

# Una aproximación intuitiva al Teorema del Valor Medio y a la Regla de Barrow usando SimCalc MathWorlds

I Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas  
V Reunión nacional de Estalmat

Cecilia Valero Revenga  
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación  
Universidad de Cantabria

## Resumen

Simcalc Mathworlds es un software que forma parte de los materiales desarrollados dentro del Proyecto SimCalc para la etapa secundaria (<http://www.simcalc.umassd.edu/>). Está indicado, en particular, para el estudio de las matemáticas que intervienen en la modelización del movimiento físico: posición, velocidad, aceleración.

Las actividades que proponemos para el Proyecto Estalmat tienen como objetivo mostrar la relación entre el desplazamiento de un objeto y el área bajo su gráfica de velocidad. Mediante el desarrollo escalonado de dichas actividades se van obteniendo resultados parciales, cada vez más generales, que ponen al alcance del estudiante dos potentes resultados matemáticos, el Teorema del Valor Medio y la Regla de Barrow. Estos resultados, en su aspecto más formal, están muy alejados del nivel educativo de los alumnos del primer ciclo de la ESO. Pero el software Simcalc Mathworlds permite, de forma muy elemental, simular una situación física y acompañarla de descripciones gráficas. La observación de las regularidades que se manifiestan en estas gráficas permite a los alumnos construir significados intuitivos para propiedades que se formalizarán en etapas posteriores, cuando los alumnos desarrollen los conocimientos algebraicos y analíticos suficientes.

## INTRODUCCIÓN

El proyecto SimCalc inicia su andadura en 1996 con la participación de James Kaput (MERG – Mathematics Education Research Group - Universidad de Massachusetts) y Jeremy Roschelle (CTL – Center for Technology in Learning - at SRI International) como investigadores principales, que sostienen que mediante herramientas interactivas de visualización, transformación y simulación se posibilita que los estudiantes alcancen comprensión de ciertos conceptos en profundidad, que permitirán acceder sin dificultades importantes alguna a las *Grandes Ideas Matemáticas*. Esta creencia es uno de los pilares básicos del Proyecto Simcalc.

El objetivo de Simcalc es aún más ambicioso, su pretensión es conseguir que todos los estudiantes logren desarrollar la comprensión y las habilidades prácticas en conceptos fundamentales de las Matemáticas por medio de la combinación de tecnología avanzada y reforma curricular. La misión del Proyecto SimCalc es pues, tal como se anuncia en su página de presentación, *Democratizar el Acceso a las Grandes Ideas Matemáticas*.

El uso de Simcalc\_MathWorlds dentro de Proyecto Estalmat, por las características de los estudiantes a los que el proyecto va dirigido, se aleja por tanto de la propuesta que inicialmente promueve Simcalc, la *democratización* del conocimiento. Sin embargo, Estalmat propicia un ambiente adecuado para la utilización este software, no se necesita esperar a una reforma curricular como la que apunta Simcalc para poner en práctica estrategias que invierten la secuenciación de la enseñanza tradicional (fenómenos antes que formalismos, variación discreta antes que variación continua, ...).

SimCalc\_MathWorlds está indicado para el estudio del movimiento físico: posición, velocidad, aceleración,... Está constituido por mundos virtuales en los que los personajes (peces, payasos, ...) se pueden mover controlados por gráficas, por tablas numéricas, o por modelos algebraicos.

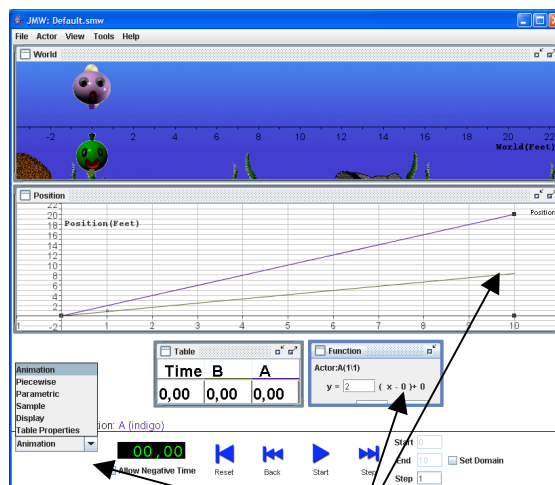
Como es habitual, los objetivos a alcanzar mediante el uso de MathWorlds condicionarán la serie y la secuenciación de las actividades a diseñar. En las primeras versiones de MathWorlds, producto constantemente actualizado, existía la posibilidad de descargar diferentes lecciones, que trataban

nociones matemáticas distintas e incluían las actividades para el alumno y los correspondientes “mundos animados”.

