

EL MEJOR LIBRO DE TEXTO DE LA HISTORIA

Enrique Hernando Arnáiz
Proyecto ESTALMAT Castilla y León
(Alumnos de 2º curso)

PRÓLOGO: “El humor acerca las matemáticas a los jóvenes (es un lenguaje mucho más “suyo”), ¿podrá conseguir que les interesen?”

La matemática es comunicativa. Los estudiantes clásicos de esta materia tienden al aislamiento y al individualismo. Este libro inclinará a los lectores a comentarlas (como anécdotas matemáticas) y puede propiciar una fácil conversación alumno-profesor.

Creo que es incuestionable que sus imaginativas viñetas resultarán más útiles al objetivo de fijar mentalmente los conceptos que abordan que la reproducción minuciosa clásica”.

En infinidad de cursos de Historia de las Matemáticas he escuchado a “los expertos” razonar lo bueno que sería el que al abordar esta materia se tuviese en cuenta el orden cronológico en que fueron surgiendo sus descubrimientos: en el tiempo y en la mente de los protagonistas los hallazgos fueron desarrollándose en este orden y de esta forma y, además, el hecho de que ahora descubriesen algo de Teoría de números, ahora algo sobre Geometría, ahora algo de Probabilidad... sería debido posiblemente a que la mente humana no es continua y persistente en sus campo de atención, sino que va intentando resolver los problemas relacionados con las necesidades que van apareciendo casi podríamos decir que aleatoriamente, “según surgen”. Mientras pensaba un problema de ecuaciones me surgió la necesidad de averiguar el número de permutaciones que se podían producir en aquella situación... etc. En palabras del Medalla Fields *EFIM ZELMANOV*:

“ALGUIEN DIJO QUE LA HABILIDAD MATEMÁTICA CONSISTE EN LA CAPACIDAD DE PENSAR MUCHO TIEMPO SOBRE UN PROBLEMA, Y YO ESTOY DE ACUERDO. PASAS AÑOS PENSANDO SOBRE LO MISMO, A VECES TE OBSESIONAS, TE EQUIVOCAS, PERO APRENDES MUCHO POR EL CAMINO. Y A VECES TIENES SUERTE Y RESUELVES EL PROBLEMA. A VECES EL PROBLEMA NO ES MUY IMPORTANTE, PERO EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN SE DESARROLLAN MATEMÁTICAS QUE SÍ LO SON ”

Si nos atenemos al conocimiento matemático de los humanos actualmente, no creo que nadie piense que en los primeros pasos de la investigación, cuando nuestros antepasados poco más podían hacer que contar usando montones de piedrecitas (cálculos), se produjeron todos los descubrimientos sobre aritmética y Teoría de Números; que unos siglos después se empezó a hablar de Álgebra y no se paró hasta que se averiguaron todas las soluciones de ecuaciones, operaciones con polinomios, etc.; que cuando se acabó con esto se empezó a trabajar con fórmulas y funciones; que la forma, dimensiones y geometría en general de las figuras y objetos que nos rodean no se empezó a plantear y utilizar mientras no estuvo resuelto lo anterior y que la inquietud por la probabilidad de ganar una partida o de que ocurra un suceso y el consecuente análisis estadístico de los datos que se producen no nos preocupó hasta hace muy poquito, pues es lo último que se ve siempre, si se llega, en los libros de texto que todos utilizamos. Al menos

los libros de texto que yo conozco deben hacer pensar a nuestros alumnos que los matemáticos de todos los tiempos se empeñaban en desarrollar una rama de su especialidad y no paraban hasta que ya no se les ocurría más al respecto.

A través de la Historia se puede apreciar realmente que todo el saber matemático está fuertemente entrelazado, que no se puede avanzar en unas disciplinas sin utilizar avances alcanzados en otras, que el área geografía es un factor a tener en cuenta...

Estas son algunas de las razones que me llevaron a pensar que sería bueno experimentar con estos alumnos, que supuestamente están bien preparados, capacitados y dispuestos para hacer matemáticas, cómo sería cambiar el orden y el enfoque de las clases de Matemáticas, de la forma de abordar el aprendizaje y el desarrollo de "Las Mates" ...

