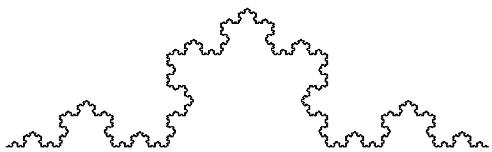
Fractales

Miguel Reyes

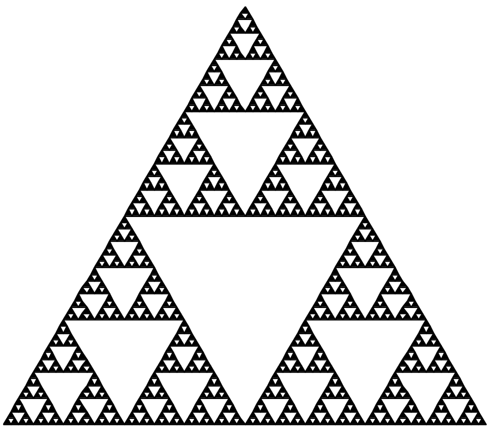
Objetivos

El objetivo que aquí nos planteamos es familiarizar a los alumnos de primer curso de Estalmat con los conjuntos fractales. El primer problema que se nos presenta es explicar qué se entiende por conjunto fractal, para lo que en principio nos podemos limitar a mostrar como ejemplos los de las siguientes figuras, que son los conjuntos de los que nos vamos a ocupar más adelante.

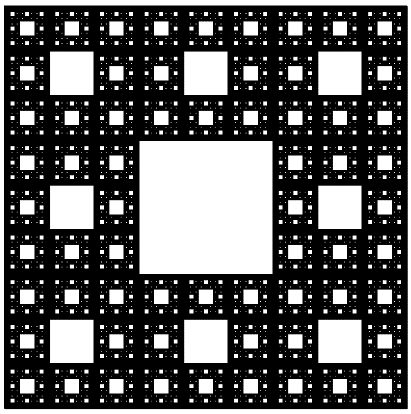
Conjunto de Cantor



Curva de Koch



Triángulo de Sierpinski



Alfombra de Sierpinski

La palabra *fractal*, referida a conjuntos matemáticos, apareció por primera vez en el año 1977 cuando Benoit Mandelbrot la utilizó en su libro [1] para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades:

- *Tienen detalles a todas las escalas*, entendiendo por esto que mirados a cualquier nivel de escala (zoom) manifiestan detalles ya observados a nivel global.

- *Son autosemejantes*, es decir, que están formados por partes que son semejantes al conjunto total.
- *Tienen una descripción algorítmica simple*, entendiendo por ello que su construcción se basa en un algoritmo sencillo.

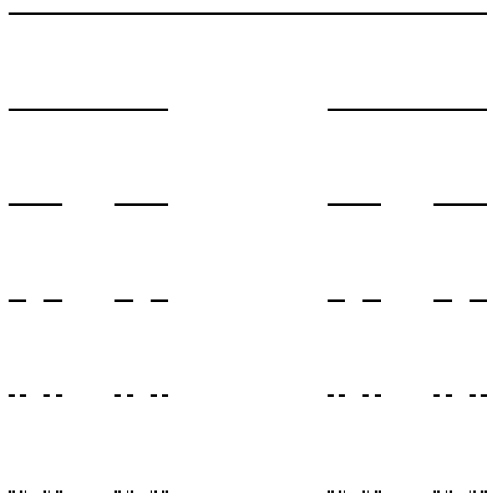
Es fácil observar que los cuatro conjuntos que aparecen en la figura anterior verifican las tres propiedades descritas. Entre las muchas actividades que se pueden plantear alrededor de los conjuntos fractales, aquí vamos a tratar las dos que consideramos más interesantes: construcción de fractales mediante algún software matemático-geométrico y una introducción a la medida y dimensión fractal.

1. Construcción de fractales

El mejor modo de entender lo que es un fractal consiste en examinar como surge geométricamente a partir de su definición algorítmica. Los cuatro fractales anteriores se construyen mediante sencillos algoritmos geométricos que podemos implementar con cualquier software geométrico del tipo de Cabri, GeoGebra, etc. Describiremos a continuación cómo se puede proceder para construir cada uno de ellos.

1.1. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es el fractal por antonomasia, y también el primero conocido. Fue ideado por Georg Cantor en 1883 como ejemplo de conjunto de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita).
Para su construcción se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central abierta (es decir, sin incluir los extremos). Cada una de las otras dos se divide en tres partes iguales y se eliminan las partes centrales (abiertas) en cada una de ellas. Se procede igual con cada uno de los cuatro segmentos que quedan. *Y se repite el proceso infinitas veces.*