Antes de continuar, indicar que la página web de donde se puede descargar el producto, cuya última actualización es de 2007, es:

<http://www.simcalc.umassd.edu/>

mundo virtual



controles (tablas, gráficas, expresiones,...)

La figura anterior representa una pantalla en la que pueden apreciarse los diferentes elementos del software

## USO DE SIMCALC-MATHWORLDS

En este apartado cabe diferenciar tres significados de uso, uno el relacionado con el propio manejo del software, otro el que contempla sus posibilidades didácticas y por último el enfoque dado a los contenidos matemáticos involucrados.

En relación al primero de los significados, existe una completa guía de referencia a la que se puede acceder en la dirección

[http://www.simcalc.umassd.edu/software/guides/computer/index\\_spanish.php](http://www.simcalc.umassd.edu/software/guides/computer/index_spanish.php)

Esta guía es de gran utilidad para iniciarse en la práctica de Simcalc-MathWorlds y particularmente recomendable para el instructor del grupo de estudiantes puesto que en ella se establecen las distintas especificaciones y recomendaciones de uso. Aprender a usar MathWorlds por parte de los estudiantes puede ser simultáneo a la realización de algunas actividades. Las hojas de trabajo para el alumno, pueden incluir detalles y explicaciones sobre los comandos a utilizar.

Desde el punto de vista didáctico, el Proyecto Simcalc propone usar el software en tres vertientes distintas.

- Como apoyo del profesor.* Ayudándose del retroproyector, el profesor utiliza Simcalc-MathWorlds para mostrar propiedades, fomentar la discusión y, en caso necesario, reconducirla.
- Para la realización de actividades por parte de los estudiantes.* Teniendo presentes los objetivos a lograr, se preparan hojas de trabajo con las diferentes actividades. Los estudiantes deberán ir registrando las conclusiones obtenidas para ser mostradas y discutidas en puestas en común.

- (c) *Ejecución de actividades online.* Simcalc dispone de actividades on line a las que puede acceder cada estudiante, sin necesidad de estar integradas necesariamente en una secuencia de aula.

Dadas las características del Proyecto Estalmat, Simcalc-MathWorlds es un producto que puede ser utilizado en los diferentes modos en que se sugiere su empleo. En esta presentación son las actividades a realizar por el alumno las que adquieren el papel protagonista.

Se ha dicho más arriba que este material está particularmente indicado para el estudio de las matemáticas que intervienen en la modelización del movimiento físico: posición, velocidad, aceleración. Las ideas de velocidad, área, posición y pendiente son la base del cálculo y serán utilizadas como soporte para muchas otras ideas, incluyendo promedios, aproximaciones, etc.

En general, se toma deliberadamente la decisión de *introducir primero la velocidad*, a pesar de que comúnmente se introduce en primer lugar la posición. La razón es que quieren construir directamente intuiciones simples sobre la velocidad usando gráficos velocidad-tiempo en los que 'más alto' significa 'más aprisa' 'más ancho' significa 'más lejos' (en el sentido de que indica más cantidad de área), 'negativo' significa 'retroceder/descender' (significados que no coinciden con los correspondientes en los gráficos posición-tiempo).

Estas intuiciones son las que se utilizan para realizar las conexiones entre velocidad y posición: la distancia recorrida es el área bajo la gráfica velocidad-tiempo y la velocidad es la pendiente de la gráfica posición-tiempo.

