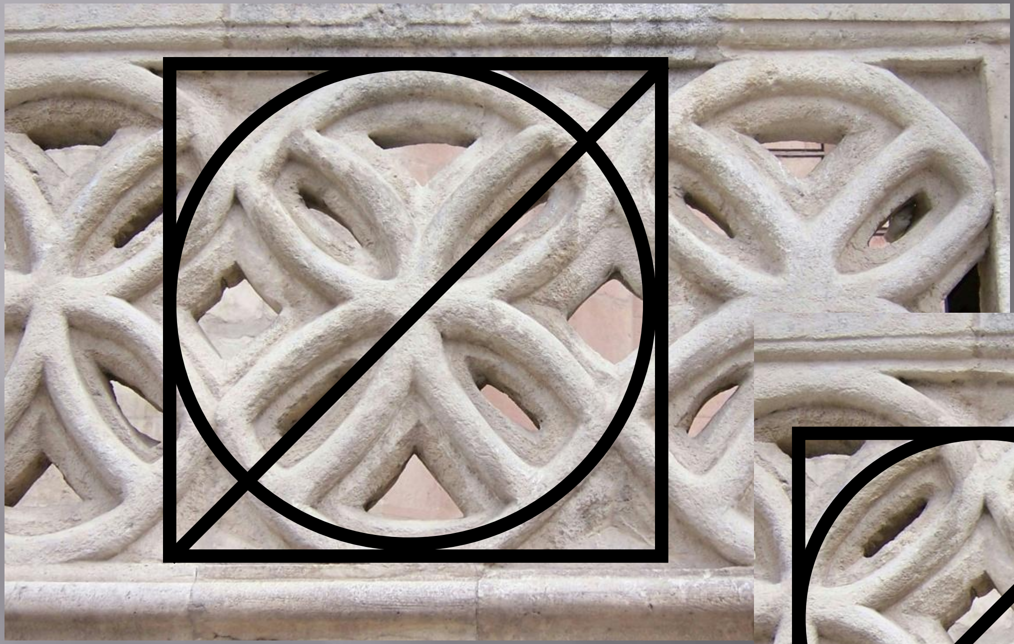
Recubrimientos periódicos

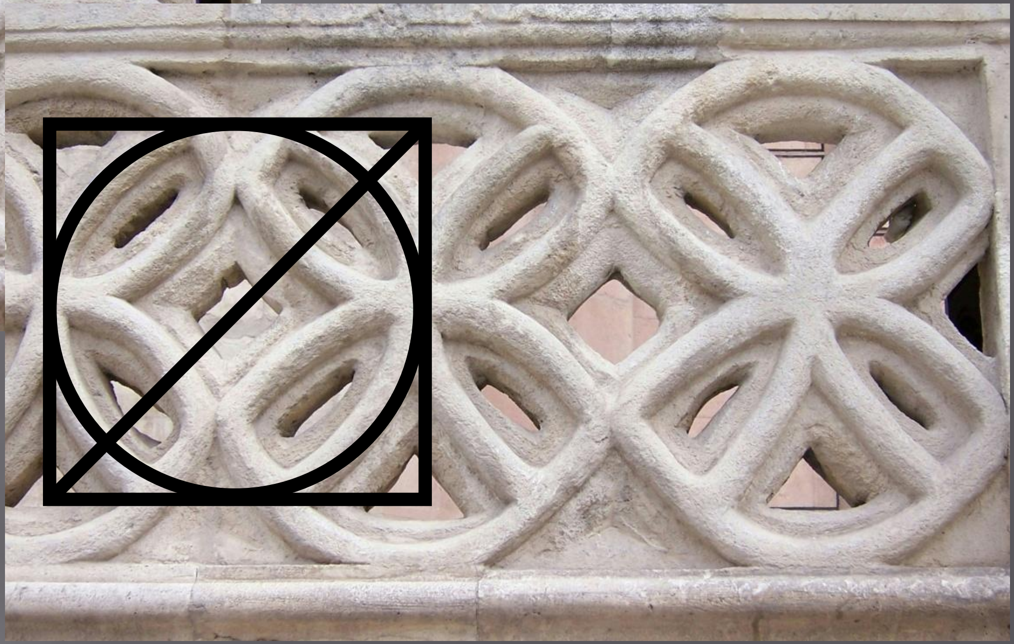
VI LA BARANDILLA DE LA FACHADA PRINCIPAL