ESQUEMA SOBRE LO QUE SERÍA EL FUNDAMENTO Y EL DESARROLLO DE LA UNIDAD

La Historia de las Matemáticas y sus gentes. ¿Se podría construir un futuro libro de texto basado en la cronología de la Historia de las Matemáticas?

El origen del asunto: *Juego de detectives: Buscando al matemático*. En las IX Jaem celebradas en Lugo en 1999, escuché una ponencia de un grupo de profesores de matemáticas acerca de realizar un juego en el aula que podría consistir en ir dando pistas (anécdotas, descubrimientos, datos vitales, etc.) de grandes matemáticos y que los alumnos intentasen descubrir al personaje.

Al ir confeccionando mis propias "pistas" de matemáticos y, sobre todo, al ir llevando el juego a la práctica, observé que aquellos conceptos matemáticos de los que hablaba a partir de dichas pistas (los números triangulares de Gauss, el problema de los puentes de Königsberg y la relación entre caras, vértices y aristas de los poliedros de Euler, que el balón de fútbol es un polígono arquimediano, la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, la teoría de Juegos de John von Neumann...) y con los cuales me extendía en clase, aunque no estuviésemos en esos momentos en la parte del programa relacionado, eran como un gancho para la mayoría de mis alumnos y que parecía que el hecho de estar "fuera del contexto de la clase normal" hacía que entrasen en mucha mayor medida a pensar los entresijos de esos cálculos y problemas de los que hablábamos y, aún mejor, que los recordasen tiempo después a pesar de no haber tenido que estudiarlos para un examen.

La idea que me rondaba: ¿sería cosa, a la hora de estudiar Matemáticas, de intentar *Introducir la aventura de su concepción y desarrollo en su didáctica?*

- Ver los conceptos en un orden cronológico real.
- Conocer cuándo, cómo y dónde se produjeron las ideas que dieron lugar a estas fórmulas, representaciones, ecuaciones, interpretaciones, ... Es decir, conocer los acontecimientos en su contexto.
- Conocer a "las mentes" que "vieron" los resultados, sus vidas, sus épocas... Que los personajes de los que hablamos en clase tenían sus familias, sus problemas, sus guerras...
- Los conceptos matemáticos no se verían "encorsetados" en una rama de las Matemáticas, no hay por qué ver todo el Álgebra seguida, toda la probabilidad al final, todos los tipos de números antes de empezar la demás...
- Que las diversas partes de las Matemáticas... ¿Son conjuntos disjuntos?
- ¿Ver los conceptos entrelazados? ¿Saltar de una ecuación a una figura? ¿De una figura a una relación entre su volumen y su altura? ¿La Matemática como un todo?
- Verlas con una perspectiva Geográfica. Antes no había comunicación global, unos no conocían lo que habían descubierto otros.
- ¿Será esto bueno? ¿Qué significa bueno? ¿Buenos resultados, buenas ideas, buenas estrategias, buen recuerdo?

¿Se podría realmente construir una didáctica completa de nuestro área en Secundaria obligatoria con esto? ¿Podríamos hacer un libro de texto en el que los conceptos matemáticos vayan apareciendo en, más o menos, el orden en el que se "nos" fueron ocurriendo y con sus personajes en plan figura?

- ¿Qué aspecto tendrían los apuntes y/o el cuaderno de un estudiante que siguiese un curso utilizando este supuesto programa o libro?

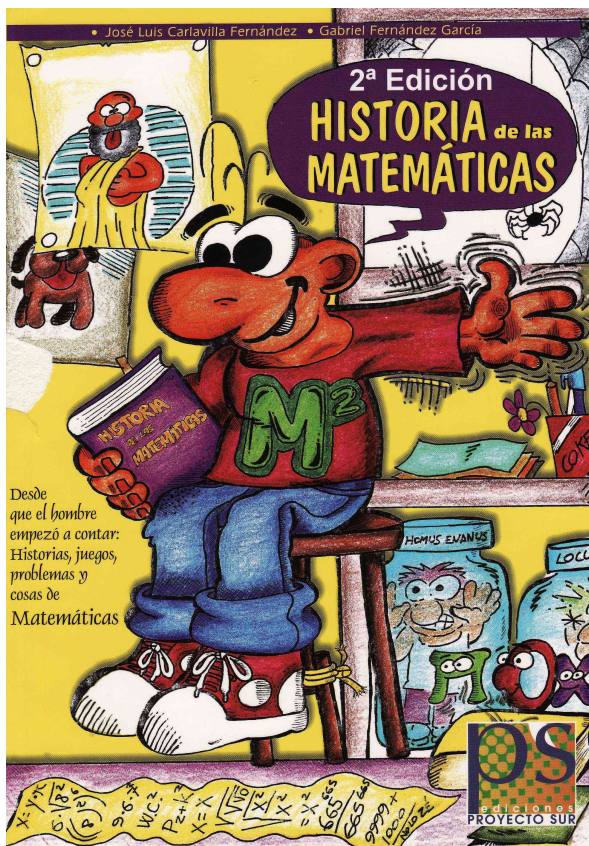
- ¿Cómo sería el tipo de trabajo que habría que realizar?
- ¿En qué consistiría una prueba que evaluara la consecución de objetivos de aprendizaje, o como se lleva ahora, que evalúe la adquisición de las competencias que se persiguen por parte de los alumnos?
- ¿Aprenderán algo?