## PROPUESTA DE ACTIVIDADES

### Consideraciones previas

Las actividades que proponemos para el Proyecto Estalmat tienen como finalidad principal mostrar la relación entre el desplazamiento de un objeto y el área bajo su gráfica de velocidad. Mediante el desarrollo escalonado de dichas actividades se van obteniendo resultados parciales, cada vez más generales, que ponen al alcance del estudiante dos potentes resultados matemáticos, el Teorema del Valor Medio y la Regla de Barrow. Estos resultados, en su aspecto más formal, están muy alejados del nivel educativo de los alumnos del primer ciclo de la ESO. Pero el software Simcalc-Mathworlds permite, de forma muy elemental, simular una situación física y acompañarla de descripciones gráficas. La observación de las regularidades que se manifiestan en estas gráficas permite a los alumnos construir significados intuitivos para propiedades que se formalizarán en etapas posteriores, cuando los alumnos desarrollen los conocimientos algebraicos y analíticos suficientes.

Tomando como punto de partida tales observaciones, y apoyándonos en parte del material que el proyecto Simcalc-Mathworlds proporciona, hemos confeccionado un conjunto de posibles actividades para llevar a cabo en Estalmat. De algunas de esas actividades ofrecemos también la ficha de trabajo del alumno. En todo caso, precisaremos que lo que aquí se presenta es sólo el fruto de un primer esfuerzo, motivo este por el debe interpretarse como un esbozo de la tarea a realizar y, en consecuencia, como un trabajo a ir completando y perfilando en fechas próximas.

### Objetivos

Todas las actividades que se describen en el siguiente apartado tienen como objetivos fundamentales los siguientes, aunque el tercero de los señalados adquiera una relevancia especial por constituir la base de la aproximación intuitiva al Teorema del Valor Medio y la Regla de Barrow.

1. Establecer una conexión entre el movimiento observado y su registro en forma tabular y en forma gráfica. Por ejemplo, mediante el recurso de las "marcas de velocidad" se puede observar que un trazo *más alto* se corresponde a *ir más deprisa* o que, en trazos con igual altura, el *más ancho* se corresponde con la velocidad del objeto que llega *más lejos*.

2. Considerando la velocidad como el concepto central de todo el desarrollo, interrelacionar, para diferentes tipos de movimientos, las gráficas de posición y de velocidad. Sin efectuar el cálculo explícito de la pendiente (de la función de posición en un punto), es posible establecer por ejemplo, que una modificación en la velocidad se corresponde con un cambio en la inclinación de los segmentos de la gráfica de posición (supuesta esta una función lineal a trozos)

3. Mostrar la existencia de un movimiento de velocidad constante que proporciona el mismo desplazamiento en el mismo intervalo de tiempo que uno de velocidad variable dado y establecer la relación entre el desplazamiento de un objeto y el área bajo su gráfica de velocidad.

### Relación de actividades

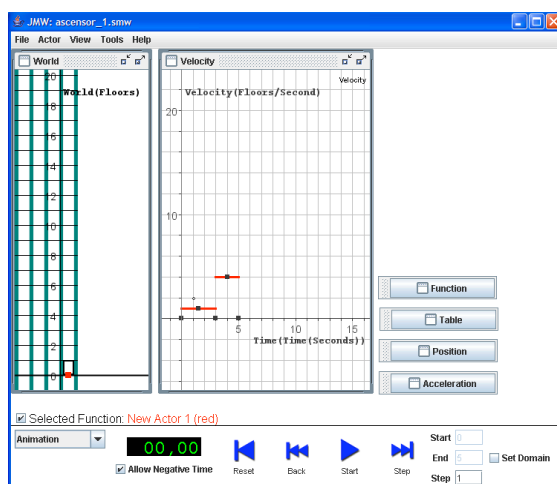
Las actividades aparecen catalogadas según mundo virtual de Simcalc empleado, pero con toda probabilidad esa no será la secuencia de realización en el aula para la que prevalecerán los objetivos específicos de cada una de ellas.

#### o Con el Mundo Ascensores

**Actividad A1)** A partir del gráfico de velocidad, se propone buscar modos diferentes de que el ascensor consiga una altura determinada, identificando tanto los aspectos invariantes en todos ellos como los que se modifican.