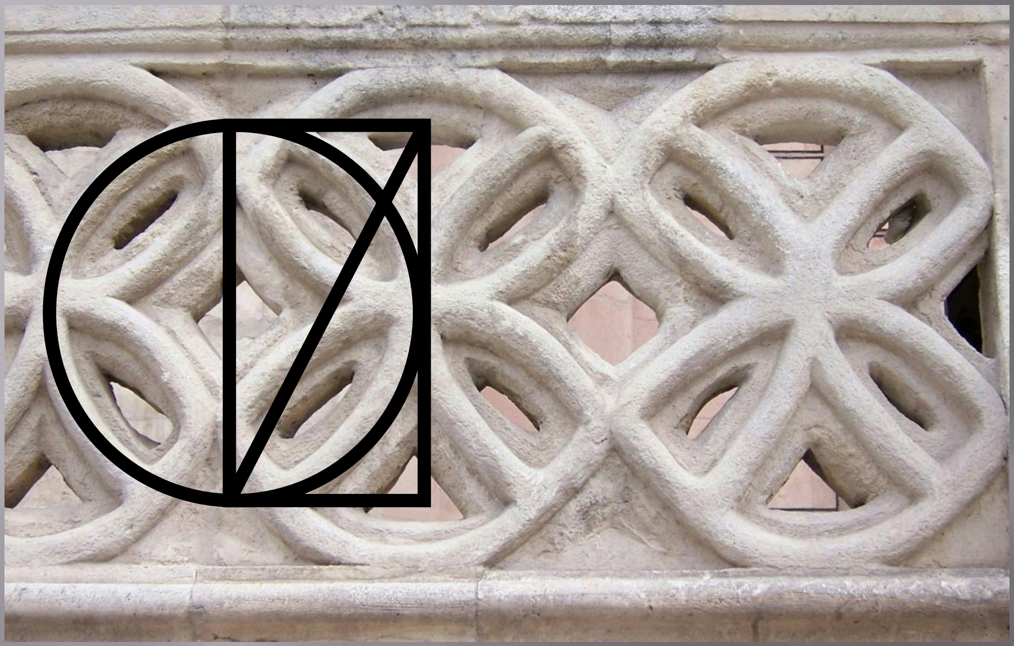
LA DIAGONAL

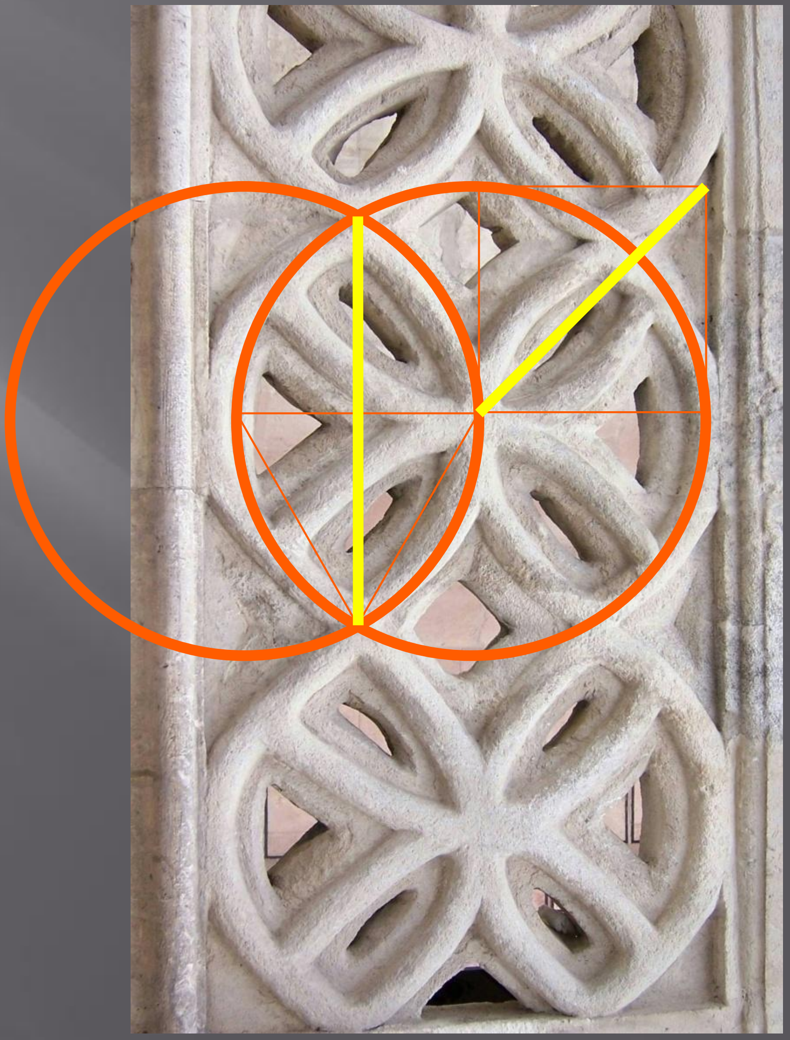
DEL CUADRADO... x2





LA DIAGONAL DE UN RECTÁNGULO



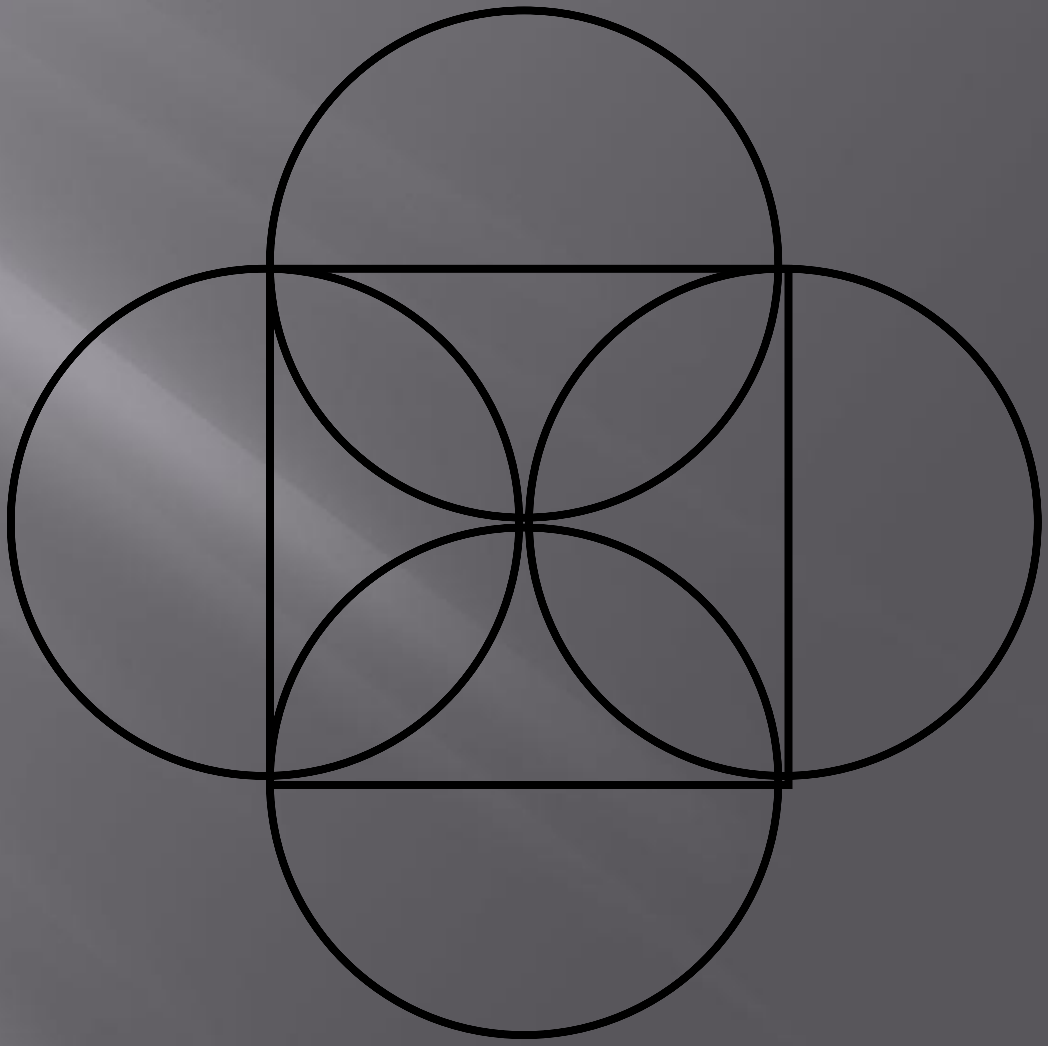


NÚMEROS
DINÁMICOS

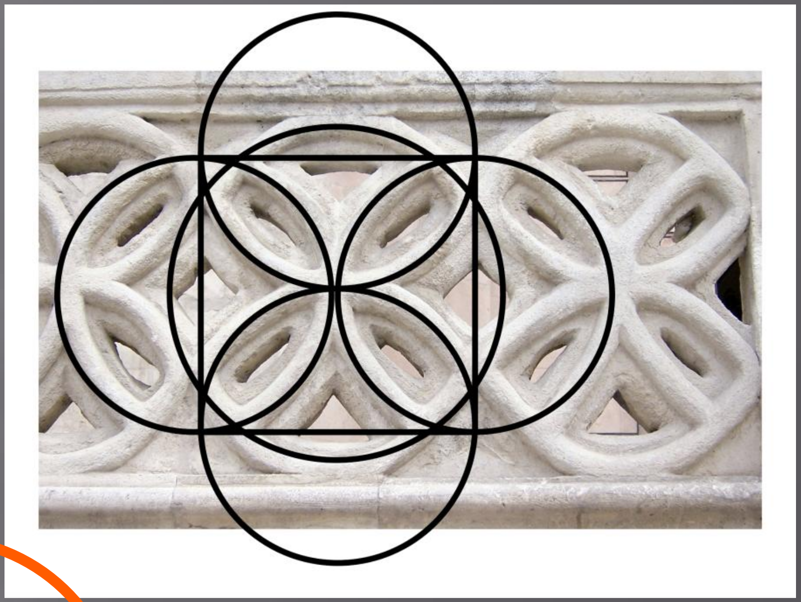