Así que pensamos en los "Chic@s ESTALMAT", ¿Qué mejor banco de pruebas? Así tenemos, además, una oportunidad de trabajar con un banco de problemas variados:

- La motivación "se les supone".
- También parece que son chicos capaces a la hora de poder enfrentarse a los problemas matemáticos que han ido surgiendo.
- No sólo eso, también tienen gran potencial para buscar estrategias e innovar.
- Eso sí, sólo tienen 13-14 años ¿?
- Había que probar: ¿cómo?, ¿cuándo?, ¿apuntes?, ¿libro?, ¿resultados? ...

Conocía un libro que tenía un compañero de instituto y que estaba totalmente descatalogado, pero que parecía tener todas las posibilidades para encajar en el proyecto. Después de varios años persiguiéndolo, por fin consigo:

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS ¡EN CÓMIC!
de José Luis Carlavilla y Gabriel Fernández
(Por fin reeditado por la Editorial Proyecto Sur)



- ¿Se podría dar clase utilizándolo como libro de texto?
- ¿Podríamos simular un aula de E.S.O. "normal", introduciendo conceptos, resolviendo problemas y también ejercicios?
- Es necesario motivarles para que piensen que después habrá que estudiárselo, que simulemos realmente que esto es nuestro instituto.
- ¿Cómo sería el trabajo en clase? ¿Qué tipo de apuntes de contenidos resultarían en su cuaderno de clase?
- ¿Y la prueba?

¿Cómo lo trabajo en clase?. Algunas ideas para el desarrollo diario de las "Mates" desde este enfoque:

- Se puede ir haciendo una lectura con varios personajes... Dramatizarlo incluso.
- Puede hacerlo un único lector, pero que interprete...
- Por el camino vamos comentando lo que merezca la pena, lo que ellos pregunten, ...
- Marco los momentos en los que veo que hay contenidos interesantes (u obligatorios según "el programa") y, por lo tanto, en los que hay que parar para trabajar...
- Trabajaremos en parejas. Un libro para cada dos. A la hora de pensar y resolver cambian impresiones, lo discuten, cuando lo exponemos dan razones, ...
- ¡Que no olviden que hay que ir tomando apuntes! Me lo van a preguntar...

- Es importante que los chicos pidan tiempo en cualquier caso para apuntar lo que consideren importante si no les da tiempo, pues el tipo de "lectura" comentada de este material es un poco rápida en ese aspecto.

Hay que plantearse cómo debería ser el *Cuaderno de trabajo* de los chicos y por lo tanto ir examinándolo durante el proceso:

- Que apunten las cosas que para ellos sean como la "teoría" en un texto convencional: Fórmulas, definiciones, ideas, frases, estrategias, ...
- Que desarrollen en él las cuestiones, posibles demostraciones, ejercicios y problemas que vayan surgiendo.
- Hay que motivarles para que, como en todos los trabajos que realizan, expliquen lo mejor posible sus ideas sobre el papel, no dando cosas por supuestas, para que se vea el proceso "creativo".
- ¡Qué curioso sería evaluarlo al final...! ¿?