Se abre con el gráfico de la velocidad (= nº pisos / seg.). Al mover la velocidad para efectuar el ejercicio, es posible observar la relación  $e = v \times t$ , que en la actividad es relacionar el espacio recorrido y el área bajo la gráfica.

**Actividad A2)** Otra propuesta es construir una actividad donde la velocidad del ascensor esté dada a trozos. Con las “marcas de velocidad” se puede observar que trazo *más alto* se corresponde a *ir más deprisa* o que, con igual altura, *más ancho* se corresponde con *más lejos*. De nuevo puede aprovecharse la actividad para relacionar el espacio recorrido y el área bajo la gráfica a trozos (suma).



#### Ficha del alumno. Actividad A2: Interpretar información

Abre el fichero *ascensor\_2.smw* y ejecuta la animación pulsando en la flecha azul (Start). Ante el movimiento del ascensor ¿Qué observas?

1. ¿Cuándo va más rápido el ascensor? ¿durante cuánto tiempo?
2. ¿En qué momento cambia su velocidad?
3. ¿Cuál es la velocidad del ascensor en este trayecto?

Haz doble-click sobre el elevador y saldrá una ventana en la que puedes elegir la opción

'Marking is on'. Ahora el ascensor dejará marcas cuando se mueva, en intervalos de 1 segundo.

4. ¿Cuál es la distancia entre las marcas en la primera parte del viaje? ¿y en la segunda?
5. ¿Cuál es la velocidad del ascensor en cada una de las dos partes del viaje?

Puede ser útil que en lugar de ejecutar la simulación completa pulsando en la flecha, la ejecutes paso a paso, pulsando en la doble flecha (step).

6. Revisa tus respuestas anteriores analizando la tabla de valores de Tiempo y de Posición.
7. Construye en tu papel un gráfico de posición-tiempo a partir de estos valores. Para ello, marca en el gráfico los puntos de la tabla. ¿Cómo deberían conectarse esos puntos para representar el movimiento?
8. ¿En qué posición se encuentra el ascensor tras haber funcionado durante 4,5 segundos?
9. ¿Cuánto tiempo tarda el ascensor en llegar al piso noveno?
10. Añade al gráfico de posición un último segmento inclinado hacia abajo ¿Qué movimiento hará el ascensor para que corresponda a este segmento?

Para lo que sigue has de disponer de una hoja de papel.

11. Anota las características del gráfico de la velocidad y evalúa el área de los rectángulos que se pueden construir con base el tiempo empleado a una determinada velocidad y altura la velocidad correspondiente.
12. Suma las áreas halladas en el punto anterior y establece una relación entre el valor obtenido y el recorrido realizado por el ascensor.

**Actividad A3)** Otra actividad puede ser el reproducir el movimiento de un ascensor. En un mundo virtual aparece un ascensor que se mueve de acuerdo a ciertos parámetros determinados de antemano. En este caso el estudiante no tiene acceso a ninguna de las gráficas asociadas al movimiento de este ascensor. Su meta es controlar un segundo ascensor usando la gráfica de velocidad o de posición para que su movimiento coincida exactamente con el del primero. Por esto, su tarea consiste básicamente en usar la información que puede inferir del movimiento del primer ascensor para tratar de reproducirlo en el segundo. (En las primeras versiones de Simcalc era posible tener los dos ascensores en un mismo mundo y tener la gráfica de sólo uno de ellos, en la actual parece no ser así, algo que para este tipo de actividades la hace más incómoda.)

#### *Ficha del alumno. Actividad A3: Ajustar un movimiento a un gráfico*

Abre el fichero *ascensor\_3.smw*

Ahora tienes un ascensor A (que es un punto; si deseas ver el 'mundo' completo puedes pulsar View>World>ShowWorld). No dispones de ninguna gráfica ni tabla de valores relacionadas con el movimiento del mismo, que debes observar detenidamente. Puedes hacer cuantas anotaciones quieras acerca de la información obtenida.

Abre el fichero *ascensor\_3\_1.smw*.

