



Real Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales

Técnicas de recuento

IX SEMINARIO DE ESTIMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO
Madrid, 8 y 9 de abril de 2016

Mireia López Beltran

mireia.lopez@gmail.com

Universitat Pompeu Fabra e

ICE Universitat Politècnica de Catalunya



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Institut de Ciències de l'Educació

Pequeña presentación



Generalitat de Catalunya
**Departament
d'Ensenyament**



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

Institut de Ciències de l'Educació



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

Escola Universitària d'Enginyeria
Tècnica Industrial de Barcelona



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

Facultat d'Informàtica de Barcelona



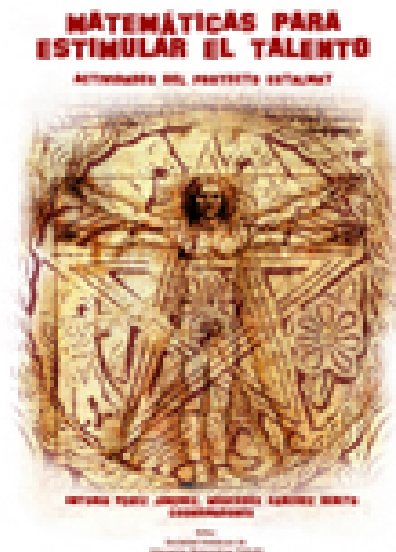
La sesión

Matemáticas para estimular el talento (2009)

Antonio Pérez Jiménez y Mercedes Sánchez Benito
(coordinadores)

Editorial: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

Capítulo Técnicas de recuento por Lourdes Figueiras, Pura
Fornals y Antoni Gomà





Objetivos de la sesión

- ❑ Permitir que el alumnado **razone** y **deduzca** distintas técnicas de recuento a partir de la **manipulación de materiales**. Se presta una especial atención al uso de diagramas de árbol y a la formulación de la regla del producto
- ❑ Familiarizar a los estudiantes con el uso de coeficientes binomiales, deduciendo algunas de sus propiedades a partir de problemas de conteo sencillos
- ❑ Relacionar los coeficientes binomiales con el triángulo de Tartaglia y explorar algunas de sus propiedades.

¿Por qué las técnicas de recuento?

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 5. Estadística y probabilidad		
Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.	1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º ESO


Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Bloque 5. Estadística y Probabilidad		
<p>Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación.</p> <p>Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.</p> <p>Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.</p> <p>Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.</p> <p>Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.</p> <p>Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.</p> <p>Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.</p> <p>Diagrama en árbol.</p>	<p>1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.</p> <p>2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</p> <p>3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.</p>	<p>1.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.</p> <p>1.2. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.</p> <p>1.3. Emplea el vocabulario adecuado para interpretar y comentar tablas de datos, gráficos estadísticos y parámetros estadísticos.</p> <p>1.4. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.</p> <p>2.1. Discrimina si los datos recogidos en un estudio estadístico corresponden a una variable discreta o continua.</p> <p>2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.</p> <p>2.3. Calcula los parámetros estadísticos (media aritmética, recorrido, desviación típica, cuartiles,...), en variables discretas y continuas, con la ayuda de la calculadora o de una hoja de cálculo.</p> <p>2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencias, mediante diagramas de barras e histogramas.</p> <p>3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.</p> <p>3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.</p>



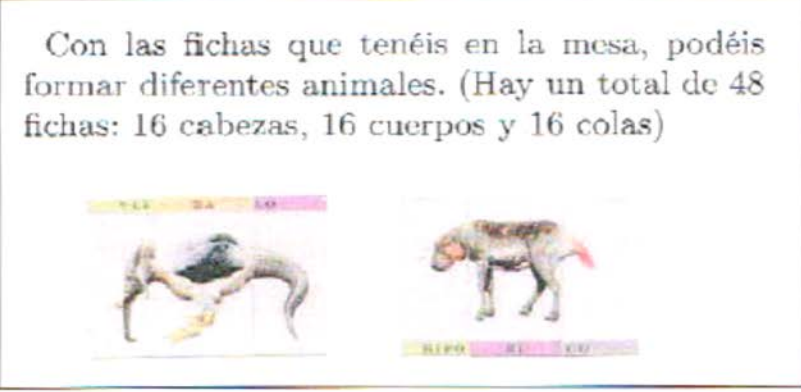
Esquema de la sesión

- Actividad 1: Contar animales
- Actividad 2: La regla del producto
- Actividad 3: Contar banderas
- Actividad 4: Selección de problemas
- Actividad 5: Contar caminos
- Actividad 6: El juego de ESTALMAT