Al ir trabajando, los alumnos... surgirán, y, realmente, surgen, muchas posibilidades de hablar y trabajar matemáticamente:

- ¿Preguntas?, ¿dudas?
- ¿Ideas que les surgen?
- ¿Soluciones a los problemas?, ¿varias posibilidades?
- ¿Alguna forma mejor/distinta de hacerlo?
- ¿Variantes del mismo problema?, ¿aplicación a otros?
- ¿Generalización del método empleado?, ¿extensión de lo trabajado para llegar más lejos?
- ¿Conjeturas sobre lo que se cumple en general y lo que no?, ¿sabríamos demostrarlo?, ¿sabríamos poner ejemplos?
- Incluso ¿detectamos errores en las soluciones que da el libro? (que los hay)...
- Es importante que, como citábamos al principio, los chicos tengan claro que no importa que muchas veces no se saquen las cosas, sino lo que vayamos descubriendo por el hecho de trabajarlas (es fundamental para que no se pierda la motivación, sobre todo de llevar unos apuntes lo más completos posible).

A VER QUÉ SALE...

Algunos ejemplos del discurrir de las clase y de qué tipo de trabajo hicimos profesores y alumnos. No hace falta dar demasiadas ideas pues aquellos que lo trabajen lo harán a su modo. Elegirán los momentos para comentar, ampliar, reflexionar, discutir, resolver, intentar demostrar, añadir datos y problemas o demostraciones históricas reales a los que aparecen en el texto, ...

PREHISTORIA: Alguna cosilla que se puede aprovechar.

- “CALCULADORA DIGITAL” (p. 11)

Comentar los orígenes de la numeración, las piedras o “calculi”, el sistema decimal, el sistema de base doce usando las falanges de los dedos y el pulgar para señalarlos, el sistema sexagesimal ¿será una fusión pues $60 = m.c.m.(10, 12)$? Ideas y algunas conversiones.

- “EL ÁBACO” (p. 12)

Llevamos varios pequeños ábacos e intentamos deducir cómo se representan en él los números, cómo hacer sumas, restas, ¿multiplicaciones? Vemos alguna noción básica para manejarlo, tipos de ábacos, ...

- “FUE EN EL NEOLÍTICO CUANDO EL HOMBRE DEJÓ LAS CAVERNAS (mención a Atapuerca) Y CONSTRUYÓ SUS PRIMERAS CHOZAS... TODAS ESTAS CHOZAS ERAN DE PLANTA REDONDA, HECHAS DE...” (p. 13)

¿Por qué redondas? ¿Cómo harían para trazar sus circunferencias?.

Comparamos con ejemplos las superficies que encierran diversos cuerpos Geométricos de igual perímetro para que usando la misma cantidad de material de construcción (ramas, etc.) en las paredes encerremos la mayor superficie habitable posible a igual altura.

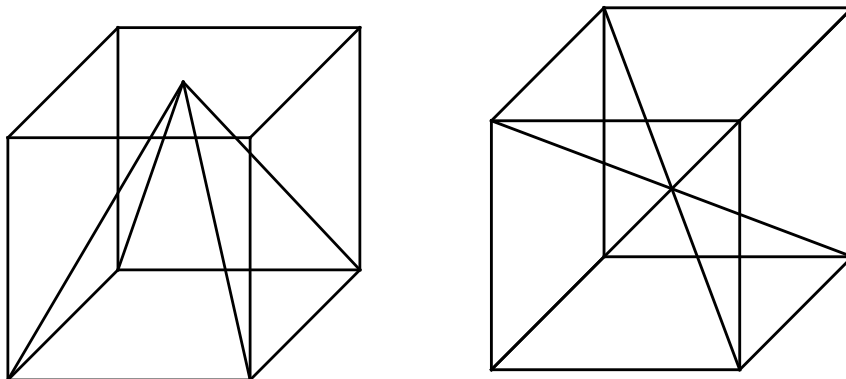
¿Llegan a la conclusión?

EGIPTO: ¡Hace dos y tres mil años!

- “...EN GEOMETRÍA, DESTACARON ANTE TODO POR SU EXTRAORDINARIA PRECISIÓN PARA HALLAR VOLÚMENES, EN ESPECIAL EL DE LA PIRÁMIDE CUADRADA” (p. 17)

¿Métodos par medir volúmenes hace tres mil años?