En este nuevo fichero hay un ascensor B. Se trata de determinar cuál es el grafo de A, ajustando el grafo de B, de modo que el movimiento del ascensor B sea igual al de A. 'Igual' significa:

- comenzar al mismo tiempo y en el mismo sitio
- poder ir uno al lado del otro en todo momento de aparecer juntos
- parar al mismo tiempo y en el mismo sitio.

Para realizar esta actividad, recuerda que puedes ejecutar la animación paso a paso (step) y que puedes hacer que cada ascensor deje marcas al moverse.

Anota tu solución en el gráfico siguiente.



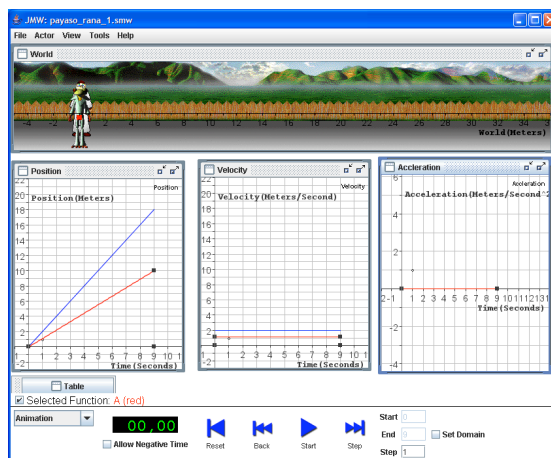
Para comprobar si tu solución es correcta, abre el *ascensor\_3\_1.smw*.

**Actividad A4)** También cabe la posibilidad de determinar la velocidad constante de un ascensor que saliendo en el mismo instante que otro de velocidad variable llegue al mismo tiempo al final del trayecto.

- *Con el Mundo Payaso y Rana*

Las actividades descritas para estos personajes y los siguientes pueden ser intercambiadas, pues las posibilidades de todos los mundos son similares.

**Actividad PR1)** Este mundo puede ser usado para crear grafos y movimientos asociados a historias escritas o habladas. Relacionar un texto escrito con un gráfico es una tarea que desarrolla la capacidad de interpretar gráficos y hacer evolucionar el lenguaje cotidiano hacia la formalización matemática. No olvidemos que las gráficas están interconectadas y cualquier cambio en una, produce efectos en las otras. Las observaciones en este sentido permiten reflexionar sobre la situación y comprender las nociones involucradas.



Además se incluirán cuestiones que, como en el caso de los ascensores, permitan comprobar que el desplazamiento efectuado coincide con el área del rectángulo encerrado por la gráfica de velocidad:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot v_f \Leftrightarrow v_f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Ficha del alumno. Actividad PR1: Interpretar gráficamente un texto escrito en lenguaje cotidiano.*

Abre el fichero *payaso\_rana\_1.smw*

En la escena aparecen dos personajes, A (rojo) y B (azul) con unas gráficas iniciales

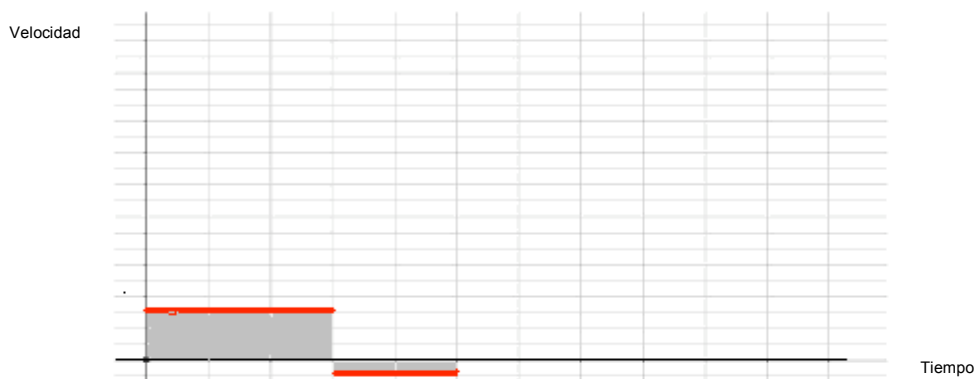
1. Observa detenidamente las gráficas y asocia las diferencias entre los movimientos de los dos personajes a las diferencias entre las mismas.
2. Comprueba, en cada caso, que el desplazamiento efectuado coincide con el área del rectángulo encerrado por la gráfica de velocidad.
3. Modifica las gráficas de manera que los personajes tengan distintas posiciones iniciales. Comprueba que el resultado del apartado anterior se sigue verificando.

