

Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica



V Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas IX Reunión Nacional ESTALMAT

Castro Urdiales, 2012

Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

ENRIQUE DE LA TORRE FERNÁNDEZ

Estalmat – Galicia

Resumen:

El objetivo de esta sesión es hacer un estudio sobre la formación de mosaicos. La primera parte está dedicada a analizar la formación de mosaicos. Se comienza estudiando los movimientos que aparecen en algunos ejemplos de mosaicos y se continúa analizando diferentes figuras que pueden generar recubrimientos periódicos del plano. Comenzando por los polígonos regulares, se continúa trabajando con otro tipo de polígonos y se termina observando baldosas como las diseñadas por Escher.

La segunda parte de la sesión se desarrolla en el aula de informática, trabajando con páginas web donde los estudiantes pueden experimentar la generación de mosaicos dinámicos empleando el programa GeoGebra.

Introducción.

El objetivo de esta sesión es iniciar a los estudiantes de ESTALMAT, de 1^{er} curso, en la observación y análisis de mosaicos.

El estudio de las simetrías no es un contenido que se aborda directamente en la ESO. Aparecen contenidos sobre simetría en 1^{er} curso y en 3^o, juntamente con traslaciones y giros.

En los cursos anteriores, el desarrollo de esta sesión trataba de seguir una construcción lógica de la formación de mosaicos. Así se hablaba en primer lugar de los movimientos en el plano, de las simetrías, luego se trabajaba con polígonos regulares, presentando los mosaicos regulares y semirregulares, se trabajaba posteriormente con otro tipo de polígonos para terminar con el estudio y construcción de polígonos nazaríes y de Escher.

Observamos entonces una cierta desgana en las actividades, pues, aunque se hacía trabajar a los estudiantes con material, recortando cartulinas y construyendo diseños, no se observaba que estuvieran muy motivados. Entendimos que, aunque la actividad era manipulativa, no veían el objetivo del trabajo, no visualizaban, desde el inicio, a donde se pretendía llegar.

Es por ello que en la sesión de este curso, y en lo que ahora presentamos, hemos cambiado la organización de la sesión, pretendiendo desde el inicio meter a los estudiantes en la observación y análisis de mosaicos atrayentes, que les lleven, en una segunda fase, al estudio de los elementos que intervienen en un mosaico y de las maneras de generarlos.

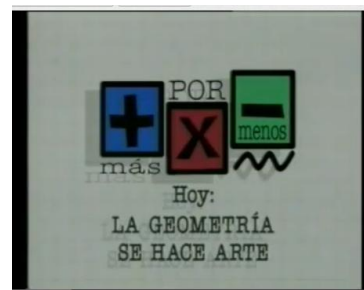
Para ello comenzamos estudiando los movimientos que aparecen en algunos ejemplos de mosaicos para continuar analizando diferentes figuras que pueden generar recubrimientos periódicos del plano. Trabajamos luego con polígonos regulares, y continuamos con otros tipos de polígonos. Finalmente analizamos y se termina observando baldosas como las diseñadas por Escher. En la segunda parte de la sesión, que desarrollamos en el aula de informática, se indica a los estudiantes una página web, www.estalmatgalicia.com/mosaicos, donde los estudiantes disponen de una relación de enlaces a través de los cuales pueden experimentar la generación de mosaicos dinámicos empleando el programa GeoGebra.

La geometría se hace arte.

Iniciamos la sesión con la proyección de un capítulo de la serie “Más por menos”, dirigida por Antonio Perez Sanz: “La geometría se hace arte”.

Ejemplos de mosaicos.