Relación entre el volumen de la pirámide cuadrada y el del ortoedro que la contiene. Ideas.



$$V_{PIR} = \frac{1}{6} V_{ORT} = \frac{1}{6} b h_{ORT} = \frac{1}{6} b (2h_{PIR}) = \frac{1}{3} b h$$

- "BASABAN TODAS LAS OPERACIONES EN LA DUPLICACIÓN" (p. 18)

Intentamos descifrar lo que significa esta forma de multiplicar:

Otros ejemplos de multiplicación por duplicación...

Entonces ¿los egipcios conocían el sistema binario?

$$412 \times 7 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 412 \\ 2 \longrightarrow 824 \\ 4 \longrightarrow 1648 \end{array} \right\} 2848$$

$$412 \times 25 \Rightarrow 25 \left\{ \begin{array}{l} \underline{1 \text{---} \textit{si}} \longrightarrow 412 \\ 2 \text{---} \textit{no} \longrightarrow 824 \\ 4 \text{---} \textit{no} \longrightarrow 1648 \\ \underline{8 \text{---} \textit{si}} \longrightarrow 3296 \\ \underline{16 \text{---} \textit{si}} \longrightarrow 6592 \end{array} \right\} 10300$$

¿Cómo se escribe 7 en base dos? ¿y 25?

Trabajamos en ello, descubrimos su funcionamiento y nos atrevemos con otras bases. ¿25 en base tres,...? Y si usamos los dedos de una sola mano, ¿cómo se escribe en base cinco? ¿Otros números y otras bases?

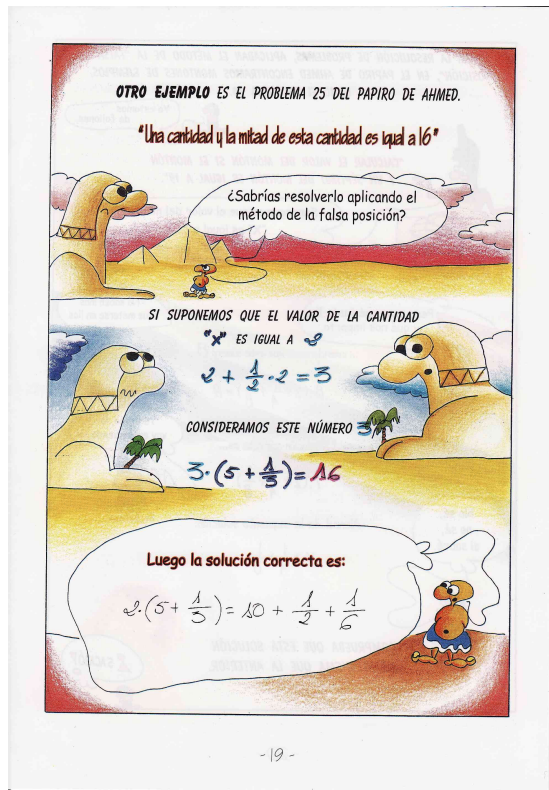
Y ¿la división?:

¿Por qué el dos está marcado como si fuese el lugar en el que aparece el resto? Comprobamos qué ocurre, ¿siempre sale el resto ahí?

$$32 : 6 \Rightarrow 7 \left\{ \begin{array}{l} 6 \longrightarrow 1 \\ 12 \longrightarrow \underline{2} \\ 24 \longrightarrow 4 \end{array} \right\} 5$$

- "EL MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN" (p. 19 y 20)

Resolvemos ecuaciones al estilo egipcio. Investigamos el problema 25 del papiro Ahmed:



"Una cantidad y la mitad de esta cantidad es igual a 16"

Suponemos que $x = 2$;

$$2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 3$$

Usando ese resultado:

$$3 \cdot \left(5 + \frac{1}{3}\right) = 16$$

Luego la solución correcta es:

$$2 \cdot \left(5 + \frac{1}{3}\right) = 10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad \text{es decir,}$$

$$x = 10 + \frac{2}{3}$$

Investigamos en qué puede consistir el método. Lo hablan.

¿Y esa forma de dar el resultado?

Hablamos de que los egipcios sólo utilizaban •FRACCIONES CON NUMERADOR UNITARIO.

¿Cómo se descompone una fracción cualquiera a suma de fracciones de este tipo no repetidas? ¿Hay un método determinado?

¿Esta descomposición es única?