Ahora deberás seguir modificando las gráficas pero de manera que la escena final represente la siguiente situación.

“El personaje A camina hacia la derecha con una velocidad de 2 m/sg. El personaje B, que se encuentra 12 m. más allá, camina hacia la izquierda a 1 m/sg. Los personajes se paran cuando B alcanza el punto de partida de A.”

Una vez encontradas las gráficas, responde: ¿Dónde y en qué momento se encuentran los dos personajes?

Determina el área “bajo” cada una de las gráficas de velocidad y relaciónalas con el espacio recorrido. Un ejemplo que ilustra lo pedido se muestra en la figura siguiente.



Teniendo en cuenta la situación precedente, piensa que en el momento en que A y B se encuentran, A decide modificar su sentido y acompañar a B durante un par de segundos, tras lo cual A reinicia la marcha con su velocidad y sentido iniciales. Ambos se paran a los 10 segundos de emprender el camino.

Modifica las gráficas para que respondan a esta última situación. ¿A qué distancia se halla cada uno de ellos del punto de partida del personaje A?

Determina el área “bajo” cada una de las gráficas de velocidad y relaciónalas con el desplazamiento efectuado.

Realiza un ejercicio similar al anterior sabiendo que las modificaciones son las siguientes: la distancia entre A y B es de 5 m., la velocidad de A es de 1,5 m/seg, y la de B es de 0,5 m/sg.

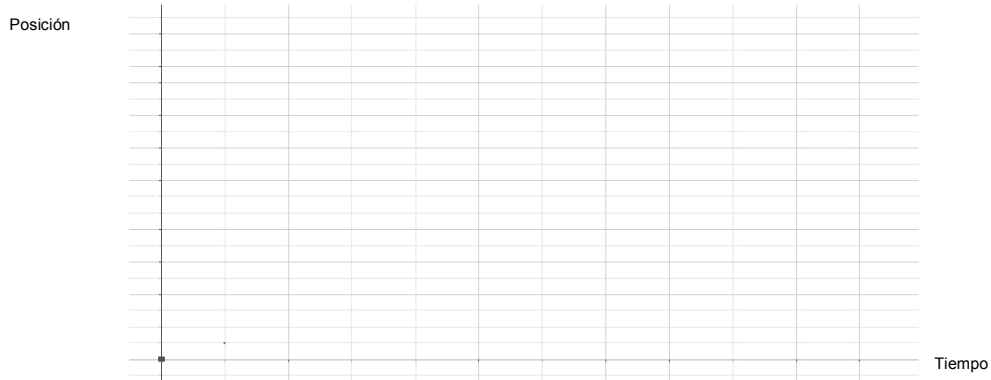
**Actividad PR2)** También en este mundo, sin tener a la vista el gráfico de posición, podemos pedir a los estudiantes que encajen la velocidad, que ha de ser constante, de un payaso para que llegue al mismo sitio y al mismo tiempo que la rana, supuesto que ella se mueve con aceleración constante (y distinta de cero). Resolver este, digamos, desafío es equivalente a encontrar el valor medio del grafo “cambiante”. El mundo o el gráfico de posición dará información de si el problema está bien resuelto o no. Con el gráfico de velocidad podemos comprobar que el área encerrada bajo las dos gráficas de velocidad es la misma y su valor numérico coincide, como en otros casos, con el del desplazamiento efectuado.

*Ficha del alumno. Actividad PR2: Búsqueda de una velocidad media.*

Abre el fichero *payaso\_rana\_2.smw*

En la escena aparecen dos personajes y las gráficas de velocidad de sus movimientos. No cuentas con la gráfica de posición.