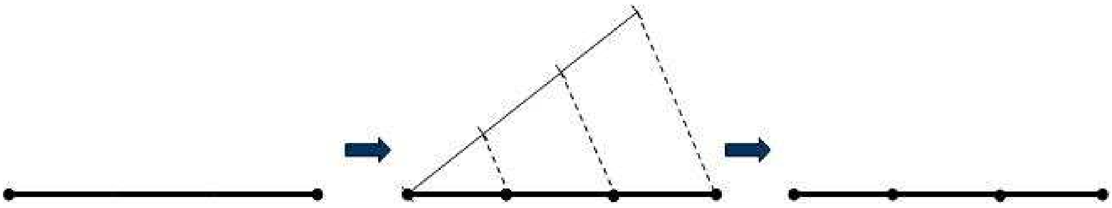


Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor

Como se observa aquí, y se repetirá en el resto de fractales, la construcción se obtiene después de infinitas repeti-

ciones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un segmento en tres partes iguales y eliminar la parte central (es decir, quedarnos con las dos partes de los extremos).
Para implementar la construcción con el software geométrico elegido se pueden seguir los siguientes pasos:

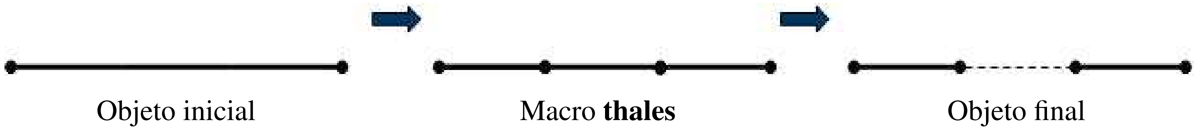
1. Construir una macro que divida un segmento en tres partes iguales: se dibuja un segmento y aplicando, por ejemplo, la regla de Thales, se obtienen los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. El objeto inicial de la macro es el segmento original y el objeto final los dos puntos obtenidos.

   División de un segmento en tres partes iguales

   Esta macro, que llamaremos **thales**, se puede guardar para usarla más adelante en la construcción de la curva de Koch.

2. Construir una macro, que llamaremos **cantor** asociada al algoritmo: se dibuja un segmento al que se le aplica la macro **thales** que lo divide en tres partes iguales y, de los tres segmentos obtenidos, dibujamos los dos de los extremos. El objeto inicial de la macro es el segmento original y el objeto final los dos segmentos de los extremos.

   Construcción de la macro **cantor**

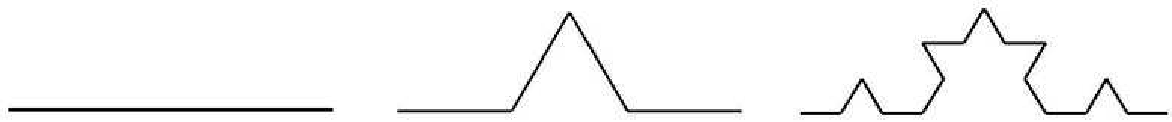
   Para la visualización correcta del algoritmo es conveniente, dependiendo del software que se use, eliminar o dibujar de un color claro (casi invisible) el segmento original. Esta macro, que llamaremos **cantor**, se guarda para usarla en el paso siguiente.

3. Se dibuja un segmento inicial al que se aplica la macro **cantor** para obtener los dos segmentos del primer paso de la construcción del conjunto de Cantor. Aplicando repetidamente la macro **cantor** a estos segmentos y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción del conjunto de Cantor.

   Conjunto de Cantor construido hasta el paso 5

1.2. La curva de Koch

La curva de Koch fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. Su construcción se hace mediante un proceso similar al del conjunto de Cantor.
Se parte de un segmento de longitud 1. El primer paso consiste en dividirlo en tres intervalos iguales, construir un triángulo equilátero sobre el intervalo central y suprimir la base de dicho triángulo, como indica la figura. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los cuatro intervalos que han resultado. *Y se repite el proceso infinitas veces.* La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

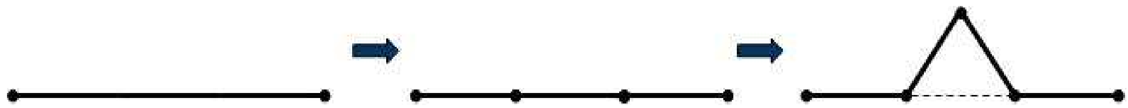


Segmento original   Paso 1   Paso 2

Primeros pasos de la construcción de la curva de Koch

La curva de Koch se obtiene después de infinitas repeticiones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un segmento en tres partes iguales y sustituir la parte central por los otros dos lados de un triángulo equilátero que se construye sobre ella.
Para implementar la construcción de la curva de Koch en el software geométrico elegido se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Construir una macro, que llamaremos **koch** asociada al algoritmo: se dibuja un segmento al que se le aplica la macro **thales** que lo divide en tres partes iguales, y sobre el segmento central se construye un triángulo equilátero. El objeto inicial de la macro es el segmento original y el objeto final son los dos segmentos de los extremos y los dos lados superiores del triángulo.