Una aproximación al modelo matemático

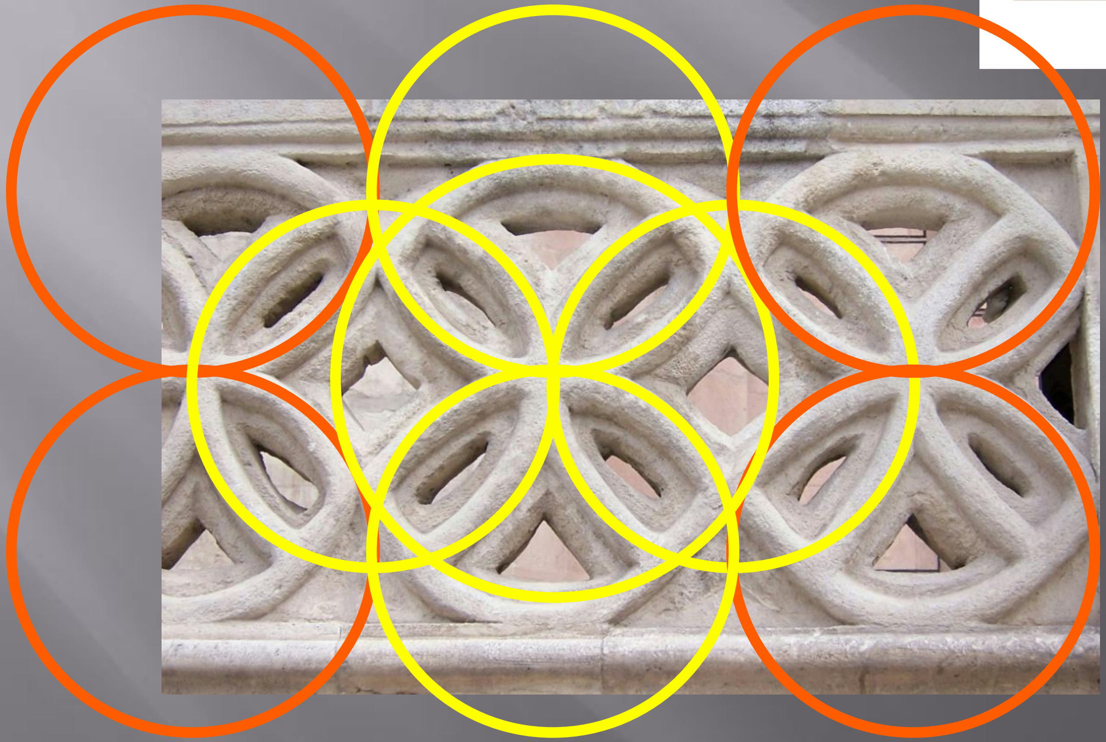
Si el radio de las circunferencias mide r=1, calcular el área de cada uno de los cuatro pétalos que se forman dentro del cuadrado.

Hacer lo mismo si el radio mide una longitud cualquiera “r”.