1. Realiza la animación de la escena y anota lo que observas en el movimiento de los personajes.
2. ¿El cruce de las gráficas de velocidad conlleva en ese mismo momento un encuentro de los personajes?
3. Reproduce en el siguiente sistema las gráficas de posición de ambos personajes. ¿Son ambas lineales?

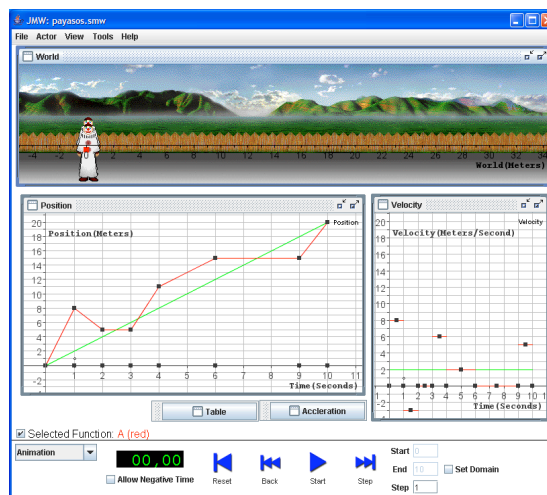


Abre el fichero *payaso\_rana\_2\_1.smw*. En él se representa la situación anterior acompañada del gráfico de posición.

4. Comprueba si tus gráficas anteriores son correctas.
5. Modifica las gráficas de posición para que los dos personajes tengan su posición inicial en 0 y a los tres segundos de iniciar su movimiento se hayan encontrado.
6. Para esta nueva situación, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?
  - a) 'En un instante dado, las velocidades de ambos personajes coinciden'
  - b) 'Para el movimiento de velocidad variable dado, hay un movimiento de velocidad constante que comienza y acaba en la misma posición que el primero.'
  - c) 'Las áreas encerradas bajo las gráficas de velocidad son las mismas'

Esta actividad se completaría con una pequeña intervención por parte del profesor para mostrar otros ejemplos de características similares e introducir términos tales como velocidad instantánea y velocidad media.

○ Con el Mundo Payasos

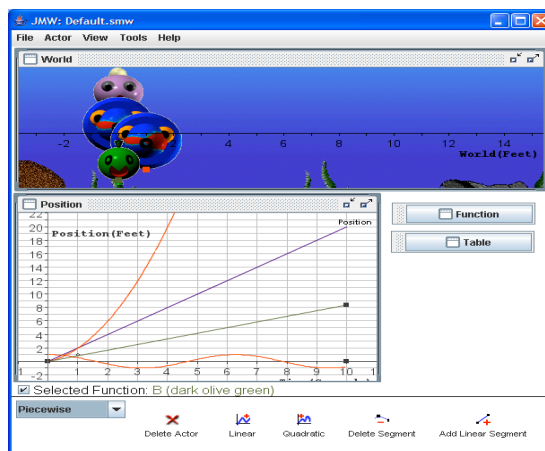


Puede aprovecharse esta escena para aprender a manipular funciones lineales a trozos y explorar sus gráficos de posición y velocidad.

Al observar las gráficas de posición asociadas, y antes de animar la escena, podemos estudiar su relación con el movimiento físico que se va a producir: qué significa que las gráficas se corten, en qué intervalo tiene un personaje mayor velocidad que otro, en qué intervalo de



tiempo tienen la misma velocidad, qué ocurre cuando un tramo del gráfico tiene pendiente negativa, predecir cómo va ser el gráfico de velocidades,...



Cada uno de los cuatro personajes, tiene asignado un tipo de movimiento (lineal, senoidal,...)

Usando esta misma escena podemos manipular funciones no lineales en el gráfico de posición y establecer las diferencias con las lineales: espacio recorrido en una misma unidad de tiempo, tipo de velocidad, qué ocurre en el movimiento cuando la pendiente del gráfico de velocidad es positiva o bien negativa,...

La posibilidad de crear mundos con varios personajes ofrece la oportunidad de establecer comparaciones con diferentes tipos de gráficos: a trozos, lineales, exponenciales, senoidales,... así como usar este material a otros niveles.