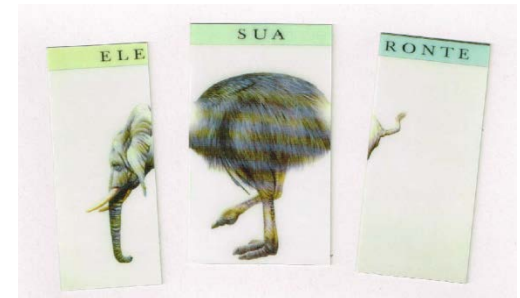
1a actividad: Contar animales



Con las fichas que tenéis en la mesa, podéis formar diferentes animales. (Hay un total de 48 fichas: 16 cabezas, 16 cuerpos y 16 colas)



1. Con las fichas que tienes sobre la mesa.
¿Cuántos animales diferentes puedes hacer?
Explica con detalle qué haces para llegar a la solución
2. ¿Cuántos de estos animales tiene cabeza de cocodrilo y cola de elefante?
3. ¿Cuántos de estos animales tienen cuerpo de camaleón?



2a actividad: Regla del producto

4. Un restaurante te ofrece tres posibilidades para un primer plato, dos para el segundo y cinco posibilidades de postres. Cuántas posibilidades hay de escoger un menú con primer plato, segundo plato y postres?

30 possibilitats, perquè si tenim 3 primers plats i dos segons plats, podem fer 6 plats entre el primer i el segon després el multipliquem per 5 postres possibles i $6 \cdot 5$ dona 30 menús.

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$

segon plat i postres?

Hi han 30 possibilitats 3 primers \times 2 segons \times 5 postres.

$$\begin{array}{c} 1^2 \\ 1^2 \\ 1^n \end{array} \times \begin{array}{c} 2^2 \\ 2^n \end{array} \times \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} = 30$$

res?

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30 \text{ possibilitats}$$

1^{er} plat \uparrow 2^{on} plat \uparrow postres

2a actividad: Regla del producto

5. Proponed un problema similar que se resuelva usando la misma estrategia que habéis usado en los problemas anteriores. Explicad cuál es esta estrategia

fet servir en els problemes anteriors. Expliqueu quina és aquesta estratègia.

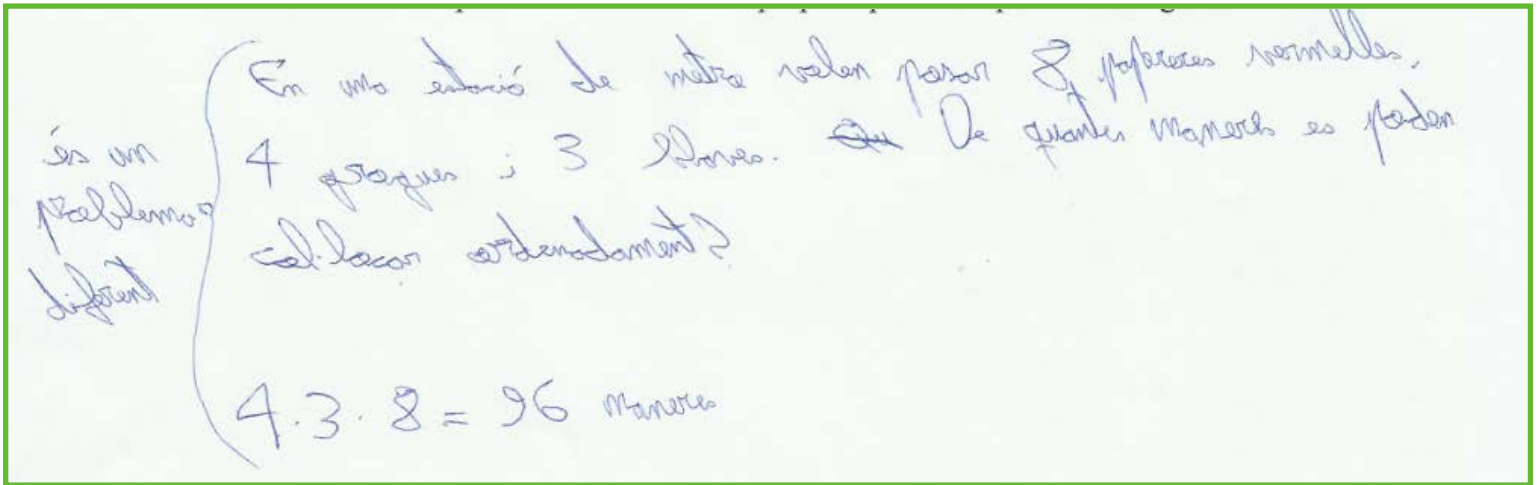
Hi han tres grups de menjars (7^{opcions} de xocolata, 13^{opcions} de entrepans i 15^{opcions} de cocacola). Quantes combinacions

Hi han? 1365

(si n'hi agafes
un de cada)

Hay tres grupos de comida (7 opciones de chocolate, 13 opciones de bocadillos y 15 opciones de cocacola). ¿Cuántas combinaciones hay? 1365
(si escoges una de cada)