Descomponemos fracciones y buscamos dicho método (parece que hay varias formas):

$$\frac{9}{16} = \frac{18}{32} = \frac{16}{32} + \frac{2}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16};$$

$$\frac{22}{17} = 1 + \frac{5}{17} = 1 + \frac{20}{68} = 1 + \frac{17}{68} + \frac{3}{68} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{69}{1564} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{68} + \frac{1}{1564};!$$

Parece que basta con amplificar la fracción no unitaria por un número que haga que el nuevo numerador supere el denominador antiguo para poder seguir simplificando y repetir el proceso hasta que todas sean unitarias. ¿Hay otros métodos y distintas descomposiciones de la misma fracción?

Si no hemos captado el método de resolución, tenemos otro ejemplo, con distintos números, así podemos comparar, en problema 24 del mismo papiro: "Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19"

Suponemos que $x = 7$ y $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8^{(1)}$;

Usando ese resultado: $8 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19^{(2)}$;

Ahmed da la siguiente solución:

$$7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}^{(3)}, \text{ pero hay un error}$$

en

los cálculos. ¿Lo encuentran? Realmente el resultado es $x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

EL "MÉTODO": Cuando sustituimos x por siete estamos sumando $;\ x + \frac{1}{7}x = \frac{8}{7}x^{(1)}$.

Luego ⁽²⁾ buscamos qué número (en fracciones unitarias claro) multiplicado por ocho da 19. Este número, como se ve en ⁽¹⁾ no será la solución, sino su séptima parte, así que lo multiplicamos por siete ⁽³⁾ y está. Tenemos la solución.

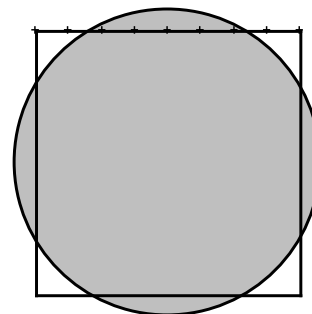
• "LOS EGIPCIOS PENSABAN QUE EL ÁREA DE UN CÍRCULO ERA LA MISMA QUE LA DE UN CUADRADO DE LADO $\frac{8}{9}$ DEL DIÁMETRO DEL CÍRCULO" (p. 25)

Lo pensamos y representamos. ¿Es una buena aproximación?

Si sustituimos en las fórmulas actuales ¿cuánto valía π para los antiguos egipcios?

Otra vez hay un error en el resultado:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$



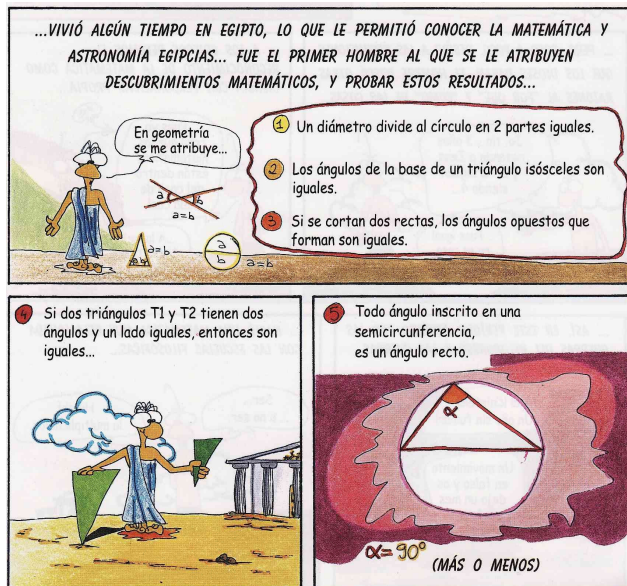
¿Será una coincidencia esa serie de denominadores? Investigamos... ¿ $(12/5)^2$?...

MESOPOTAMIA: El antiguo Iraq (¡!).

- "...Y SU NUMERACIÓN ESTABA BASADA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL..." (p. 29)
Escritura (y numeración) cuneiforme. Ensayamos números decimales con fracciones en base 60. Buscamos el método.

GRECIA: Los más grandes...