## PUESTA EN COMÚN Y CONCLUSIONES FINALES

Empleando los mundos de ascensores y payasos se han descrito actividades para:

- mostrar la existencia de un movimiento de velocidad constante que proporciona el mismo desplazamiento en el mismo intervalo de tiempo que uno dado de velocidad variable.
- para obtener la relación entre el espacio recorrido y el área bajo la gráfica de la velocidad.

Las gráficas de velocidad de las actividades propuestas no siempre son continuas. En este entorno no tiene especial relevancia si la función de posición es derivable o no en todos los puntos, pues en ningún caso, como se ha dejado dicho al principio, se pretende realizar el cálculo explícito de la pendiente (de la función de posición en un punto). Sin embargo, una actividad donde la gráfica de posición sí sea derivable y la velocidad no sea constante puede resultar muy interesante para finalizar este estudio. Dicha actividad constituye el argumento desde el que realizar una puesta en común con el objeto de reestructurar los resultados parciales obtenidos.

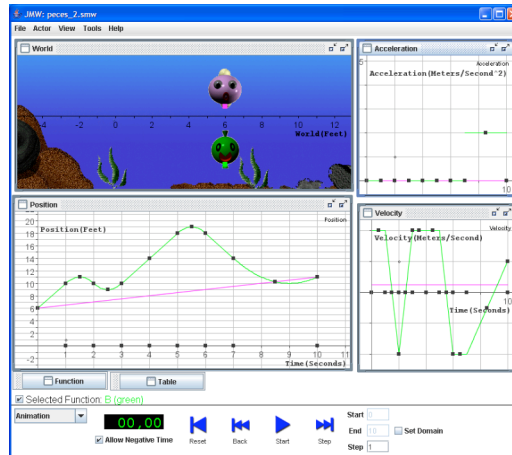
### Actividad final

A partir de una escena en la que un pez bebé cambia de velocidad con frecuencia mientras que el adulto, pacientemente, mantiene siempre la misma velocidad, se pide a los estudiantes que ajusten la gráfica de velocidad del pez adulto para que ambos, partiendo simultáneamente del mismo punto, lleguen al final del trayecto a la vez.

El resultado final dado por los estudiantes será del tipo al mostrado en la figura inferior, donde puede observarse, una vez más, que

- para un movimiento de velocidad variable es posible determinar otro de velocidad constante (velocidad media del primero) con igual desplazamiento.

- en algún momento la velocidad instantánea del pececito ha coincidido con su velocidad media, que es la que lleva el pez adulto
- el área encerrada por la gráfica de la velocidad coincide con el desplazamiento efectuado



Si la situación fuese propicia, podríamos finalizar la puesta en común diciendo que “simbólicamente” lo deducido, cuando “la gráfica de la función de posición no tiene picos”, se expresa en la forma siguiente (no es imprescindible dar más significado a los símbolos empleados):

$$f(x) \text{ (} \rightarrow \text{ velocidad variable) } \quad \text{y} \quad g(x) = f'(c)x + n \text{ (} \rightarrow \text{ velocidad constante)}$$

$$\text{Gráficos de posición} \rightarrow f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$$

$$\text{Gráfico posición } g \text{ y velocidad: } g(b) - g(a) = f'(c)(b - a)$$

$$\text{Gráfico posición } f \text{ y velocidad: } f(b) - f(a) = \underbrace{\text{Área "bajo" gráfica velocidad asociada a } f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

$$\wedge$$

$$\boxed{f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx}$$

Globalmente, con todas estas actividades se ponen al alcance del estudiante dos potentes resultados matemáticos, el Teorema del Valor Medio y la Regla de Barrow. Para ello nos hemos ayudado de una situación física acompañada de una descripción gráfica en un contexto intuitivo.

## BIBLIOGRAFÍA

Jeremy Roschelle and James J. Kaput. “SimCalc MathWorlds: Composable Components for Calculus Learning” (<http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/cacm.pdf>)

<http://www.simcalc.umassd.edu/projects/role/technology/software.php>