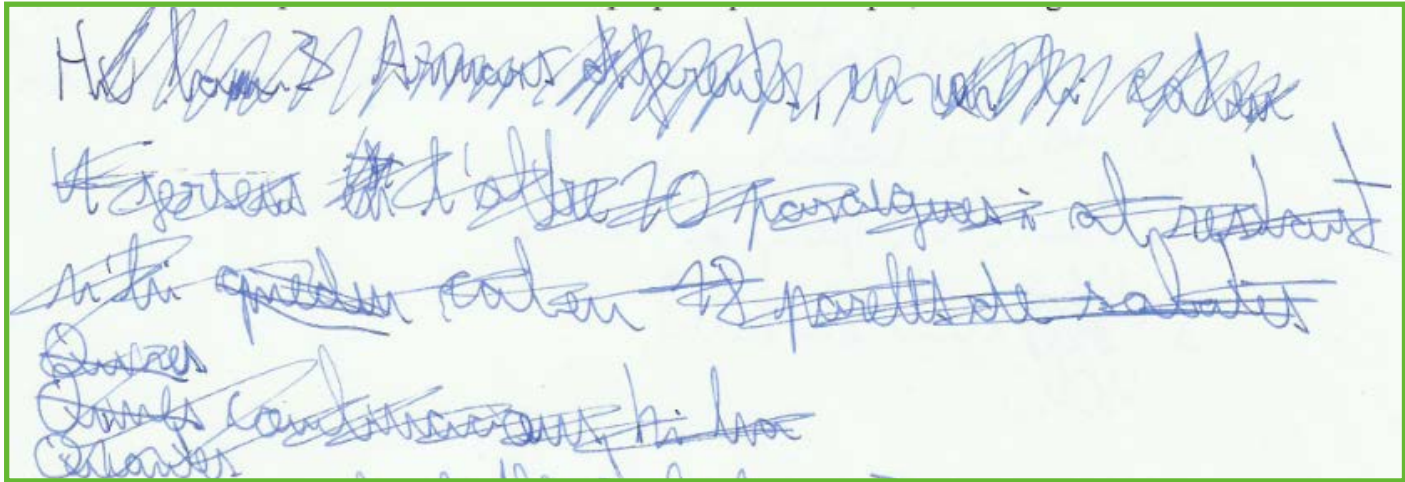
2a actividad: Regla del producto



En una estación de metro quieren poner 8 papeleras rojas, 4 amarillas y 3 azules. ¿De cuántas maneras se pueden colocar ordenadamente?

(es un problema diferente)

2a actividad: Regla del producto

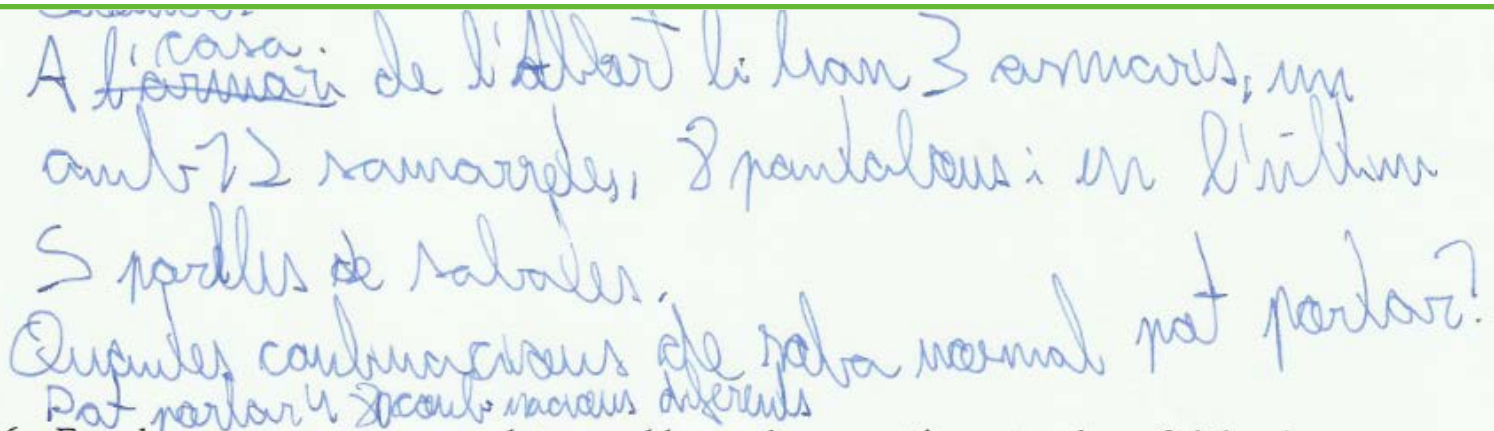


Hay 3 armarios diferentes, en uno caben 4 jerséis en otro 20 paraguas y en el restante caben 18 pares de zapatos.
¿Qué/Cuántas combinaciones hay

2a actividad: Regla del producto

Hay 3 armarios diferentes, en uno caben 4 jerséis en otro 20 paraguas y en el restante caben 18 pares de zapatos.