A continuación entregamos a los estudiantes copias de mosaicos diversos, con el objetivo de observen la ‘figura generadora’ que forma el mosaico, por medio de traslaciones en dos direcciones, y que a partir de ella traten de encontrar la ‘loseta básica’, el paralelogramo decorado

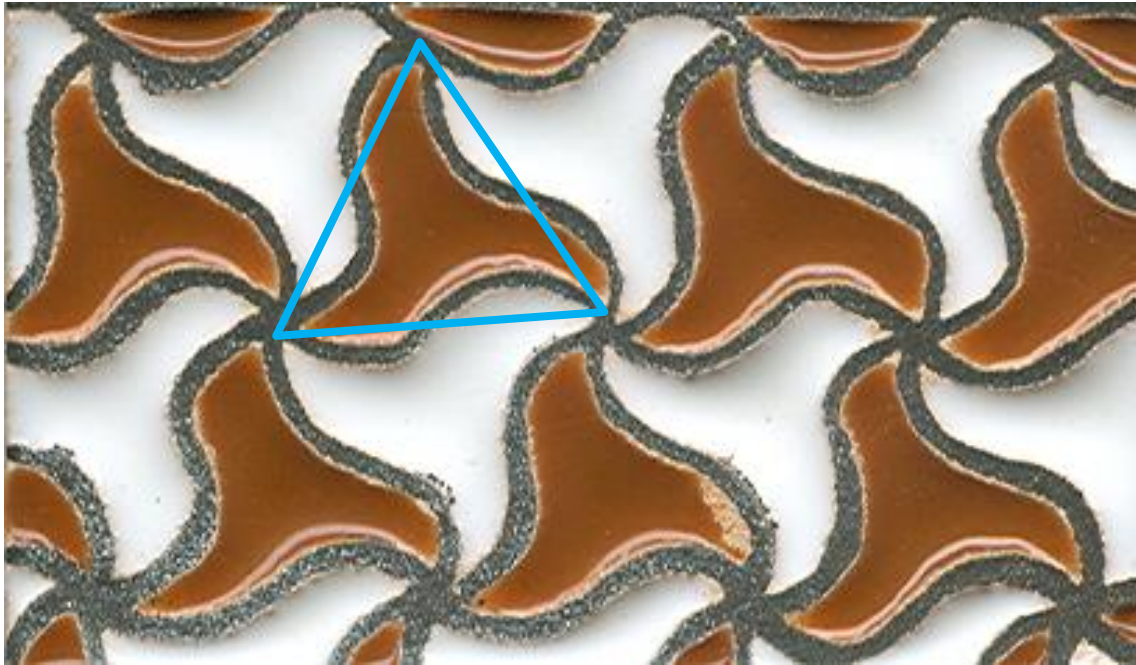


Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

de área mínima que, mediante traslaciones sucesivas genere el diseño completo, y a partir de la cual, mediante las isometrías propias de este mosaico, de lugar a la figura generadora.

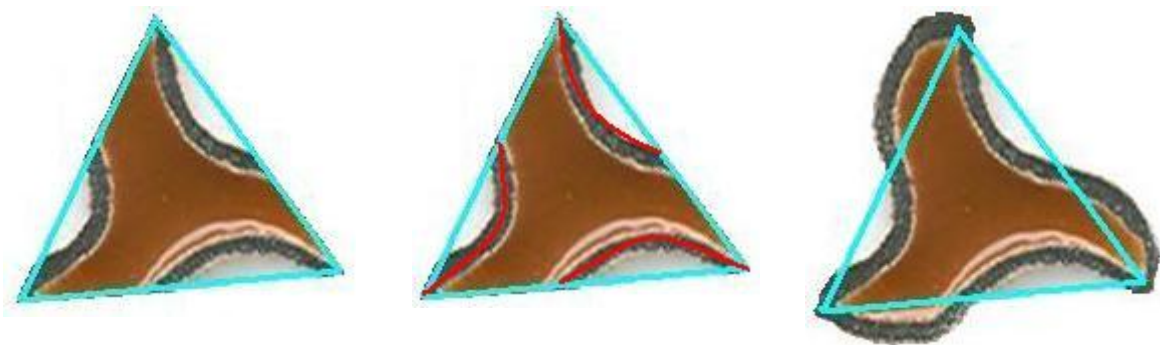
Ejemplo 1:

Iniciamos este proceso con un mosaico sencillo, las pajaritas nazaríes.



En este ejemplo es fácil encontrar la loseta básica, un triángulo equilátero con vértices en las puntas de la pajarita.