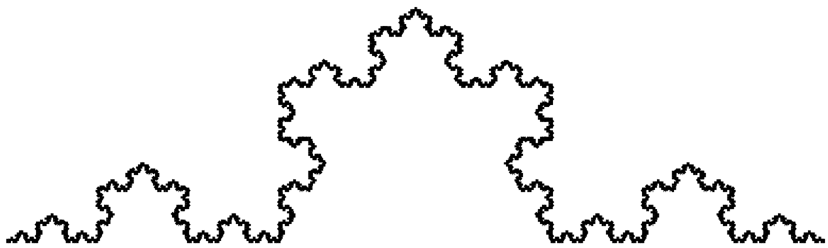
   

   Objeto inicial   Macro **thales**   Objeto final

   Construcción de la macro **koch**

   Para la visualización correcta del algoritmo es conveniente, dependiendo del software que se use, eliminar o dibujar de un color claro (casi invisible) el segmento original. Esta macro, que llamaremos **koch**, se guarda para usarla en el paso siguiente.

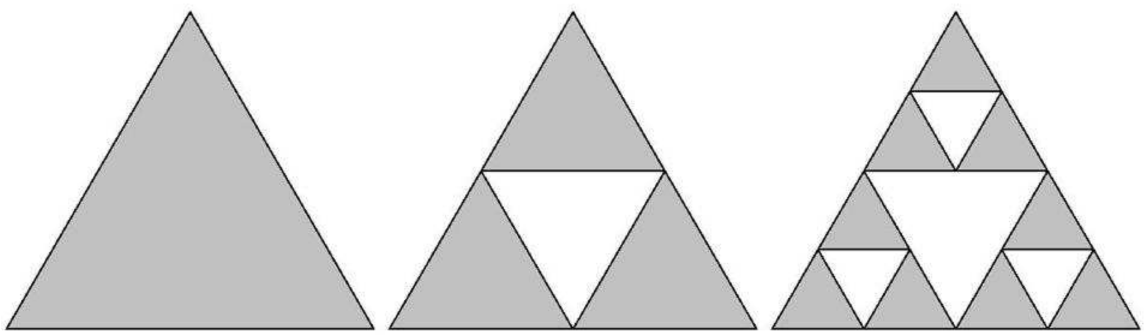
2. Se dibuja un segmento inicial al que se aplica la macro **koch** para obtener los cuatro segmentos del primer paso de la construcción de la curva de Koch. Aplicando repetidamente la macro **koch** a estos segmentos y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción de la curva de Koch.



Curva de Koch construida hasta el paso 6

1.3. El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915. Su construcción se hace mediante un proceso similar al de los conjuntos anteriores.
Se parte de un triángulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en cuatro triángulos equiláteros iguales (lo que se consigue uniendo los puntos medios de los lados) y eliminar el triángulo central, es decir nos quedamos con los tres triángulos equiláteros de los vértices. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los tres triángulos obtenidos en el paso anterior. *Y se repite el proceso infinitas veces,* obteniendo como resultado final el triángulo de Sierpinski.



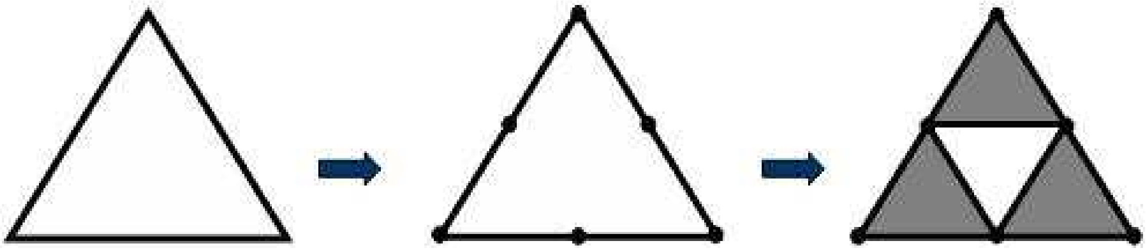
Triángulo original   Paso 1   Paso 2

Primeros pasos de la construcción del triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski se obtiene después de infinitas repeticiones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un triángulo equilátero en cuatro triángulos iguales y eliminar el triángulo equilátero central, es decir quedarnos con los tres triángulos de los vértices.
Para implementar la construcción del triángulo de Sierpinski con el software geométrico elegido se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Construir una macro, que llamaremos **sierpinski** asociada al algoritmo: se dibuja un triángulo equilátero, se hallan los puntos medios de los lados y se dibujan los tres triángulos de los vértices, que se rellenan de

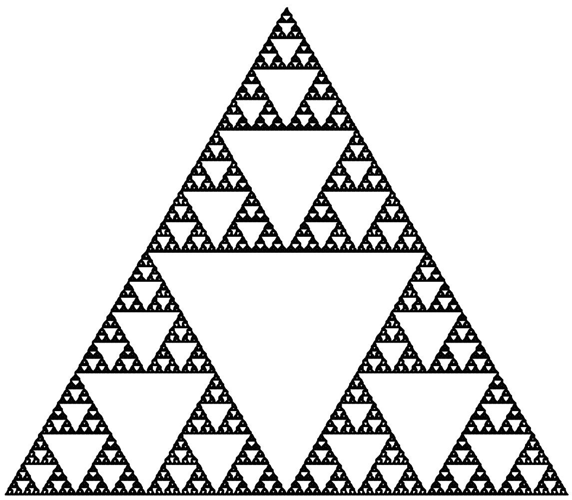
cierto color. El objeto inicial de la macro es el triángulo original y el objeto final son los tres triángulos de los extremos.