¿Qué/Cuántas combinaciones hay



A la casa de l'Albert li han 3 armarios, un amb 22 samarques, 8 pantalons i en l'últim 5 parells de sabates.
Quantes combinacions de roba normal pot portar?
Pot portar 480 combinacions diferents

En casa de Albert hay 3 armarios, uno con 22 camisetas, 8 pantalones y en el último 5 pares de zapatos.

¿Cuántas combinaciones de ropa normal puede llevar?

Puede llevar 480 combinaciones diferentes

2a actividad: Regla del producto

A l'armari hi ha 8 camisetes diferents, 11 pantalons i 20 parells ^{de} sabats. Quantes possibilitats
Ainc de triar el que em vull posar, sempre semblar un payaso?

$$8 \cdot 11 \cdot 20 = 1760 \text{ possibilitats}$$

$$\boxed{1/1760}$$

En el armario hay 8 camisetas diferentes, 11 pantalones y 20 pares de zapatos. ¿Cuántas posibilidades tengo para escoger que me quiero poner sin parecer un payaso?

$$8 \cdot 11 \cdot 20 = 1760 \text{ posibilidades}$$

$$1/1760$$

¿Posibilidades
Probabilidades?

2a actividad: Regla del producto

Exercici llibre (ex 5) En un un examen tipus test hi ha 5 preguntes A, B o C serien les respostes. ~~La solució seria 3⁵=45~~. Si el examen el fas a "boleo", ja que hi ha 243 possibles resultats, ~~hi ha~~ hi ha un 0,4% per treure un 10.

$$3^5 = 243$$

En un examen tipo test hay 5 preguntas A, B o C serían las respuestas. ~~La solución sería 3⁵=45~~. Si el examen lo haces a "boleo", ya que hay 243 posibles resultados, hay un 0'4% para sacar un 10.

$$3^5 = 243$$

¿Posibilidades
Probabilidades?

2a actividad: Regla del producto

En un examen de tipus test hi ha 5 preguntes i a cada pregunta 3 possibles respostes, quantes respostes diferents podem trobar?

243, perquè a cada pregunta poden respondre 3 coses diferents i 3^5 són 243.

2a activitat: Regla del producte

Avi tenim 3 classes: Matres, Català i Naturals.

A matres, podem triar entre: fer una Fitxa d'operacions, dibuixar un espiral màgic o calcular el màxim nombre de decimals del nombre π .

A català, podem preparar-nos un diccionari només.

A naturals, podem fer:

- Disseccionar una sardina.
- Preparar una exposició oral
- Quantes combinacions tenim?

2a actividad: Regla del producto

Hi ha 5 primers plats, 12 segons plats i 9 postres.

L'estrategia és $A \cdot B \cdot C = ABC$

$$5 \cdot 12 \cdot 9 = 540$$

Hay 5 primeros platos, 12 segundos platos y 9 postres.

La estrategia es $A \cdot B \cdot C = ABC$

$$5 \cdot 12 \cdot 9 = 540$$

¿Problema similar?

¿Creatividad?

2a actividad: Regla del producto

6. Se quiere proponer un examen con tres problemas de geometría, cuatro de grafos y dos de probabilidad. ¿De cuántas maneras se puede organizar el examen si todas las preguntas de un mismo ámbito han de ir juntas?

Avi tenim 3 classes: Matemàtiques, Català i Naturals.

A matemàtiques, podem triar entre: Fer una fitxa d'operacions, dibuixar un espiral màgic o calcular el màxim nombre de decimals del nombre π .

A català, podem preparar-nos un diccionari només.

A naturals, podem fer:

- Disseccionar una sardina.
- Preparar una exposició oral
- Quantes combinacions tenim?

¿Problema similar?

¿Creatividad?

2a actividad: Regla del producto

En un ball hi han 8 homes, 8 dones, 8 nens i 8 nenes. Quantes "famílies" podem formar?
(1 pare, 1 mare, 1 nen, 1 nena)

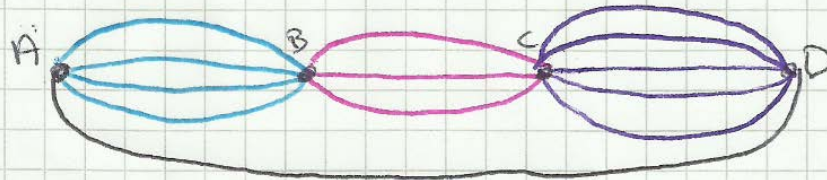
Seguint l'estratègia ^{elèvem} del nº de files al nº de columnes:

8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8
8	8	8	8

$= 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 = 4096$

En un baile hay 8 hombres, 8 mujeres, 8 niños y 8 niñas.
¿Cuántas "familias" pueden formar? (1 padre, 1 madre, 1 niño y 1 niña)

2a actividad: Regla del producto



Segons el dibuix quants camins possibles hi ha per fer el recorregut d'A a D?