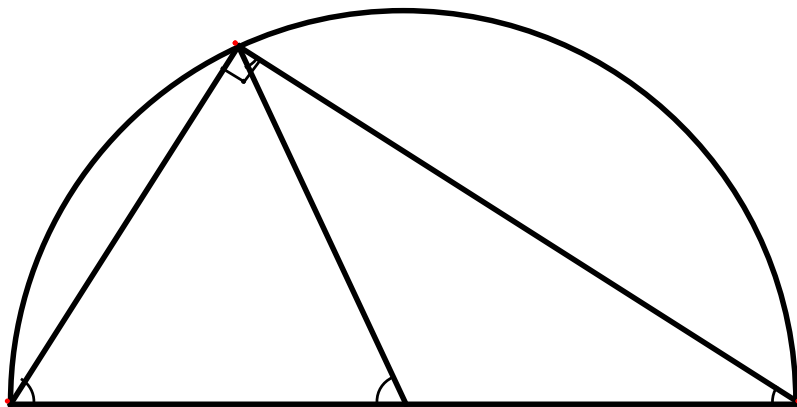
- "...THALES VIVIÓ ENTRE EL 624 A.C. Y EL 584 A.C.... FUE EL PRIMER HOMBRE AL QUE SE LE ATRIBUYEN DESCUBRIMIENTOS MATEMÁTICOS, Y PROBAR ESTOS RESULTADOS..." (p. 36)



Cada pareja intenta demostrar "a su modo" unos de estos resultados y luego expone sus logros.

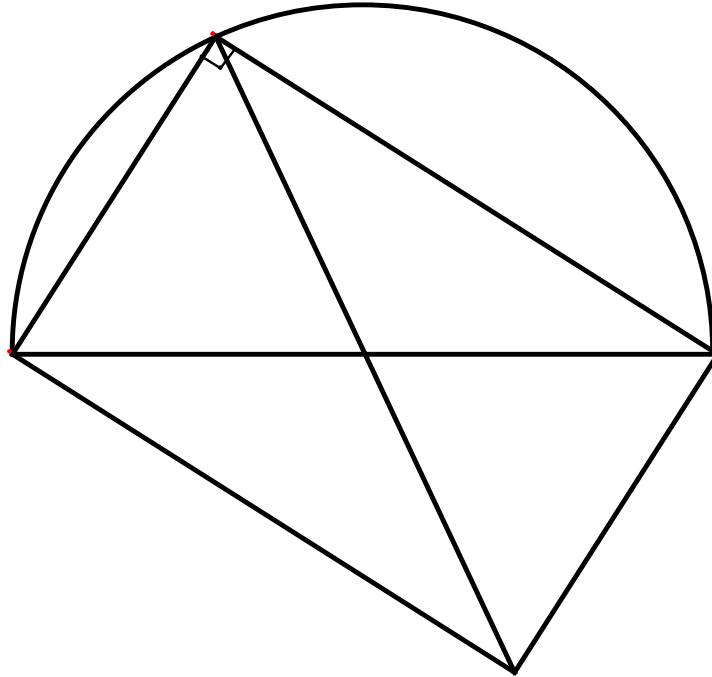
Un chic@ me demuestra que el triángulo de la semicircunferencia es rectángulo.

Tu tienes en la cabeza los dos triángulos semejantes que salen si trazas el radio por el punto de unión de circunferencia y triángulo, que los ángulos suman 180 grados... ya se sabe...



y te sorprenden con que es evidente, si amplías la figura (este fue un bonito momento):

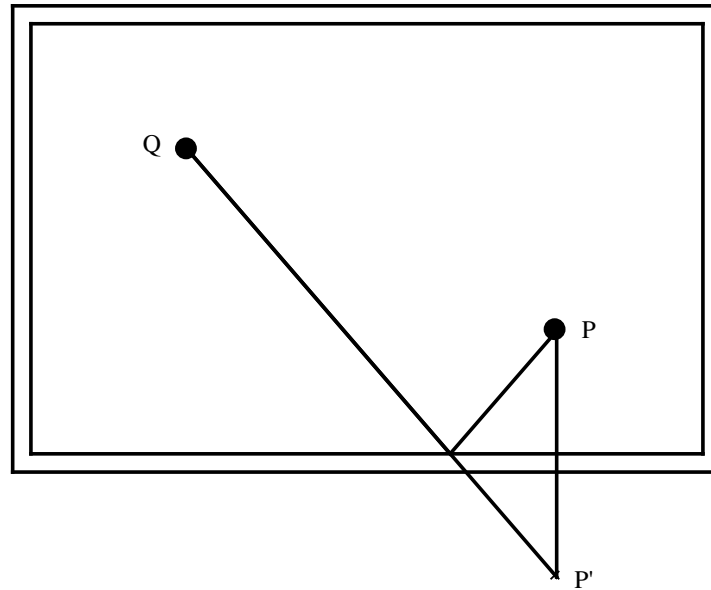
¿¿¿Por qué a estos triángulos se les llama rectángulos???