Objeto inicial | Puntos medios | Objeto final

Construcción de la macro **sierpinski**

2. Se dibuja un triángulo inicial al que se aplica la macro **sierpinski** para obtener los tres triángulos del primer paso de la construcción. Aplicando repetidamente la macro **sierpinski** a estos triángulos y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción del triángulo de Sierpinski.

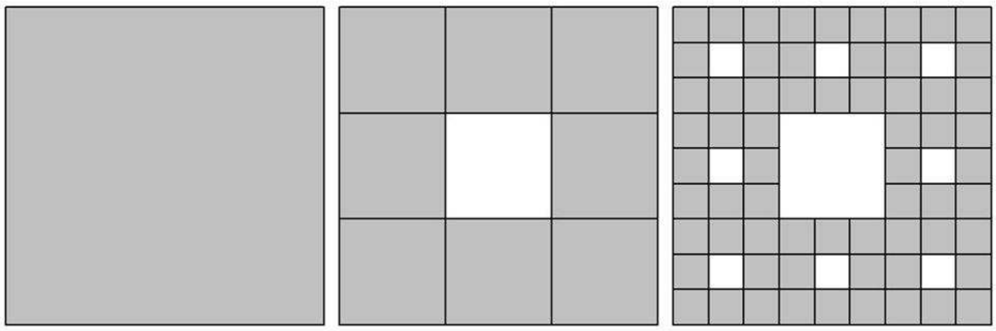


Triángulo de Sierpinski construido hasta el paso 8

Observación: En el triángulo de Sierpinski, el hecho de considerar triángulos equiláteros es irrelevante. Siempre que para la construcción de los triángulos de los extremos se utilicen los puntos medios de los lados, se obtienen resultados análogos usando cualquier tipo de triángulos.

1.4. La alfombra de Sierpinski

Se parte de un cuadrado de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en nueve cuadrados iguales (lo que se consigue dividiendo cada lado en tres partes iguales) y eliminar el cuadrado central, es decir nos quedamos con ocho cuadrados. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los ocho cuadrados obtenidos en el paso anterior. *Y se repite el proceso infinitas veces,* obteniendo como resultado final el objeto fractal conocido como alfombra de Sierpinski.

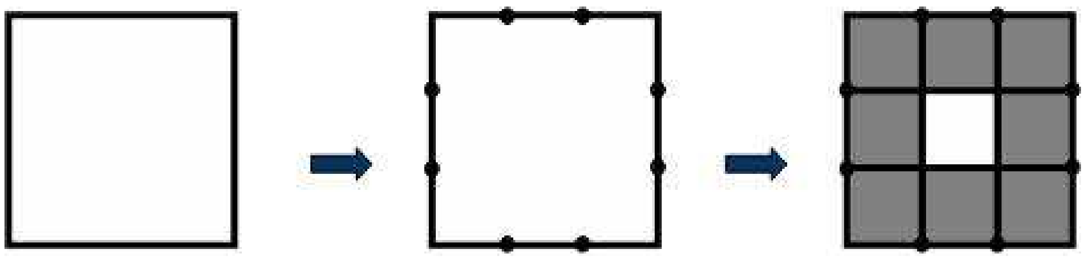


Cuadrado original Paso 1 Paso 2

Primeros pasos de la construcción de la alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski se obtiene después de infinitas repeticiones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un cuadrado en nueve cuadrados iguales y eliminar el cuadrado central, es decir quedarnos con los ocho cuadrados de la frontera.
Para implementar la construcción de la alfombra de Sierpinski con el software geométrico elegido se pueden seguir los siguientes pasos:

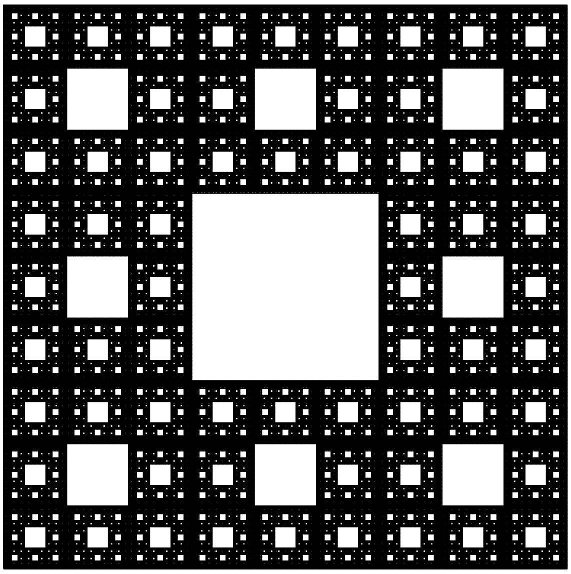
1. Construir una macro, que llamaremos **alfombra** asociada al algoritmo: se dibuja un cuadrado, se aplica la macro **thales** a sus cuatro lados y se dibujan los ocho cuadrados de la frontera, que se rellenan de cierto color. El objeto inicial de la macro es el cuadrado original y el objeto final son los ocho cuadrados de la frontera.