Según el dibujo, ¿Cuántos caminos posibles hay para hacer el recorrido de A a D?

3a actividad: Contar banderas

En esta actividad queremos construir banderas de 4 franjas, lo podéis hacer con las tiras de cinco colores que os hemos proporcionado.

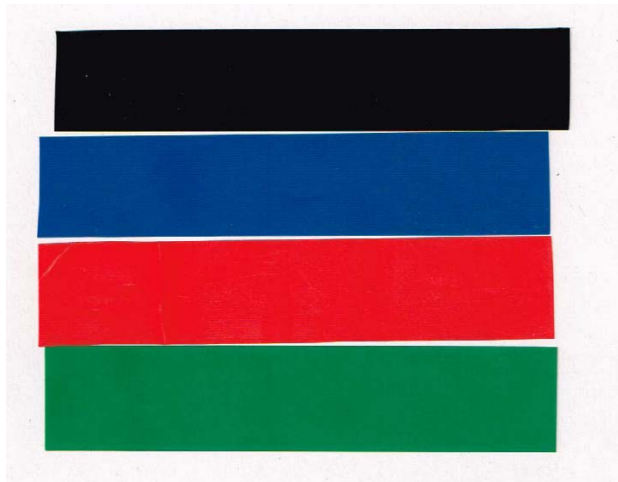
1. ¿Cuántas banderas diferentes podemos hacer que tengan 4 franjas?
2. ¿Cuántas banderas de 4 franjas podemos hacer que tengan exactamente dos colores diferentes?
3. ¿Cuántas que tengan exactamente tres colores diferentes?



3a actividad: Contar banderas

Observación:

El enunciado evita intencionadamente imponer condiciones acerca de la repetición o la ordenación de colores, así como del hecho que las franjas puedan ser consideradas horizontal o verticalmente.





3a actividad: Contar banderas

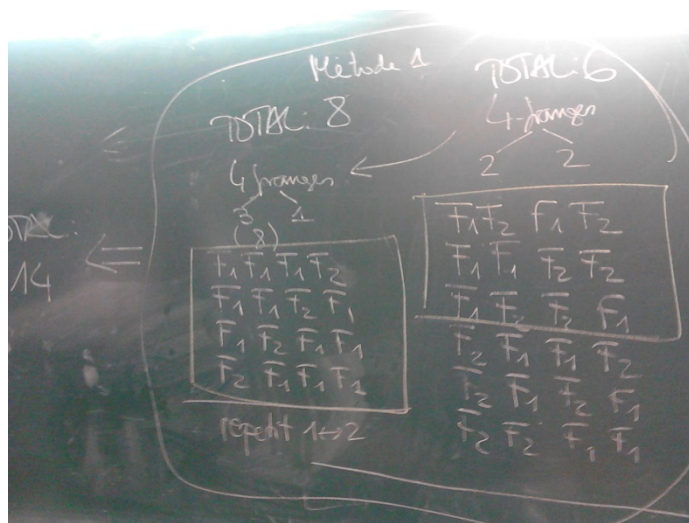
Los alumnos se dan cuenta que el orden y la repetición son consideraciones que condicionan el cómputo de la solución.

Una vez se han hecho evidentes tales consideraciones acordamos cuáles aboradremos en la sesión:

- Consideramos únicamente las banderas con las franjas horizontales.
- El orden de los colores en las franjas da lugar a banderas diferentes.
- Las franjas son indivisibles.
- Dos franjas del mismo color son indistinguibles.
- Dos franjas del mismo color que aparezcan seguidas siguen computándose como dos franjas.

3a actividad: Contar banderas

2. ¿ Cuántas banderas de 4 franjas podemos hacer que tengan exactamente dos colores diferentes?



Primero se propuso contar directamente cuantas posibilidades hay.

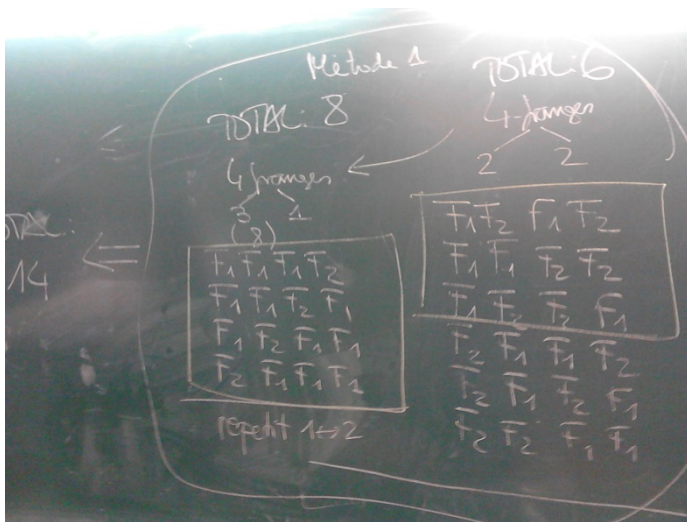
Surge la propuesta de primero contar de las 4 franjas si hay 3 de un color y una de otro.