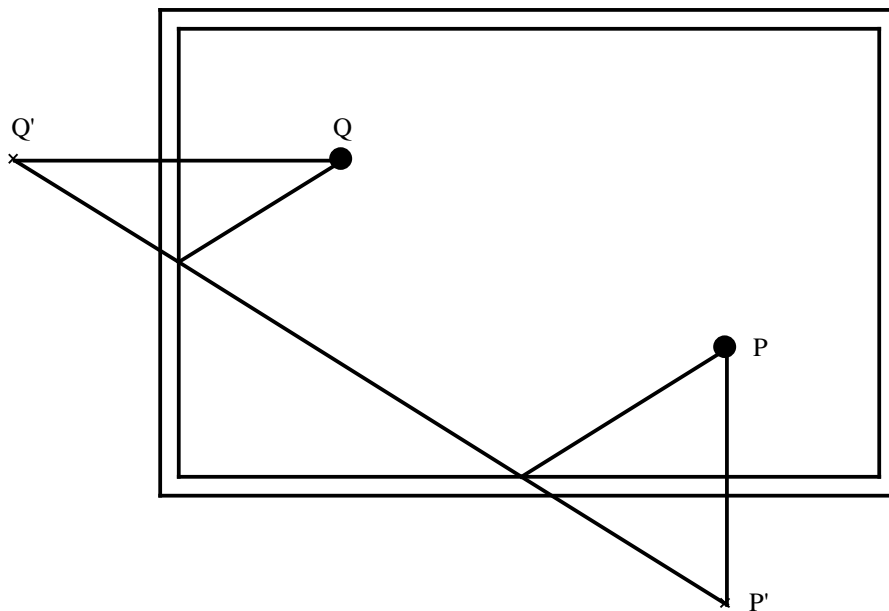
- "PARA COMPRENDER MEJOR LAS APORTACIONES DE THALES A LA GEOMETRÍA PODEMOS APLICARLAS AL JUEGO DEL BILLAR (DE CARAMBOLAS)" (p. 38)

Empezamos con lo que le hizo famoso, calcular la altura de la pirámide usando su sombra "El sol trata a todos por igual..." Y entramos con la semejanza.

¿Para el billar?
A una banda



¿A dos?, ¿A tres? Mucho que pensar, pero está claro que se les ocurre:



CONCLUSIONES (POR AHORA):

- Les gusta el cómic, tiene humor y rompe la pauta de problema tras problema. Da pie a preguntar
- También los retos, ser los que han visto la cuestión. La motivación es muy buena.
- Son chicos inteligentes: da gusto comentar, dialogar, plantear retos... (sobre cualquier cosa de la unidad)
- Como en la investigación de verdad. No importa tanto que se llegue al final de cada reto, ya es muchísimo lo que se aprende en el camino: Estrategias, conjeturas, resultados intermedios, organización, ensayo-error, generalización,...
- Cuatro sesiones (cinco horas y media) dan para lo que dan...
- Parece recomendable para final de 2º y mucho para que trabajen investigaciones relacionadas los "jubilados"...
- En esta unidad se pueden, y deben, abordar todas las fases de los modelos de resolución de problemas (sigamos el que sigamos), así como trabajar la representación simbólica, visual, de contraejemplos, retos de todo tipo, ...
- Hay que esforzarse un poco para que tomen apuntes en el cuaderno, si no los menos "motivados" se pueden dejar llevar por la comodidad de pensar sin registrarlo.
- **¡Ah!, y esto sólo es el principio, se debe continuar con imaginación...**
- Quedan abiertas preguntas iniciales:
 - ⊗ ¿Serían unas buenas clases para lo que se pretende, es decir, aprenderán "mejor" las Matemáticas?
 - ⊗ ¿Las manejarán mejor?
 - ⊗ Simplemente, ¿se han aburrido menos?
 - ⊗ ¿?
- Aunque, después de la experiencia de los últimos cuatro años, nosotros tenemos claro que

SÍ