Descubrir el Modelo Matemático





LAS MATEMÁTICAS…

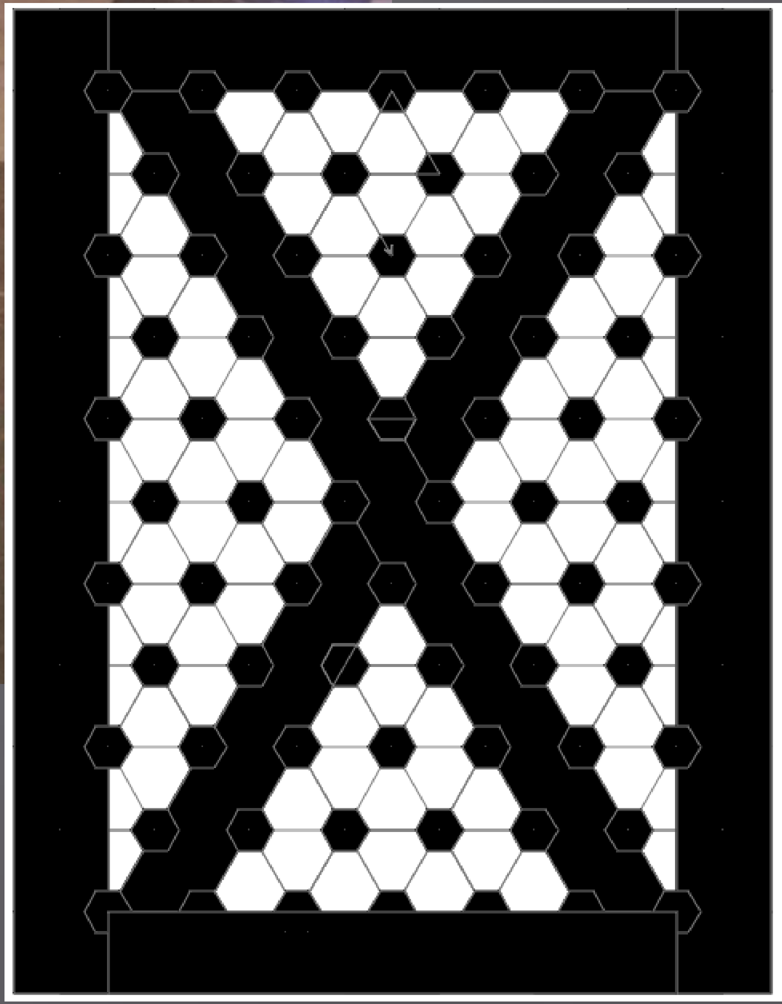
y

VII

POR LOS SUELOS

¿Alguien se ha fijado en este suelo?

¿Hay matemáticas en el?



¿Vemos por dónde pisamos?

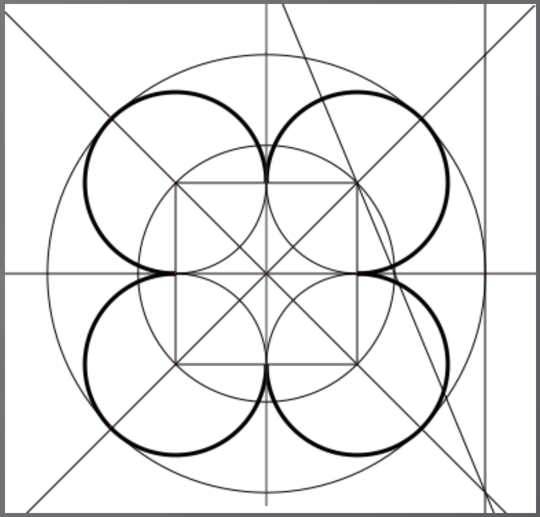
En el Sarmental equiláteros, pero ¿éstos?

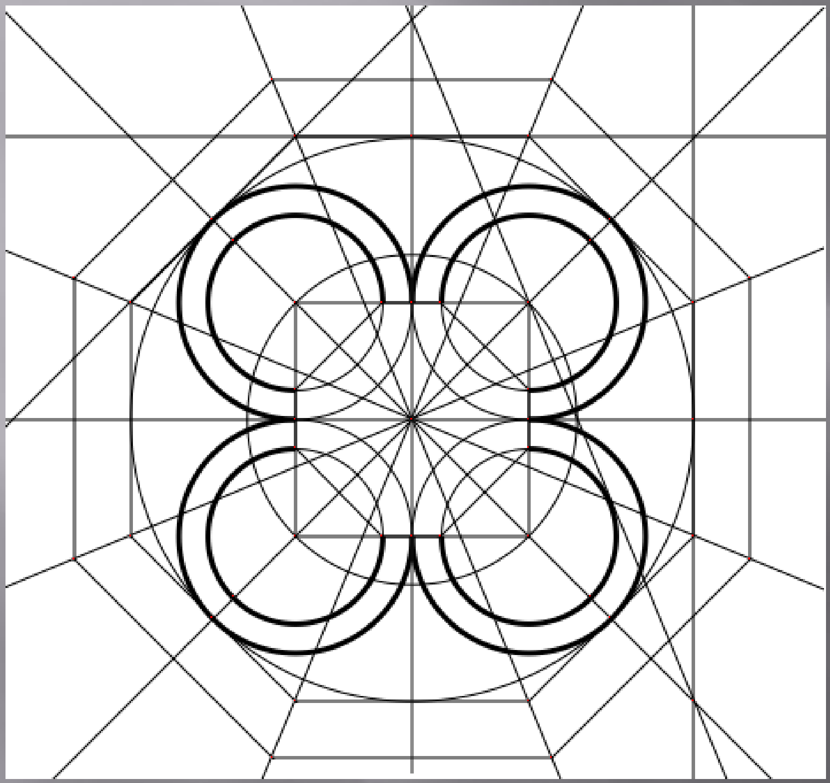
¿Parahexágonos?

Lo del suelo del Coro es...

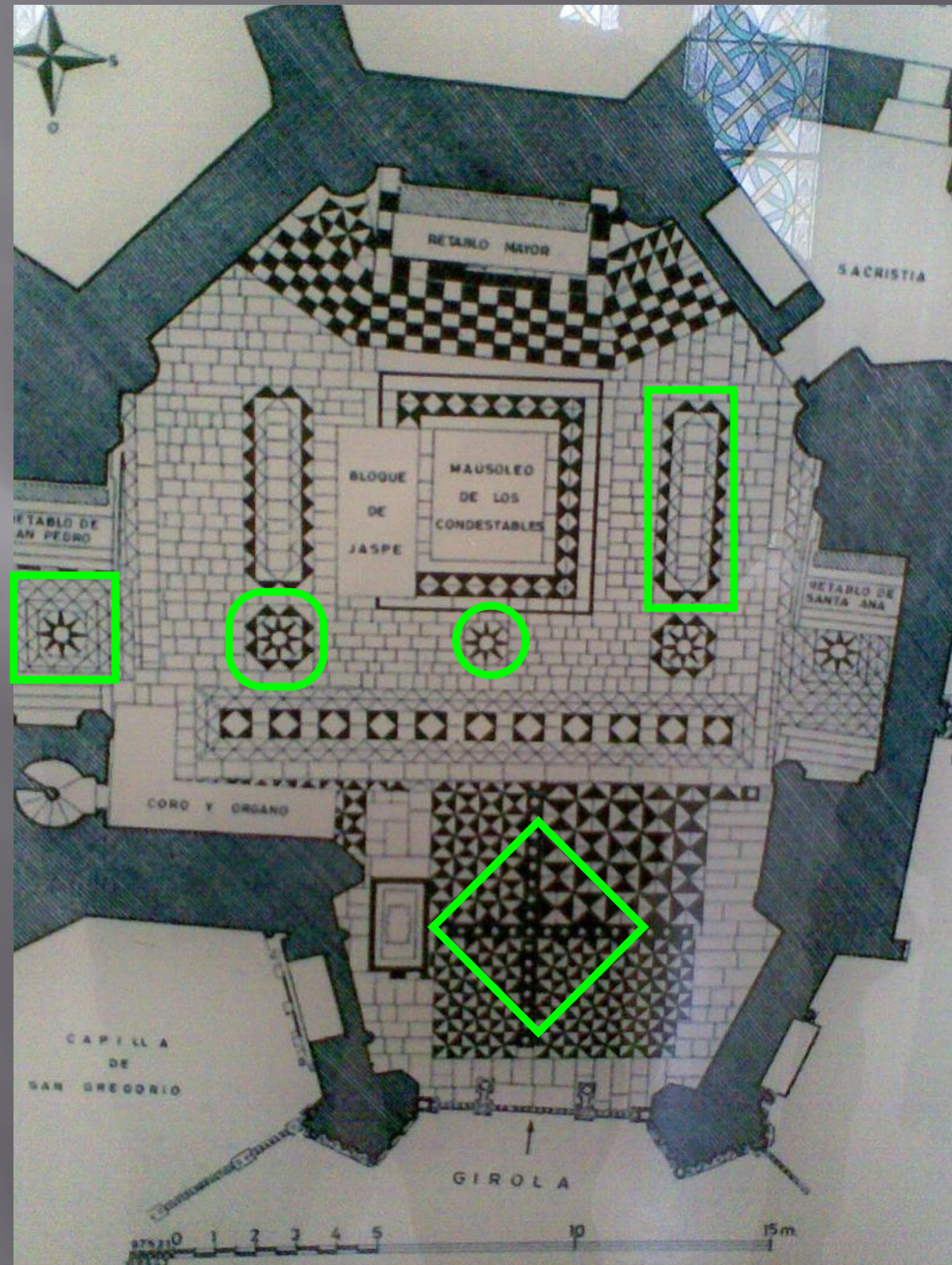
¡Un tetralóbulo!, ¡DE MADERA!

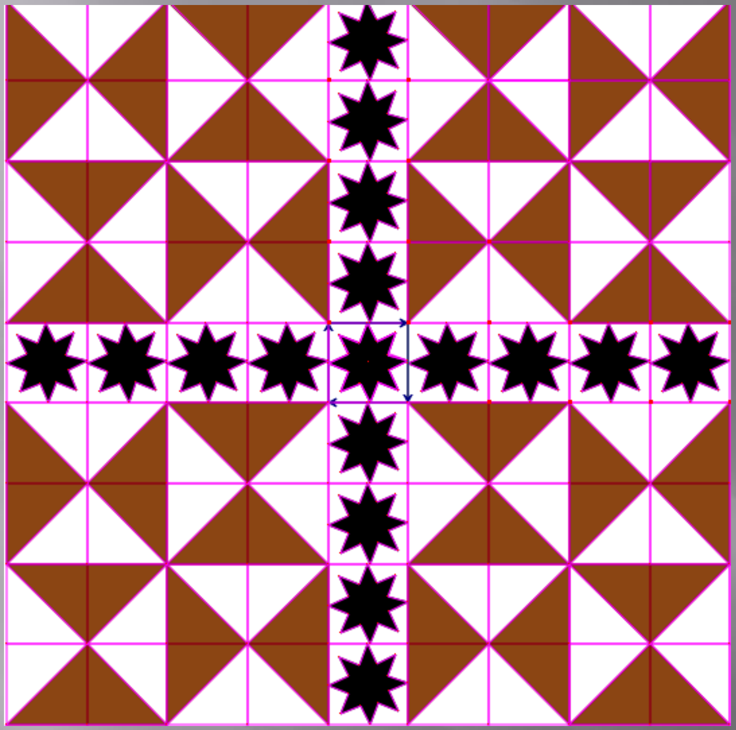
¿Fácil?

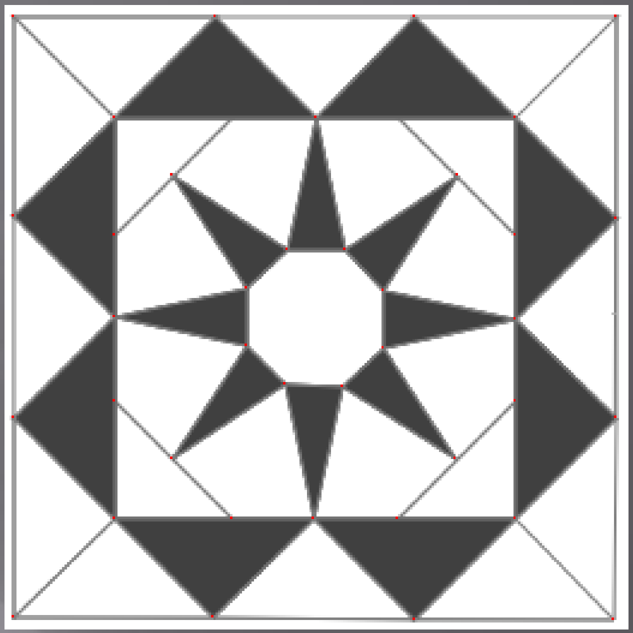


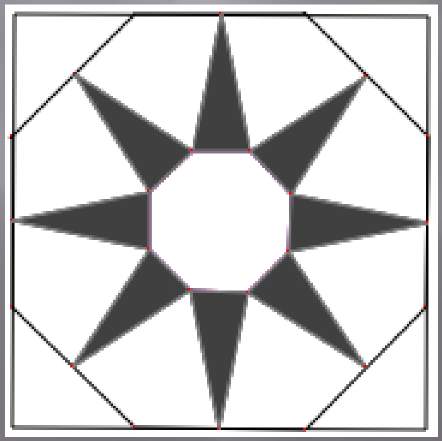


El de la Capilla "de los Condestables"

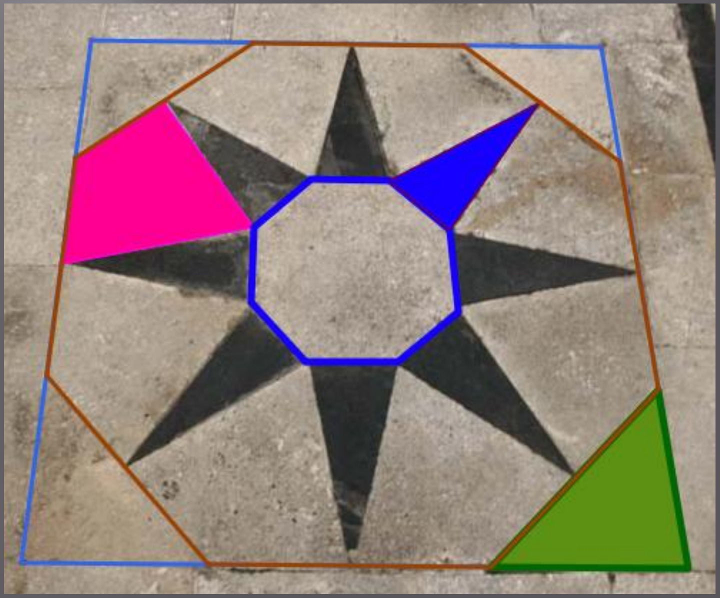


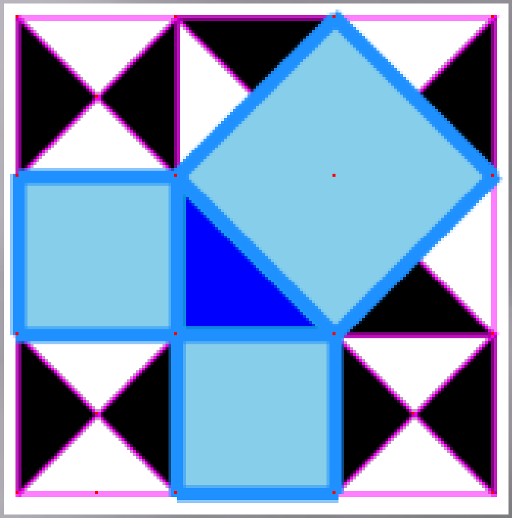






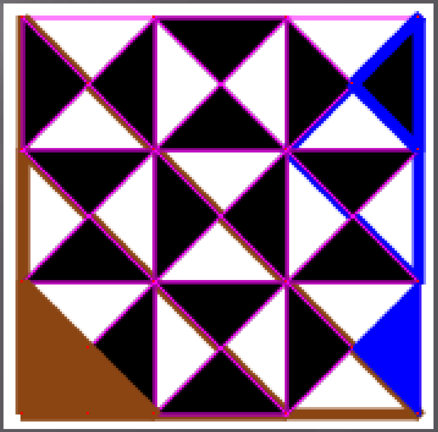
¿Tipos de polígonos?





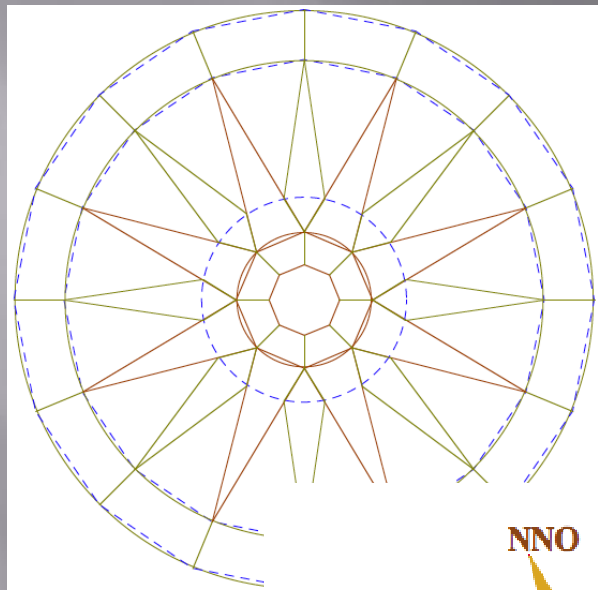
Teorema de Pitágoras ¿en el suelo?

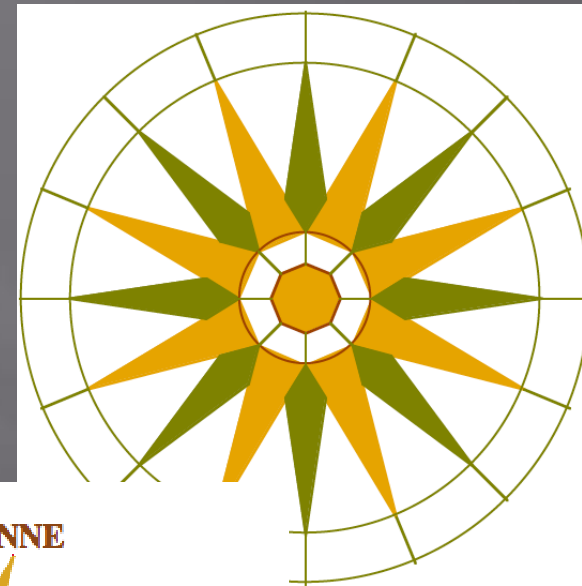
¿También el de Tales?