Después contamos cuando hay dos de cada color.

Hay que reflexionar que las dos situaciones no son las mismas.

También vemos que lo que hemos escrito con Franja1 y Franja 2, también lo tenemos que considerar Franja2 y Franja1

3a actividad: Contar banderas



Tenemos por tanto:

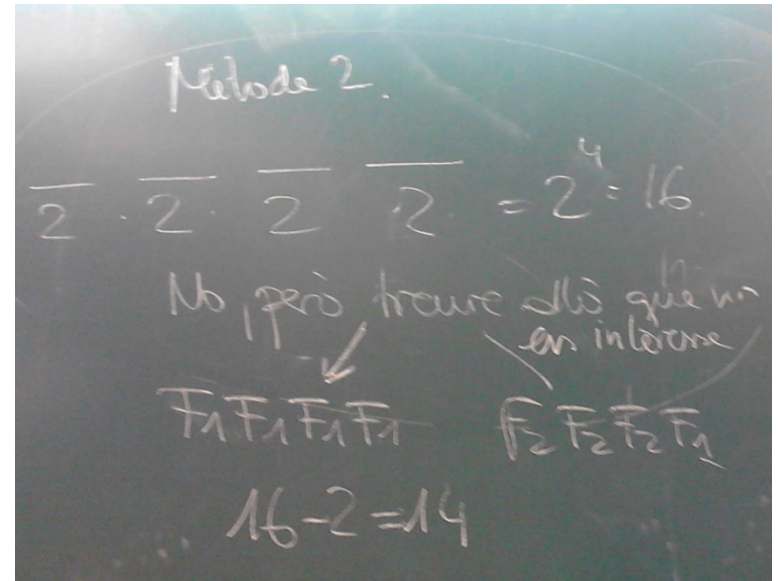
- 7 posibilidades (emmarcadas en la fotografía)
- Para cada una de estas 2 opciones F1-F2

Luego nos falta tener en cuenta de cuántas maneras podemos escoger 2 colores de entre los 5 que podemos.

Antes de abordar esta cuestión surge la propuesta de contar esta primera parte de otra manera.

3a actividad: Contar banderas

Se plantea partir del total de posibilidades y quitar aquellas que no nos interesan. Queremos colocar F1-F2 en las cuatro posiciones posibles: calculan que $2^4=16$ Y luego se dan cuenta que solo tenemos que quitar (resetar) los casos que nos darían solo un color, en este caso 2.

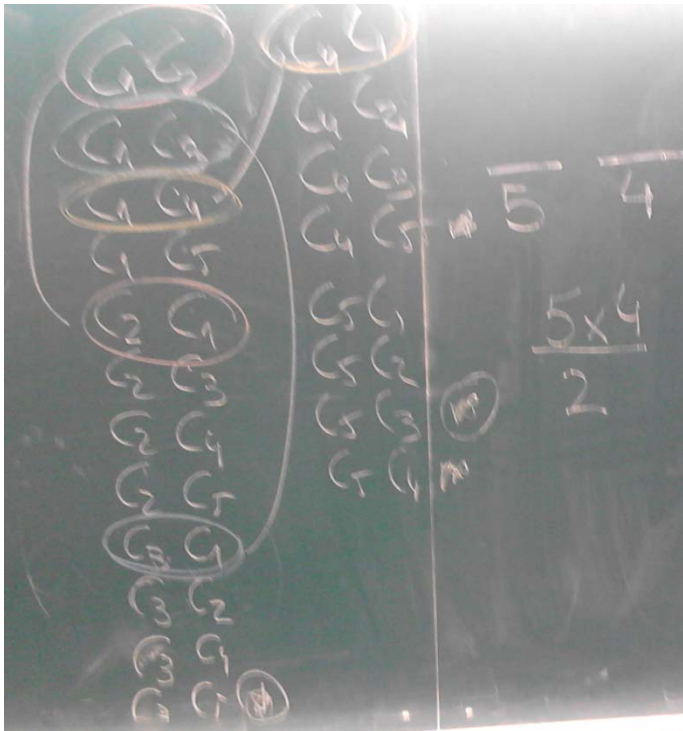


Hemos calculado esta primera parte de dos maneras. Tenemos el resultado parcial de 14, ahora debemos abordar la parte que tenemos pendiente.

¿Cuántas posibilidades hay de escoger dos colores de un total de cinco?

3a actividad: Contar banderas

¿Cuántas posibilidades hay de escoger dos colores de un total de cinco?



Escribimos todas las opciones y observamos que están repetidas todas dos veces ya que el **orden** no importa.