Objeto inicial Macro **thales** Objeto final

Construcción de la macro **alfombra**

2. Se dibuja un cuadrado inicial al que se aplica la macro **alfombra** para obtener los ocho cuadrados del primer paso de la construcción. Aplicando repetidamente la macro **alfombra** a estos cuadrados y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción de la alfombra de Sierpinski.



Alfombra de Sierpinski construida hasta el paso 5

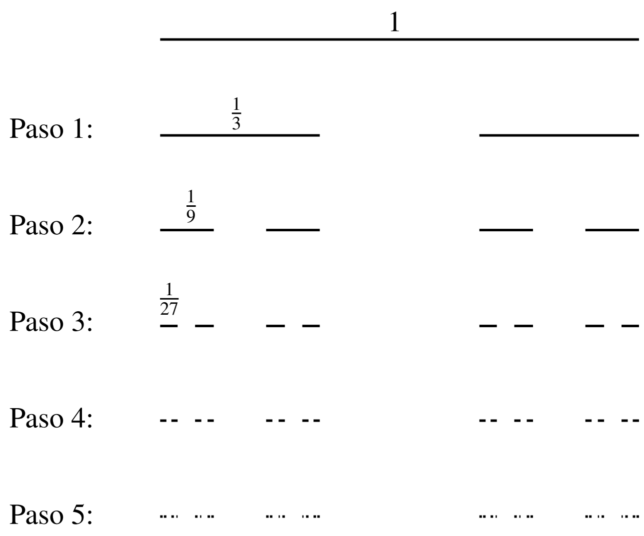
2. Medida y dimensión fractales

Los conceptos de medida y dimensión están íntimamente ligados. Por longitud se entiende medida en dimensión 1, por área medida en dimensión 2, y por volumen medida en dimensión 3. Si queremos agrupar el concepto de contar en medir, también podemos decir que contar es medir en dimensión 0.
Además, en general, cuando tenemos un objeto para medir sabemos qué medida utilizar: si se trata de un segmento o cuerda medimos con longitud (medida en dimensión 1), si es un recinto plano o terreno medimos con área (medida de dimensión 2) y si se trata de la capacidad de un recipiente con volumen (medida de dimensión 3).
En cualquier caso, cada objeto tiene una medida o dimensión adecuada. Si pretendemos calcular la longitud (medida de dimensión 1) de un cuadrado su medida sería infinita, y si pretendemos calcular su volumen (medida en dimensión 3) diríamos que su medida es cero. En cualquier caso, con las medidas anteriores, no tenemos información del tamaño del conjunto, ya que conjuntos de longitud infinita hay muchos y de muy diferentes tamaños (recta real, cuadrados, cubos, etc.) y también conjuntos de volumen cero (conjuntos finitos de puntos, segmentos, cuadrados, etc.). Para medir un cuadrado, la medida adecuada es el área (medida de dimensión 2) que nos da un valor finito y no nulo que nos informa de su tamaño real.
Hasta la aparición de los fractales, cada objeto tenía una dimensión entera y su medida asociada. Sin embargo, con los fractales nos encontramos frecuentemente con el caso de que ninguna de las medidas anteriores (contar, longitud, área, volumen) asocia un valor finito y no nulo, es decir, con el caso de que no tienen una dimensión entera adecuada, lo que hace necesario introducirnos en el mundo de las dimensiones fraccionarias (no enteras), a las que en parte deben su nombre.
En esta actividad, pretendemos poner de manifiesto a los alumnos la imposibilidad de medir los fractales con las medidas clásicas (contar, longitud, área, volumen) y, con ello, la necesidad de introducir dimensiones fraccionarias, y cómo calcularlas para los fractales considerados en la sección anterior.

2.1. Medidas fractales

Todos los fractales aquí considerados no aparecen hasta después de realizar un proceso infinito y, por tanto, para acercarnos a su medida lo haremos a través de los sucesivos pasos que nos llevan al conjunto.

El conjunto de Cantor



Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor

Puesto que los extremos del intervalo inicial y de cada uno de los intervalos que van apareciendo en la construcción del conjunto de Cantor nunca se pueden quitar, es fácil observar que el conjunto de Cantor tiene infinitos puntos, es decir que su medida en dimensión 0 es infinita.
Para medir su longitud (medida en dimensión 1) se les puede pedir a los alumnos que vayan determinándola paso a paso hasta llegar a deducir que el paso k está formado por 2^k intervalos de longitud 3^{-k} cada uno de ellos y su longitud es

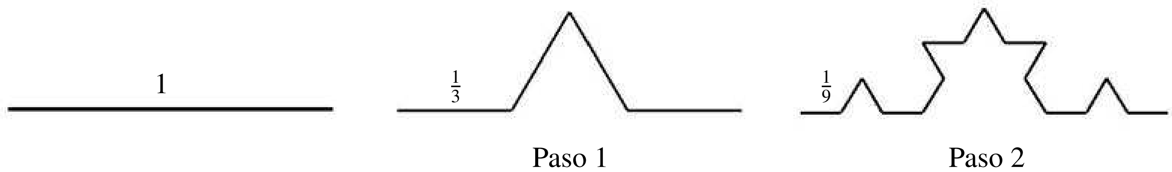
$$\text{Longitud(Paso } k) = 2^k \cdot 3^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Esto se puede conseguir, pidiéndoles que rellenen una tabla del siguiente tipo:

Paso	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$	**Conjunto de Cantor**
Número de intervalos	2	4	8	16	$\cdots$	2^k	$\cdots$	
Longitud de cada intervalo	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\cdots$	$\frac{1}{3^k}$	$\cdots$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\cdots$	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	$\cdots$	**0**

En consecuencia, ninguna de las medidas anteriores (contar y longitud) es adecuada para medir el conjunto de Cantor (mide infinito en dimensión 0 y cero en dimensión 1). Para medir el conjunto de Cantor se debería recurrir a una dimensión comprendida entre 0 y 1, cuyo valor exacto se determinará más adelante.

La curva de Koch



Primeros pasos de la construcción de la curva de Koch

Procediendo como en el conjunto de Cantor, se les puede pedir a los alumnos que vayan estudiando paso a paso la curva de Koch hasta llegar a observar que en el paso k de su construcción es una poligonal formada por 4^k segmentos de longitud 3^{-k} cada uno de ellos y su longitud es infinita:

$$\text{Longitud(Paso } k) = 4^k \cdot 3^{-k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Esto se puede conseguir, pidiéndoles que rellenen una tabla del tipo:

Paso	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	**Curva de Koch**
Número de segmentos	4	16	64	$\cdots$	4^k	$\cdots$	
Longitud de cada segmento	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\cdots$	$\frac{1}{3^k}$	$\cdots$	
Longitud total	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$	$\cdots$	$\frac{4^k}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k$	$\cdots$	∞

Para calcular el área de la curva de Koch se puede observar que en el paso 1 está contenida en un rectángulo de base 1 y altura $\frac{1}{3}$, en el paso 2 está contenida en 4 rectángulos de base $\frac{1}{3}$ y altura $\frac{1}{9}$ y, en general, en el paso k está contenida en 4^{k-1} rectángulos de base $\frac{1}{3^{k-1}}$ y altura $\frac{1}{3^k}$, siendo su área:

$$\text{Área(Paso } k) \leq 4^{k-1} \cdot \frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

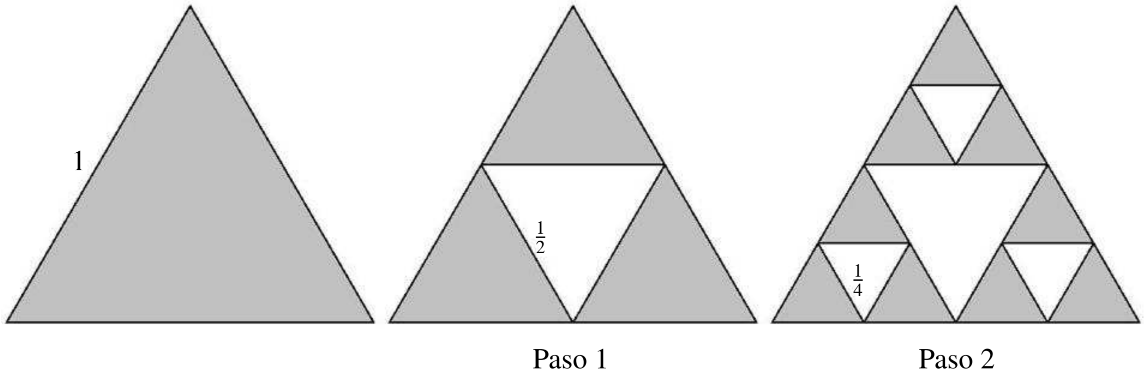
Esto se puede obtener rellenando una tabla similar a la anterior.
En consecuencia, ninguna de las medidas anteriores (longitud y área) es adecuada para medir la curva de Koch (mide infinito en dimensión 1 y cero en dimensión 2). Para medir la curva de Koch se debería recurrir a una dimensión comprendida entre 1 y 2, cuyo valor exacto se determinará más adelante.

El triángulo de Sierpinski

Procediendo paso a paso, como en los casos anteriores, se puede observar que el triángulo de Sierpinski está formado en el paso 1 por 3 triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{2}$, en el paso 2 por 9 triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{4}$, en el paso 3 por 27 triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{8}$ y, así sucesivamente, en el paso k está formado por 3^k triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{2^k}$, cada uno de ellos.
Teniendo en cuenta que en un triángulo equilátero de lado ℓ el perímetro y el lado son:

$$\text{Perímetro} = 3\ell \qquad\qquad \text{Área} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

la longitud y el área del triángulo de Sierpinski se pueden hallar por medio de una tabla como la siguiente.