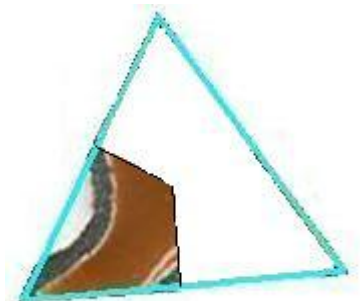
También es fácil descubrir cómo se forma la pajarita a partir de este triángulo decorado:



Los movimientos que convierten el triángulo en la pajarita, las simetrías centrales centradas en los puntos medios de los lados, pueden ser los movimientos que generen el mosaico, aunque es más fácil descubrir que éste se genera por rotaciones de orden 6 en los vértices del triángulo.

En este mosaico no aparecen simetrías axiales.

Es relativamente sencillo descubrir el motivo mínimo, la menor porción de la los eta básica que al aplicarle las simetrías del mosaico



Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

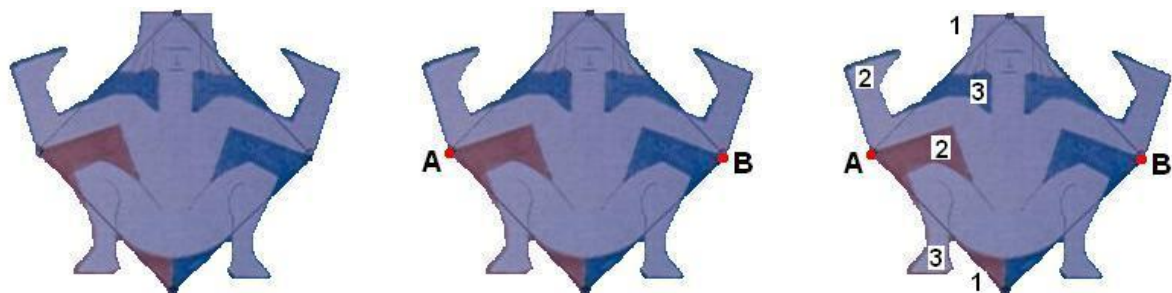
genera aquella: consiste en una cometa contenida entre cada vértice y los segmentos de medianas comprendidos entre los lados y el centro.

Ejemplo 2:



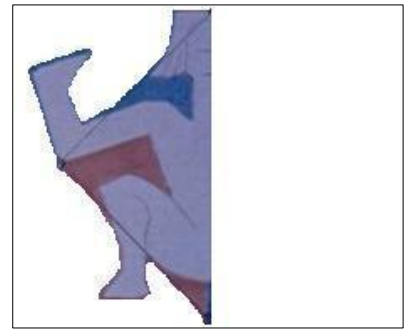
El segundo ejemplo ya es más complicado, aunque se puede ver ya una malla cuadrada superpuesta al dibujo.

Los hombrecitos están, cada uno, enmarcados en un cuadrado del que sobresalen parte de los brazos, piernas y cabeza. Se puede ver fácilmente cómo se forma la figura básica a partir de la loseta básica, recortando ciertas partes del cuadrado y pegándolas por el exterior, pero los movimientos que están detrás de esos cambios son más variados que en el caso de las pajaritas. Aparecen simetrías de orden 4 en torno a dos vértices, A y B, y las tres partes de cada lado que sobresalen del cuadrado se obtienen girando las correspondientes zonas 1, 2 y 3 un ángulo de 90° en torno a esos vértices.



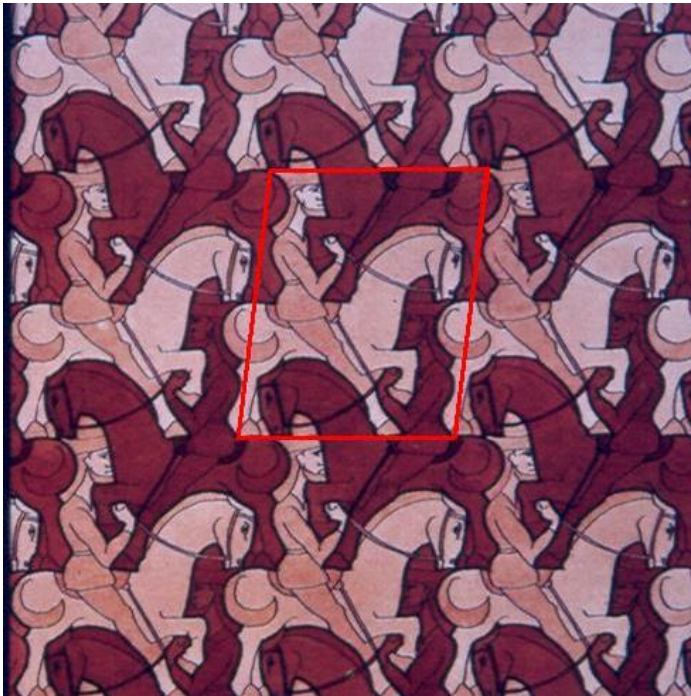
Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