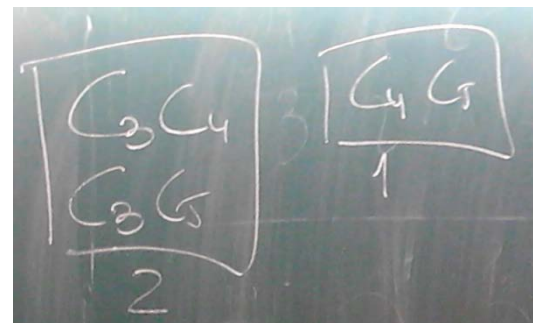
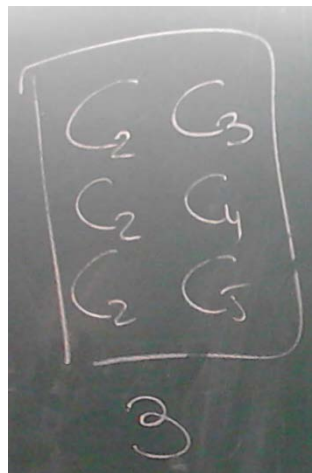
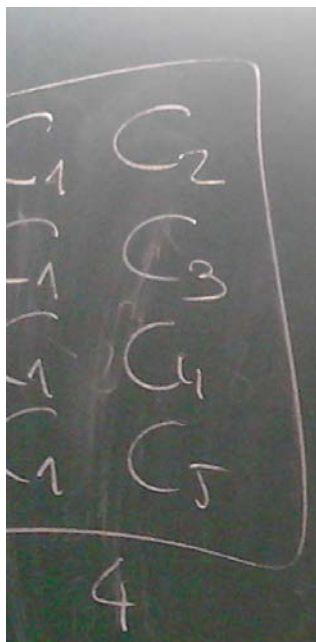
Por eso tenemos:

$5 \cdot 4 / 2 = 10$ posibilidades

3a actividad: Contar banderas

¿Cuántas posibilidades hay de escoger dos colores de un total de cinco?

En este caso también surge una segunda aproximación al problema



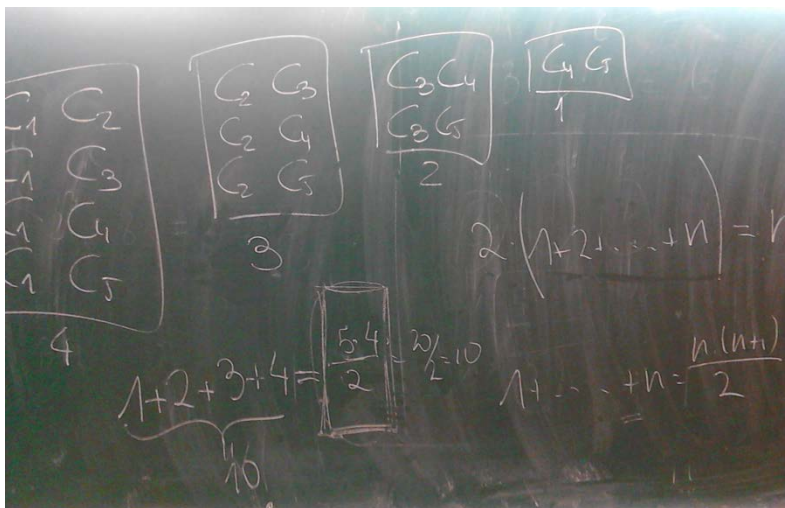
Observan que con el primer color hay 4 opciones diferentes. Luego si ya no queremos repetir nos quedan 3, luego 2, etc.

3a actividad: Contar banderas

Observamos que es un caso particular de una fórmula

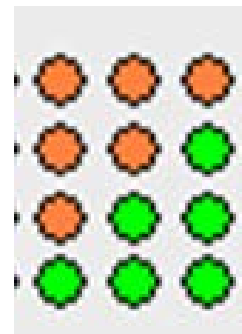
trabajado anteriormente: $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Para el caso $n=4$, tenemos que $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, que era el resultado obtenido en la aproximación anterior



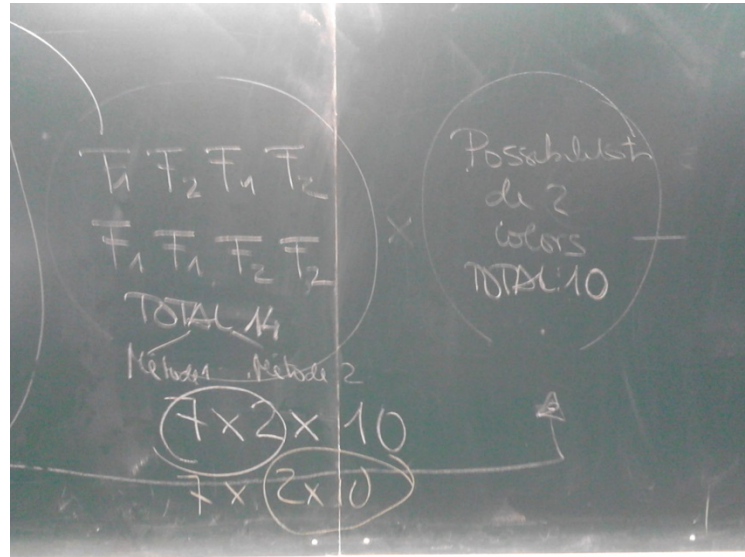
Aprovechamos ese momento para relacionar la fórmula, con otra manera de expresarla:

$$2 \cdot (1+2+3+4+\dots+n) = n \cdot (n+1)$$



3a actividad: Contar banderas

Finalmente tenemos que:



Y aprovechamos para una última reflexión final sobre la repetición F1-F2

3a actividad: Contar banderas

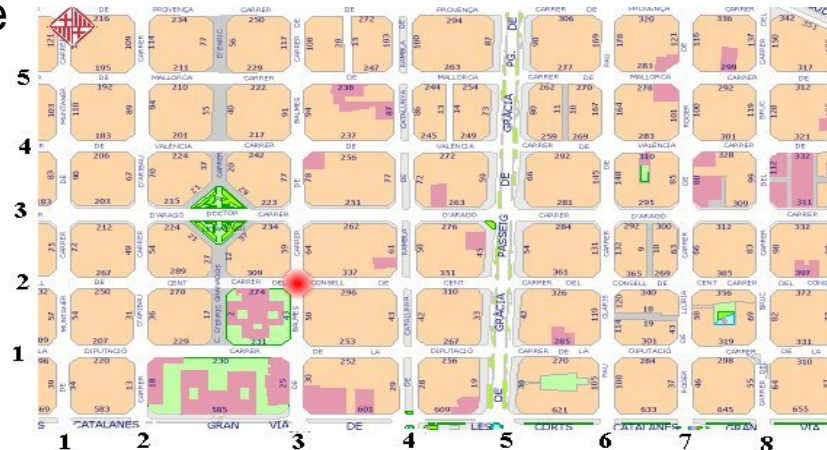
Continuación:

3. ¿Cuántas que tengan exactamente tres colores diferentes?

Reflexionar sobre la diferencia de las combinaciones de 2 posibilidades y las de tres.

$$\binom{5}{3} \quad \binom{5}{2}$$

La sesión continua con los números combinatorios contando caminos de l'Eixample



Técnicas de recuento

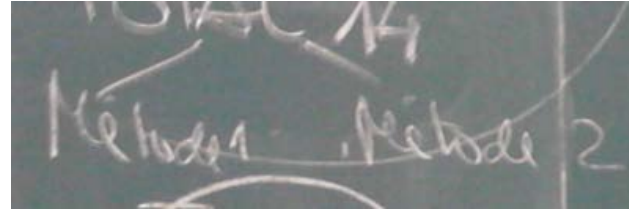
- ❑ Se introduce la sesión con **materiales manipulativos**



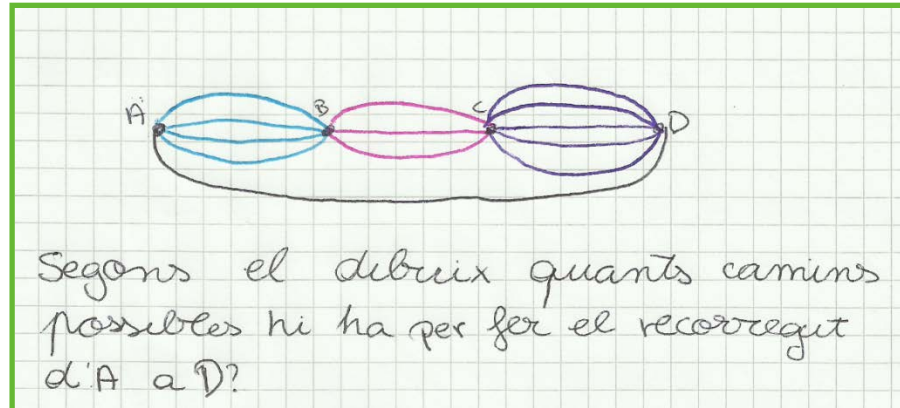
- ❑ Se trabaja a partir de situaciones-problema que se plantean a los alumnos para que ellos **razonen** y **deduzcan** las distintas técnicas de recuento.
- ❑ Las fórmulas y el vocabulario se formalizan al final de los bloques correspondientes.
- ❑ Se parte de las situaciones y se plantean discusiones sobre las características a considerar para el recuento.

Técnicas de recuento

- ❑ Se potencian las **distintas formas** de abordar el conteo de las situaciones planteadas



- ❑ No nos olvidamos de dejar un espacio para que los alumnos creen





Muchas gracias por vuestra atención

mireia.lopez@gmail.com

ESTALMAT-Catalunya és un projecte de