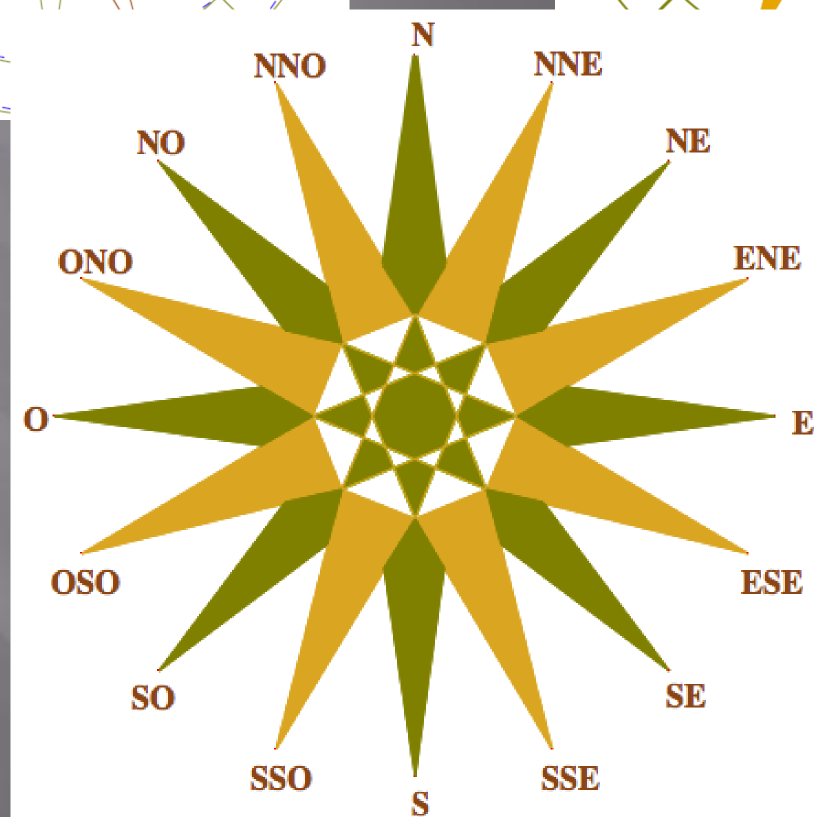


Lo que pisa el entrañable brasero

La rosa de los vientos

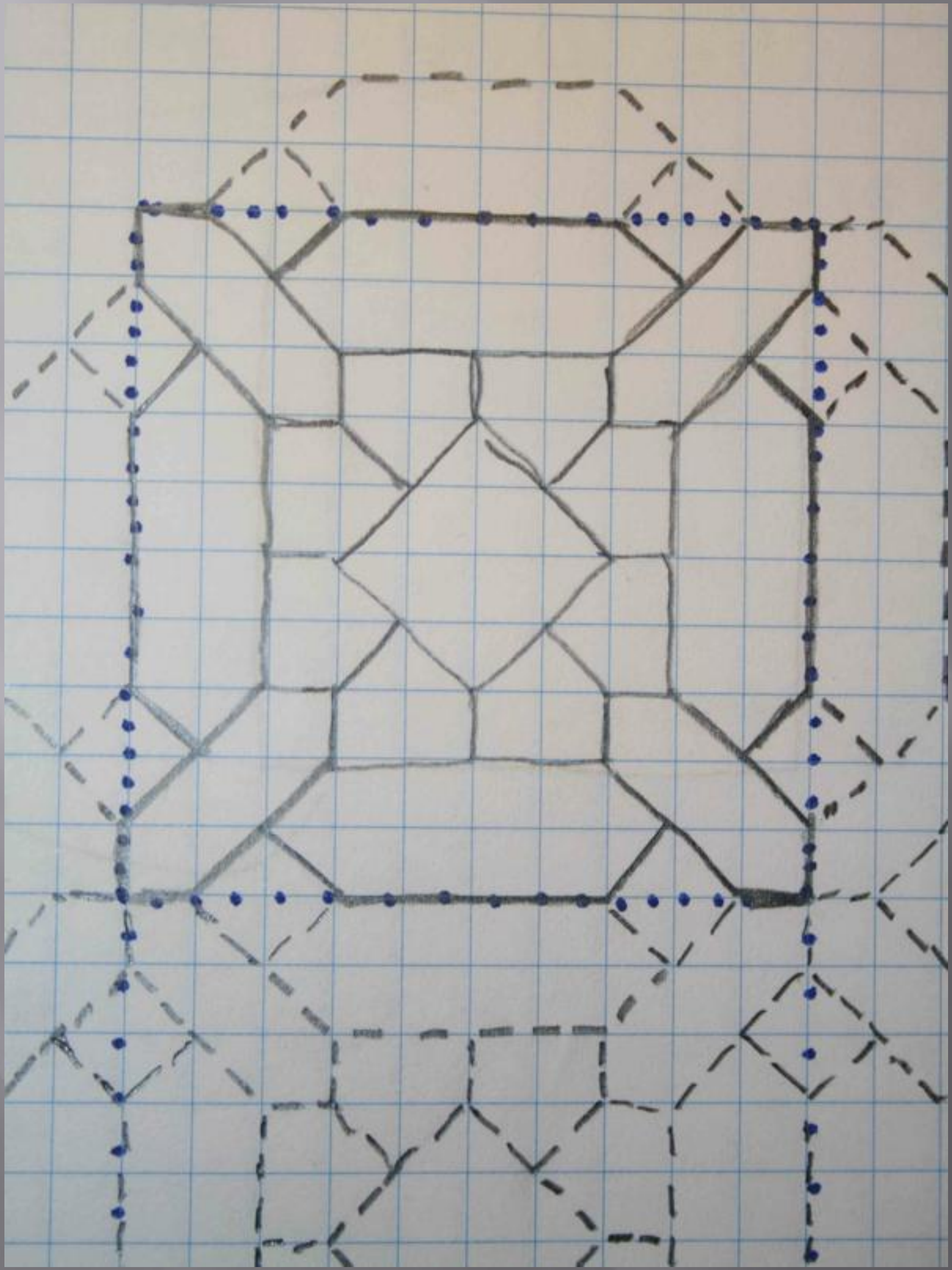




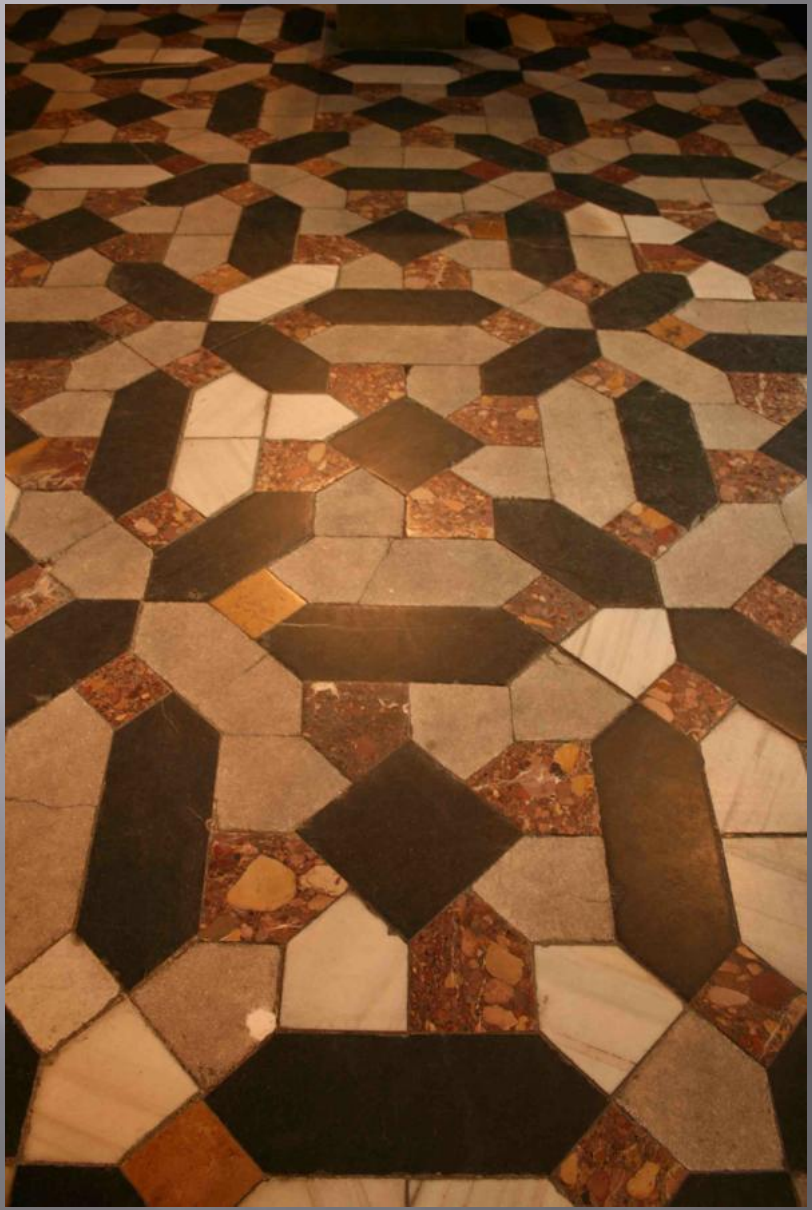


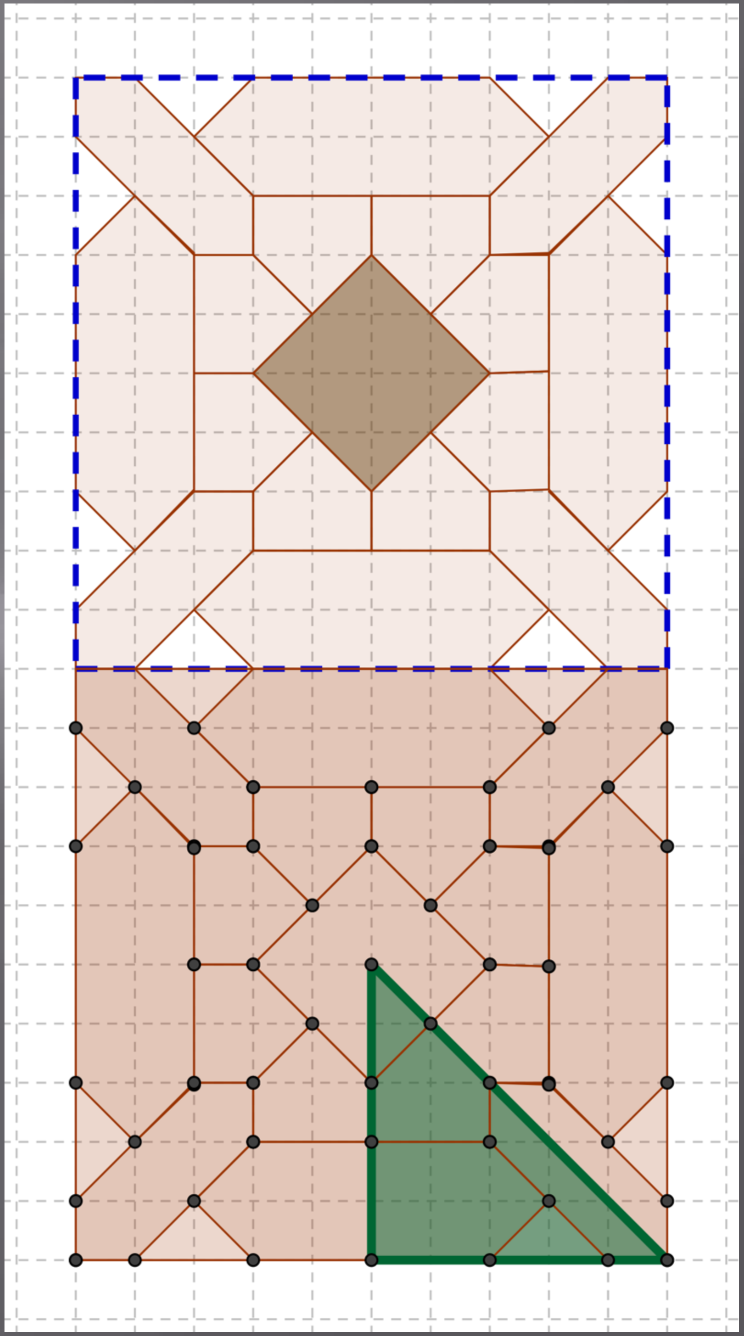
Gran descubrimiento: La capilla de Santa Catalina la de los obispos, la carta de arras del Cid...
¿alguien mira al suelo? Y si mira, ¿ve algo?

¿Alguna regularidad?



Es difícil, los colores engañan...





LUEGO DESPUÉS DE TODA ESTA INFORMACIÓN…..

Y en Castro Urdiales???

EsTalMat
CASTILLA Y LEÓN