El motivo mínimo ahora será la mitad de cada figura, debido a que en este mosaico tenemos ejes de simetría.



Más ejemplos:

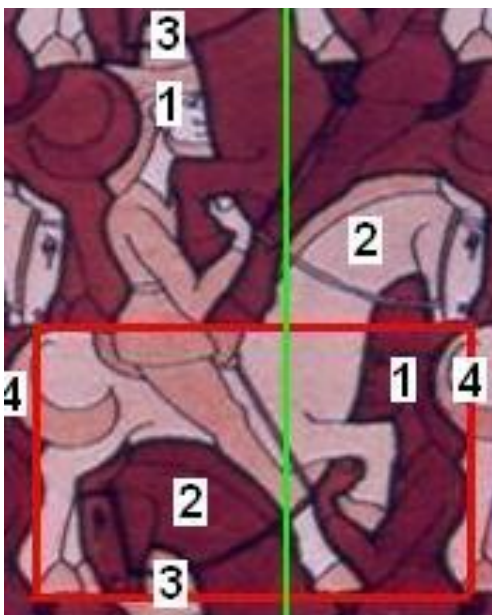
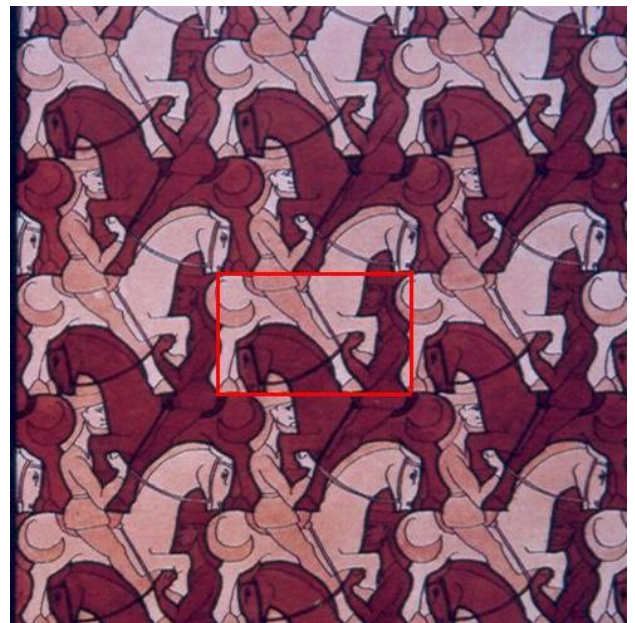
La cosa se complica cuando presentamos el mosaico de los caballeros de Escher.



básica aquí puede ser un rectángulo.

Lo que aparentemente parecen simetrías no lo son, por mucho que coloquemos el espejo sobre el mosaico, no logramos que la imagen reflejada llegue a coincidir con la imagen del otro lado del espejo. Tenemos aquí simetrías deslizadas, más difíciles de descubrir.

A primera vista parece que la figura de cualquier par de jinetes se pueden enmarcar en un paralelogramo, sin embargo la loseta



A partir de este rectángulo, por simetría deslizada, se transforman las partes 1 y 2 y por traslación de amplitud el doble del lado vertical del rectángulo, se transforma la parte 3 (la parte superior del sombrero) y, finalmente, la parte 4, se transforma por traslación de amplitud el lado horizontal del rectángulo.

Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica



Otros mosaicos que presentamos, y sobre los que trabajan, son el de los reptiles de Escher,

Y otros de tipo nazarí, donde aparecen más simetrías y giros.