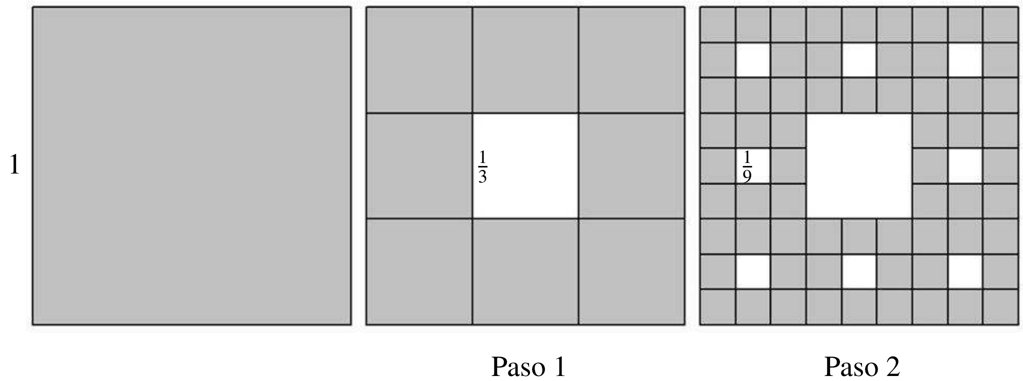


Primeros pasos de la construcción del triángulo de Sierpinski

Paso	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	**Triángulo de Sierpinski**
Número de triángulos	3	9	27	$\cdots$	3^k	$\cdots$	
Lado de cada triángulo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^k}$	$\cdots$	
Perímetro total	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{8}$	$\cdots$	$\frac{3^{k+1}}{2^k} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^k$	$\cdots$	∞
Área total	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{9\sqrt{3}}{64}$	$\frac{27\sqrt{3}}{256}$	$\cdots$	$\frac{3^k\sqrt{3}}{4^{k+1}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$	$\cdots$	**0**

En consecuencia, ninguna de las medidas anteriores (longitud y área) es adecuada para medir el triángulo de Sierpinski (mide infinito en dimensión 1 y cero en dimensión 2). Para medir el triángulo de Sierpinski se debería recurrir a una dimensión comprendida entre 1 y 2, cuyo valor exacto se determinará más adelante.

La alfombra de Sierpinski



Primeros pasos de la construcción de la alfombra de Sierpinski

Se puede observar que la alfombra de Sierpinski está formada en el paso 1 por 8 cuadrados de lado $\frac{1}{3}$, en el paso 2 por 64 cuadrados de lado $\frac{1}{9}$, en el paso 3 por 512 cuadrados de lado $\frac{1}{27}$ y, así sucesivamente, en el paso k está formada por 8^k cuadrados de lado $\frac{1}{3^k}$, cada uno de ellos.

La longitud y el área de la alfombra de Sierpinski se pueden hallar por medio de una tabla como la siguiente.

Paso	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	**Alfombra de Sierpinski**
Número de cuadrados	8	64	512	$\cdots$	8^k	$\cdots$	
Lado de cada cuadrado	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\cdots$	$\frac{1}{3^k}$	$\cdots$	
Perímetro total	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{496}{27}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	∞
Área total	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\cdots$	$\frac{8^k}{9^k} = \left(\frac{8}{9}\right)^k$	$\cdots$	**0**

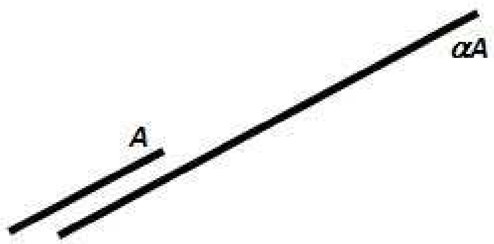
En consecuencia, ninguna de las medidas anteriores (longitud y área) es adecuada para medir la alfombra de Sierpinski (mide infinito en dimensión 1 y cero en dimensión 2). Para medir la alfombra de Sierpinski se debería recurrir a una dimensión comprendida entre 1 y 2, cuyo valor exacto se determinará más adelante.

2.2. Dimensión fractal

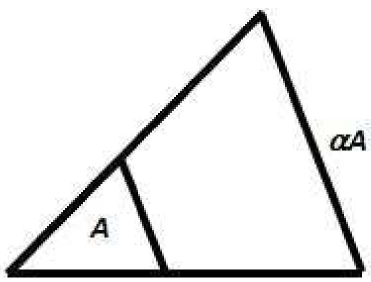
Cuando αA es semejante a A con razón α, la relación entre sus medidas es:

$$\text{medida}(\alpha A) = \alpha^d \cdot \text{medida}(A)$$

donde d es la dimensión de ambos conjuntos.
Para conjuntos de dimension entera (1 y 2) y medidas ya conocidas (longitud y área) el resultado anterior es evidente:



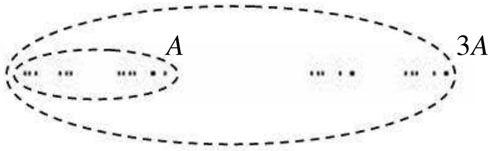
$$\textbf{longitud}(\propto A) = \propto^{1} \cdot \textbf{longitud}(A)$$



$$\textbf{area}(\propto A) = \propto^{2} \cdot \textbf{area}(A)$$

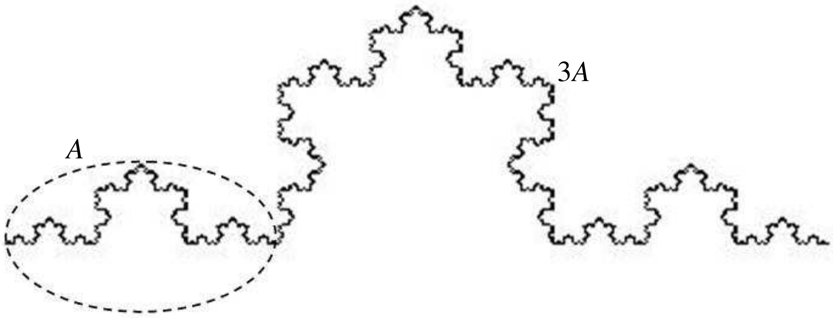
Para los fractales aquí considerados el resultado anterior permite obtener su dimensión.

Dimensión del conjunto de Cantor



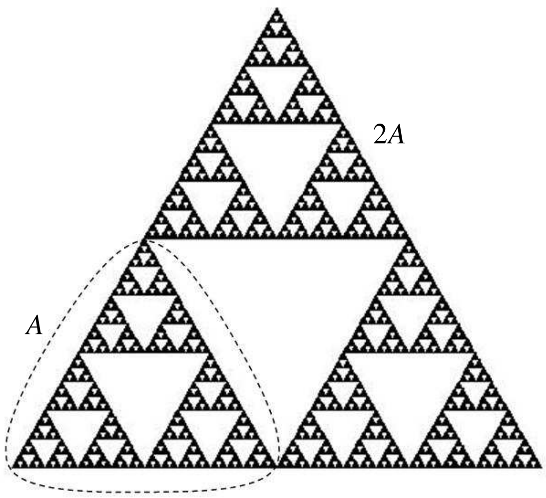
$$\left\{\begin{array}{l} \text{medida}(3A) = 3^d \cdot \text{medida}(A) \\ \text{medida}(3A) = 2 \cdot \text{medida}(A) \end{array}\right. \Longleftrightarrow 3^d = 2 \Longleftrightarrow d = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6309$$

Dimensión de la curva de Koch



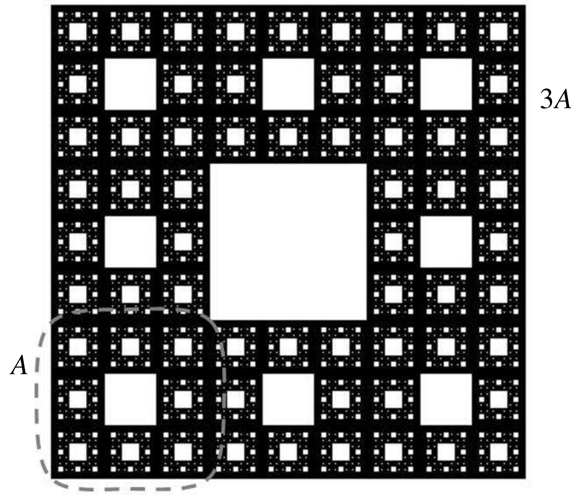
$$\left\{\begin{array}{l} \text{medida}(3A) = 3^d \cdot \text{medida}(A) \\ \text{medida}(3A) = 4 \cdot \text{medida}(A) \end{array}\right. \Longleftrightarrow 3^d = 4 \Longleftrightarrow d = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,2619$$

Dimensión del triángulo de Sierpinski



$$\left\{\begin{array}{l} \text{medida}(2A) = 2^d \cdot \text{medida}(A) \\ \text{medida}(2A) = 3 \cdot \text{medida}(A) \end{array}\right. \Longleftrightarrow 2^d = 3 \Longleftrightarrow d = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1,5850$$

Dimensión de la alfombra de Sierpinski



$$\left\{\begin{array}{l} \text{medida}(3A) = 3^d \cdot \text{medida}(A) \\ \text{medida}(3A) = 8 \cdot \text{medida}(A) \end{array}\right. \iff 3^d = 8 \iff d = \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} \simeq 1,8928$$

Orientación para el profesorado

Las dos actividades que aquí se plantean son independientes entre sí, y cada una de ellas se puede desarrollar en una sesión de una hora. En el caso de hacer las dos actividades, me parece más interesante hacerlo en el orden que aquí lo hemos hecho.
Para el desarrollo de la primera actividad, sobre construcción de fractales, es necesario que el alumno ya esté familiarizado con el software que se vaya a utilizar, para lo que es suficiente que ya lo hayan utilizado en alguna actividad previa.
En cuanto a la segunda actividad, para su desarrollo es conveniente, aunque no necesario, que el alumno haya realizado previamente alguna actividad sobre semejanzas. El hecho de que el alumno no conozca aún los logaritmos no es demasiado importante para la actividad, ya que se pueden obviar remitiéndoles a la calculadora para su cálculo.

Referencias

[1] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.

[2] Miguel de Guzmán, *Aventuras Matemáticas*, Ed. Pirámide, Madrid, 2006.

[3] Miguel Reyes, *Una introducción a la Geometría Fractal y su aplicación a la compresión de imágenes*, Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas 52 (1999), 32-55.

Miguel Reyes. Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid.