¿En cuántas regiones dividen el espacio n planos?

Carlos Vinuesa, Estalmat (Albacete, 2015)

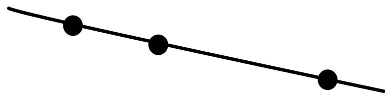
Número de regiones en que dividen el espacio d-dimensional n (hiper)planos que se cortan en posición general

nº separadores / dimensión	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	4	7	11	16	22	29
3	1	2	4	8	15	26	42	64
4	1	2	4	8	16	31	57	99
d	$\binom{0}{0}+\binom{0}{1}+\binom{0}{2}+\cdots+\binom{0}{d}$	$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}+\binom{1}{2}+\cdots+\binom{1}{d}$	$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}+\cdots+\binom{2}{d}$	$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{3}{d}$	$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{4}{d}$	$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{5}{d}$	$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{6}{d}$	$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\cdots+\binom{7}{d}$

REGLAS DE “POSICIÓN GENERAL”

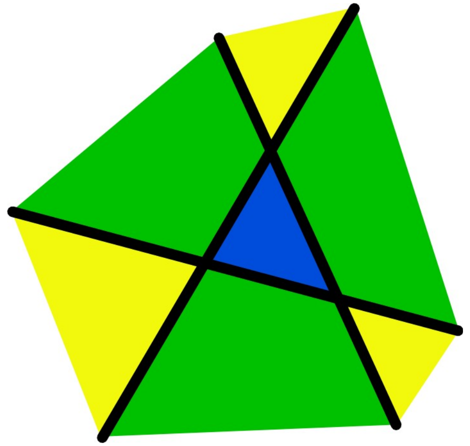
Puntos dividiendo recta

1. Que no haya dos puntos coincidentes.



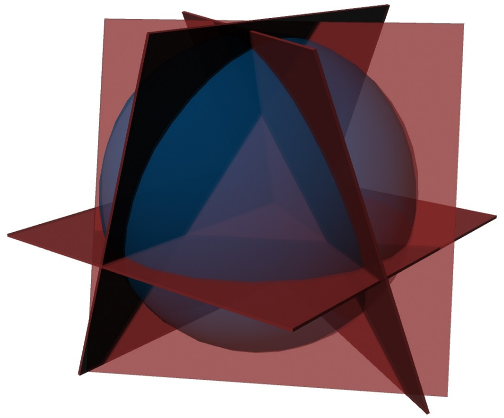
Rectas dividiendo plano

1. Que no haya ningún punto por el que pasen 3 o más rectas.
2. Que no haya dos rectas paralelas.



Planos dividiendo espacio

1. Que no haya ningún punto por el que pasen 4 o más planos.
2. Que no haya dos rectas de intersección paralelas.
3. Que no haya dos planos paralelos.



Todas las reglas se resumen en:

CALCULAR EL MÁXIMO NÚMERO DE REGIONES EN QUE PUEDE QUEDAR DIVIDIDO EL ESPACIO d-DIMENSIONAL CON n HIPERPLANOS.

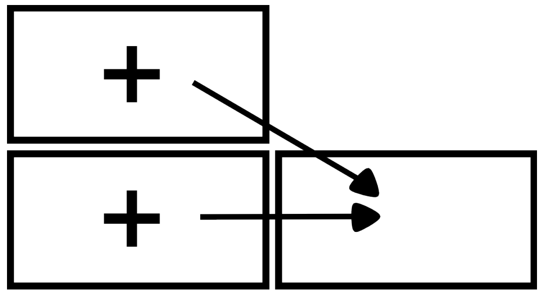
Rectas dividiendo plano

Si tenemos n-1 rectas dividiendo el plano y añadimos la n-ésima, entonces corta por la mitad a n regiones (las regiones en que queda dividida la recta por n-1 puntos). Luego la recta n-ésima añade n regiones y la fórmula es:

$$1+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n(n-1)}{2}+n+1=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$$

Planos dividiendo espacio

Si tenemos n-1 planos dividiendo el espacio y añadimos el n-ésimo, entonces corta por la mitad a tantas regiones como quedaba dividido el plano por n-1 rectas. Eso quiere decir que cualquier casilla de la tabla de la primera página se obtiene sumando la casilla inmediatamente a su izquierda con la que esta segunda tiene encima.



Aunque ya tenemos esa forma recursiva de ir completando la tabla, podemos conseguir la fórmula con números combinatorios que aparece en la fila d-ésima de la misma con el siguiente argumento:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{5}{d} + \binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{5}{d-1} = \binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{6}{d}$$ porque $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

Y como $\binom{5}{0}=\binom{6}{0}$ hemos acabado nuestra prueba.

Bibliografía:

- Vídeo de Pólya donde plantea el problema a una clase: https://vimeo.com/48768091
- Los números en inglés se llaman "cake numbers": http://en.wikipedia.org/wiki/Cake_number
- Y los del plano en lugar del espacio se llaman "lazy caterer's numbers": http://en.wikipedia.org/wiki/Lazy_caterer%27s_sequence
- Hay una observación graciosa que se puede ver en la tabla y es que este problema nos va dando para cada dimensión una sucesión que empieza con las potencias de 2 hasta 2^d y luego se estropea. Eso está "relacionado" con un problema muy bonito, que es el de marcar n puntos en el borde de un círculo, unirlos con todos los segmentos posibles y luego mirar en cuántas regiones se ha dividido el círculo. La solución comienza 1, 2, 4, 8, 16, 31... Y la demostración de qué fórmula se obtiene realmente, a cargo de Marc Noy, se puede encontrar en este artículo: http://www.maa.org/sites/default/files/Marc_Noy46792.pdf

Sobre el juego de "se podrá leer una frase sin sentido":

- El creador de la idea es mi amigo Germán Bernardo (matemático y mago, entre otras muchas cosas).
- Aparecerá un artículo que escribí cubriendo eso y varias cosas más sobre teoría de mezclas en el tercer libro de la RSME de homenaje a Martin Gardner. Título del artículo: "No por mucho remezclar terminas desordenando". Fecha de aparición: ??/??/20??.
- Aquí hay un vídeo de una charla que di en Sevilla sobre el tema, cuando tenía el artículo a medias: https://www.youtube.com/watch?v=AtI05DJUo5I