Para realizar estas actividades los estudiantes disponen de copias de los mosaicos en papel, que pueden recortar, tijeras y espejos.

Empleando espejos, que colocan verticalmente sobre los mosaicos, pueden comprobar la existencia de simetría, y también de giros y sus centros, usando dos espejos que colocan formando un 'libro de espejos'.

También se les entregan varias hojas



Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

con copias de hexágonos regulares, triángulos equiláteros, cuadrados y rectángulos, para que los recorten y sobre cada uno de ellos realicen dibujos, de manera que al componer con cada una de esas figuras un mosaico, aparezcan figuras como las que tienen en los modelos entregados.



Polígonos regulares que cubren el plano.

La siguiente etapa busca descubrir los mosaicos regulares. Disponemos de varias copias de polígonos regulares de entre 3 y 8 lados, con los que los estudiantes pueden experimentar la posibilidad o imposibilidad de cubrir la mesa, sin que se solapen ni dejen huecos.

MOSAICOS	MOSAICOS CON POLÍGONOS REGULARES (3)
	Nome:

Na táboa anota o valor do ángulo que forman os lados destes polígonos:

Una vez que empieza a colocar juntos polígonos de igual tipo, se dan cuenta de que algunos “cierran el círculo”, mientras que otros no. Surgen entonces algunas voces afirmando que la cuestión depende de los ángulos de los polígonos. Para ayudarles entonces a sistematizar sus descubrimientos, les entregamos una tabla donde deben anotar el valor del ángulo de cada tipo de polígono regular. Es fácil, entonces para ellos, descubrir que la condición para que el polígono regular forme mosaico es que el valor de ese ángulo sea un divisor de 360° .

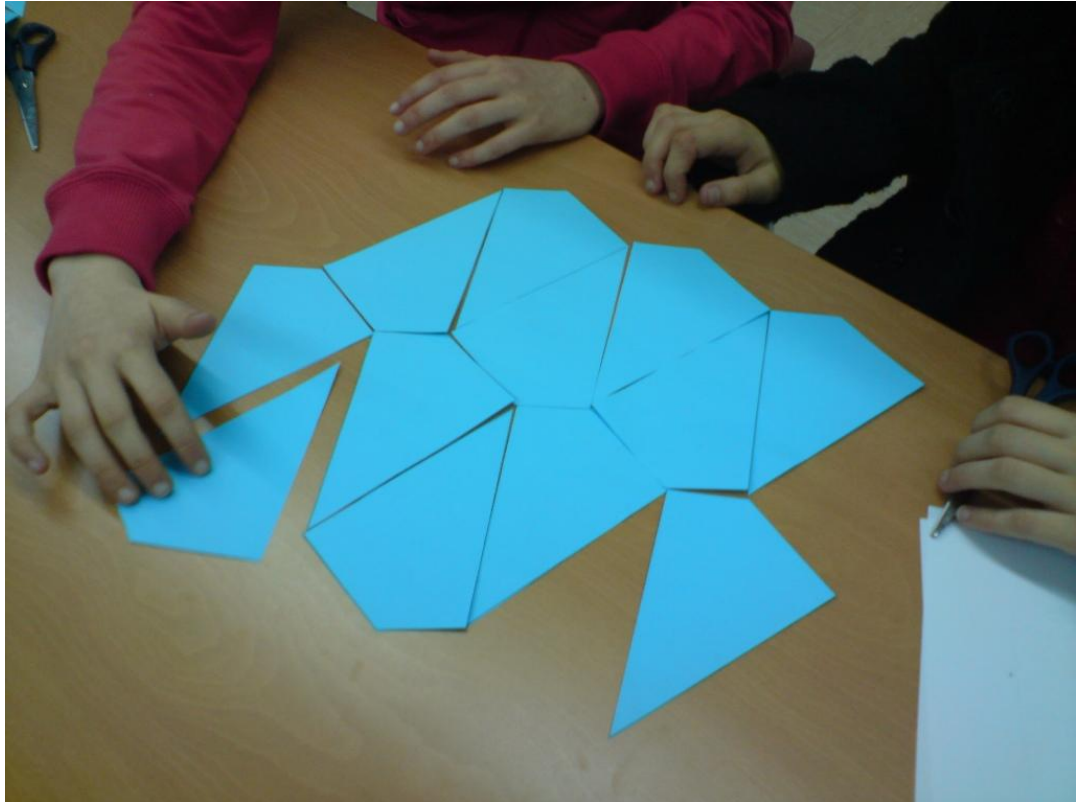
Polígono regular	Nº lados	Ángulo central
Triángulo Equilátero	3	
Cadrado	4	
Pentágono regular	5	
Hexágono regular	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	11	
	12	

Baldosas irregulares.

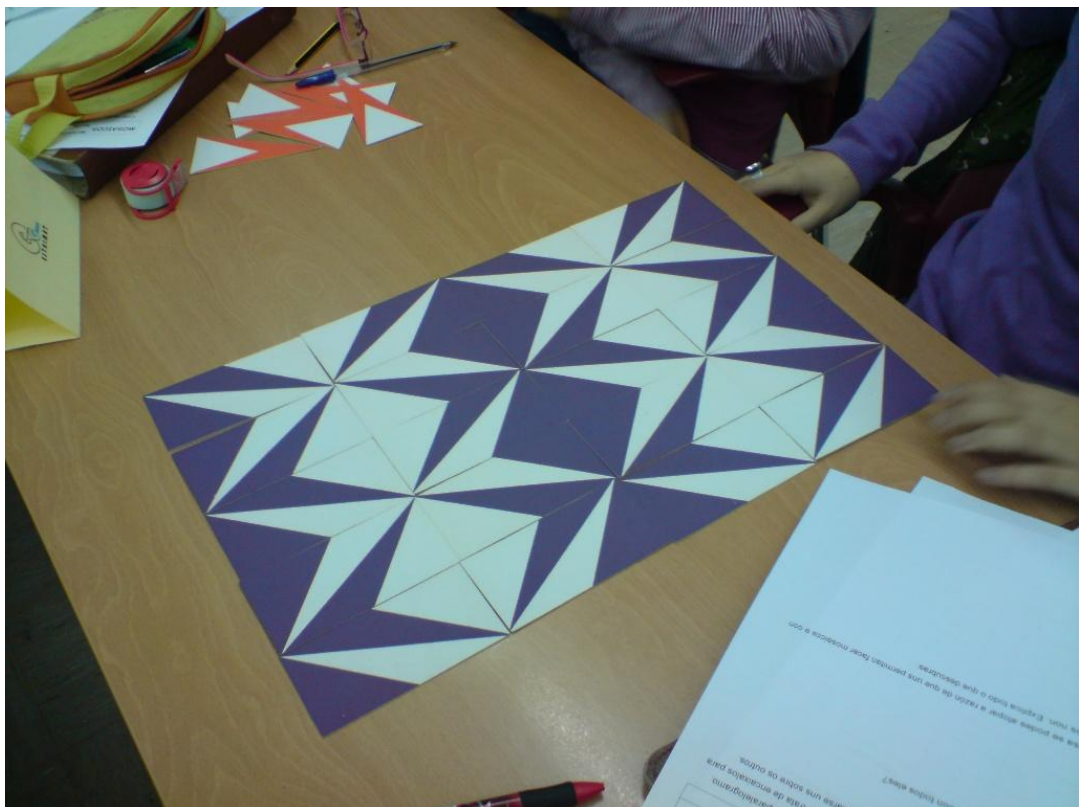
En la parte final de la primera parte de la sesión se les deja experimentar la formación de mosaicos con piezas poligonales irregulares y la amplia diversidad de polígonos que cubren el plano de manera periódica.

Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

Se pone a su disposición copias en plástico o cartón de diferentes modelos de triángulos, cuadriláteros, pentágonos y de otras piezas de forma poligonal o con lados curvos.



Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica



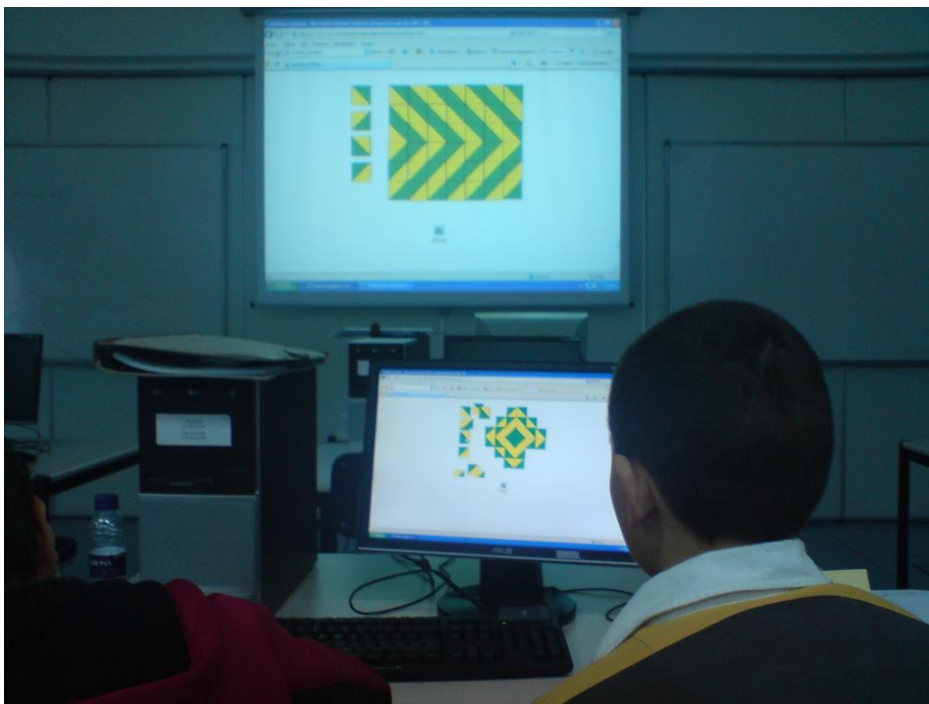
Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

Trabajo con páginas web

Después del descanso, la sesión continúa en la sala de ordenadores, donde los estudiantes pueden acceder a la página www.estalmatgalicia.com/mosaicos. En esta página se muestra una relación de enlaces a diferentes páginas donde pueden experimentar la formación de mosaicos y también realizar diseños de losetas que cubran periódicamente el plano.



- 1) En la dirección <http://www.xtec.es/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/rajo0.htm>, del CEIP Pompeu Fabra, de Lloret de Mar, pueden descubrir la 'loseta catalana' y las múltiples posibilidades que tiene de formar distintos mosaicos.

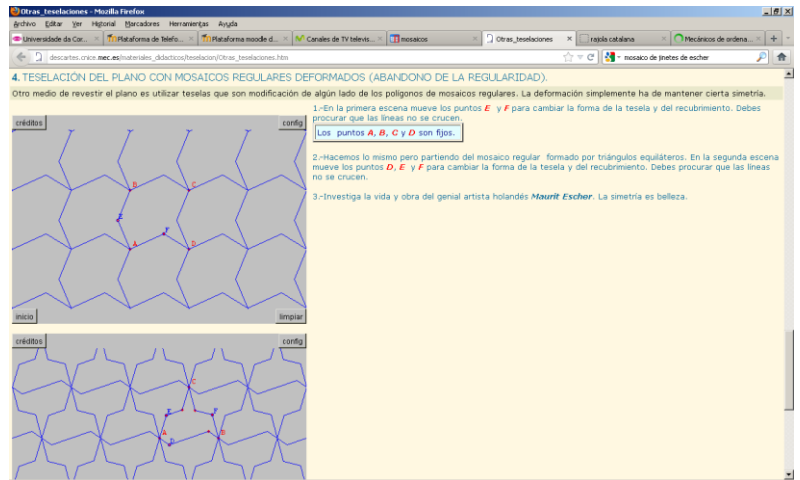


- 2) Dentro del proyecto Descartes, les hacemos entrar en http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/teselacion/Otras_teselaciones.htm, donde pueden comprobar la existencia de mosaicos formados a partir de triángulos y cuadriláteros, e incluso tienen la posibilidad de construir un polígono de 8 o 9 lados, que

Mosaicos: rompiendo el plano de manera armónica

embaldose correctamente. Estos polígonos se van a formar a partir de actuar sobre determinados puntos de los lados de cuadrados o triángulos equiláteros, de manera que la deformación realizada se transmita de manera apropiada a otros lados de la figura,

- 3) También dentro del Proyecto Descartes tienen esta página, http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/grabados_de_escher/recubrimientos.htm, donde pueden experimentar la formación de mosaicos a partir de varias copias de triángulos, cuadriláteros o pentágonos.



- 4) De nuevo se les facilita otra página del Proyecto Descartes, para que vean y experimenten con la pajarita nazarí: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/grabados_de_escher/pajarita.htm

- 5) De modo análogo pueden ver la formación del mosaico de reptiles de Escher en esta otra página del Proyecto Descartes http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/grabados_de_escher/reptiles.htm

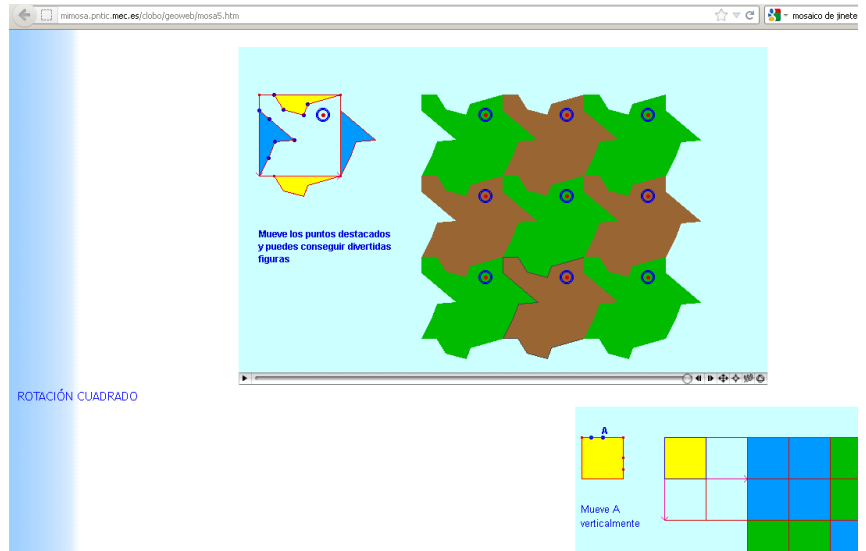


- 6) Y una muestra más del Proyecto Descartes para ver la formación del mosaico de los peces: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/grabados_de_escher/peces.htm

- 7) La siguiente dirección les va a llevar a una página donde pueden ver una explicación teórica, pero llena de animaciones, sobre la construcción de mosaicos, así como ejemplos que ilustran la formación de mosaicos nazaríes y de Escher. Se trata de un excelente

trabajo que ha merecido el 2º Premio a la Elaboración de Materiales Educativos Multimedia de la Junta de Castilla y León (2005): http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/mosaicos/marco_mosaicos.htm

- 8) De nuevo tenemos aquí otra página donde pueden experimentar la posibilidad de formar mosaicos con piezas poligonales irregulares, elaborada por José Manuel Arranz: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa4.htm>



- 9) Otra página de la misma web anterior, para experimentar con nuevos tipos de polígonos: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa5.htm>
- 10) Y una tercera página de la web de José Manuel Arranz, donde se puede experimentar sobre la formación del mosaico de reptiles de Escher: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa8.htm>

- 11) Finalmente mostramos enlaces a dos secciones de la web de José Antonio Mora. En la primera (<http://jmora7.com/Onda/index.htm>) se muestra el trabajo realizado por sus estudiantes del IES Sant Blai de Alicante en el Museo del Azulejo de Onda. A través de estas páginas se describe el proceso de diseño y construcción de azulejos y se permite la exploración y construcción de dibujos originales.



En el segundo enlace se accede a toda una lección interactiva sobre la construcción y diseño de mosaicos:

<http://jmora7.com/Mosaicos/index.html>