VIII Seminario sobre actividades para Estimular el Talento en Matemáticas

"Juegos con números"

Encarni Amaro Parrado
IES Virgen de la Cabeza- Marmolejo-Jaén

Albacete, 17 y 18 de Abril de 2015

Los cuatro “cuatros”

Se dice que existen multitud de números que se pueden construir utilizando exactamente cuatro “cuatros”, y todas las operaciones matemáticas que se deseen.

Por ejemplo, el cero se obtiene como 4-4+4-4, mientras que el 1 es igual a 4-4+4/4

¿Hasta qué número serías capaz de obtener con cuatro “cuatros”?

Lo más curioso es que en 1º Estalmat empezaron a utilizar factoriales

El 37

Comenzamos realizando operaciones con el número 37, multiplicándolo por los múltiplos de 3:

3 x 37 = 111

6 x 37 = 222

9 x 37 = 333

Es fácil deducir qué ocurre al multiplicarlo por 12, 15, 18, 21, 24 y 27.

18x37=666
21x37=777
24x37=888
27x37=999

El 37

Si seguimos multiplicando, obtendremos:

30 x 37 = 1110

33 x 37 = 1221

36 x 37 = 1332

¿Sabrías cuáles serían los siguientes resultados? ¿Eres capaz de encontrar la razón por la que se obtienen las secuencias anteriores?

39x37=1443

42x37=1554

45x37=1665

Razón: Todos son múltiplos de 3x37=111

Un número con mucha historia

Toma dos números entre 1 y 50, a y b (a menor que b), y súmalos. Al resultado obtenido, súmale b. Ahora tienes tres números, con los que puedes empezar a crear una sucesión que obtendrás sumando cada vez los dos últimos números obtenidos.

Cuando tengas por los menos doce elementos, divide los dos últimos números obtenidos y compara con tus compañeros.

Ejemplo: 3 y 12 $\rightarrow$15, 27, 42, 69, 111, 180, 291, 471, 762, 1233, 1995
1995/1233= 1,618…..

A todos les tiene que salir ϕ, o bueno como decía algunos, una aproximación de ϕ

Juego de “Pin y Pon”

El juego consiste en lo siguiente:

Los alumnos se ponen de pie y van diciendo un número cada uno, pero si el número que les toca decir es múltiplo de 3 o acaba en 3, deben decir Pin

Si el número que les toca decir es múltiplo de 7 o acaba en 7, deben decir Pon

Si el número es múltiplo de 3 y de 7 deben decir Pin Pon

Gana el alumno que al final se queda solo de pie.

Actividades con números y operaciones

Resta a tu año de nacimiento la suma de las cuatro cifras que lo componen. Obtendrás un número divisible por 9. ¿Por qué?

Ejemplo: 1994-23=1971 que es múltiplo de 9

La explicación es que si el número es abcd, su descomposición factorial es 1000a+100b+10c+d
Si le restamos sus cifras tendremos :
1000a+100b+10c+d-a-b-c-d=999a+99b+9c=9(111a+11b+c) que es múltiplo de 9

¿Este resultado valdría para cualquier número?

Actividades con números y operaciones

Escribe un número de dos cifras que sean diferentes; cambia el orden de las cifras. Con los dos números anteriores, resta al mayor el menor. Realiza este experimento cuatro o cinco veces, utilizando números diferentes ¿Qué observas en los resultados obtenidos? ¿Puedes dar una explicación?

Si tomamos por ejemplo el 58 y le damos la vuelta obtenemos el 85. Al restar ambos números tenemos 85-58= 27, o sea, sale un número múltiplo de 9

Explicación: Si el número es ab=10+b y el otro es ba=10b+a y los restamos, obtenemos que 10b+a-10a-b=9b-9b=9(b-a) que es múltiplo de 9

Actividades con números y operaciones

Escribe tres cifras, de modo que no sean las tres iguales. Con las tres cifras anteriores formamos un número ordenándolas de mayor a menor y otro número ordenándolas de menor a mayor. Restamos los dos números anteriores.

Al resultado obtenido le damos la vuelta a las cifras y lo sumamos con el número anterior. ¿Cuál es el resultado?

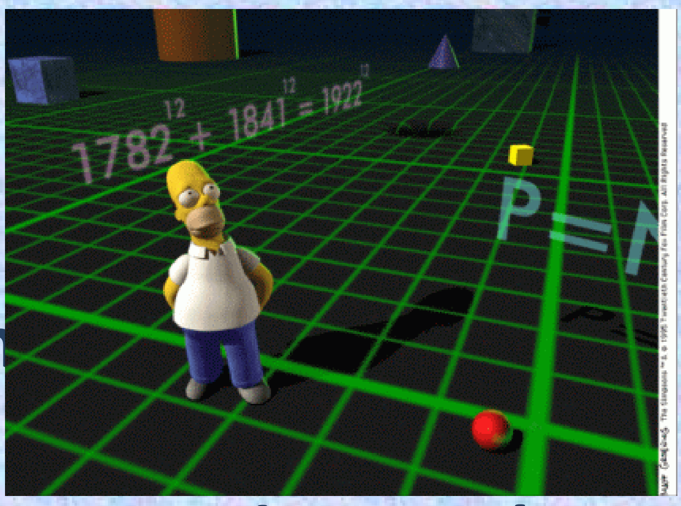
¿Siempre ocurre lo mismo? Podrías averiguar por qué.

Tomamos las cifras 5, 2 y 4. Formamos los dos números 542 y 245.
Restamos los dos números 542-245=297. Le damos la vuelta a las cifras: 792
Sumamos los dos números 297+792=1089

Ahora hay que ver porqué siempre sale el 1089

Los Simpson y las matemáticas

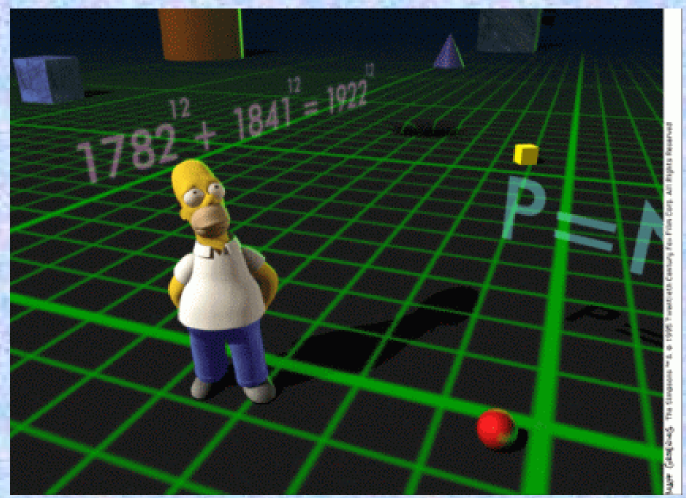
- La popular serie *Los Simpsons* contiene bastantes referencias matemáticas (hay una página web dedicada al tema http://www.simpsonsmath.com).
- Aparte de la conocida frase *¡Multiplícate por ceroi* de Bart, hay otras alusiones, a veces veladas. Así ocurre en el episodio en que Hommer pasa de su mundo plano a la tercera dimensión



Los Simpson y las matemáticas

En esta imagen (que pasa desapercibida para la mayoría de los espectadores) puede observarse:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$



Haz la comprobación con la calculadora:

$$1782^{12} + 1841^{12} =$$

Math ▲

$1782^{12}+1841^{12}$

$2.541210259 \times 10^{39}$

$$1922^{12} =$$

Math ▲

1922^{12}

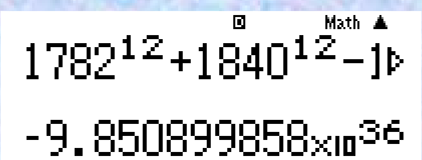
$2.541210259 \times 10^{39}$

Parece que Hommer tiene razón… ¿no?

Los Simpson y las matemáticas

- **Realiza ahora la siguiente operación con la calculadora:**

$$1782^{12}+1841^{12}-1922^{12}$$



Debería de dar 0, pero ¿qué ocurre? ¿Por qué?
Si realizamos la operación con un programa de cálculo simbólico obtenemos el siguiente resultado:

$$1782^{12}+1841^{12}=254121025{\color{red}86145891762}\ldots.$$

$$1922^{12}=254121025{\color{red}931480}\ldots.$$

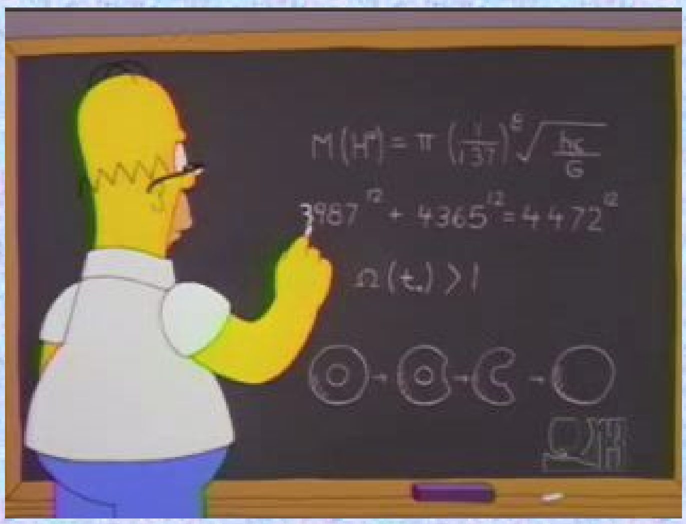
Observamos que sólo coinciden las 9 primeras cifras que son las que nos da la calculadora

Los Simpson y las matemáticas

- **El redondeo de la calculadora en la décima cifra se produce en el primer caso por exceso y en el segundo por defecto, dando una engañosa apariencia de igualdad.**
- **Alguien se dirigió a los guionistas de la serie (cinco de ellos son licenciados o doctores en Matemáticas, Física o Informática) quejándose.**

Como reacción, en un episodio posterior vemos a Hommer escribir en la pizarra:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$



Está ahora corregido el problema?

Compruébalo.

El uno

- Al calcular (1 + 2) : 3 se obtiene como resultado 1.
- Coloca entre cada dos cifras las operaciones que necesites y los paréntesis para obtener siempre 1 como resultado

- 1 2 3 4 = 1
  1 2 3 4 5 = 1
  1 2 3 4 5 6 = 1
  1 2 3 4 5 6 7 = 1
  1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
  1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

- Intenta buscar una solución que pueda servir para cualquier número de sumandos.

El uno

Filas con un número par de números

$(-1+2)\cdot(-3+4) = 1$

$(-1+2)\cdot(-3+4)\cdot(-5+6) = 1$

$(-1+2)\cdot(-3+4)\cdot(-5+6)\cdot(-7+8) = 1$

Filas con un número impar de números

$1\cdot(-2+3)\cdot(-4+5) = 1$

$1\cdot(-2+3)\cdot(-4+5)\cdot(-6+7) = 1$

$1\cdot(-2+3)\cdot(-4+5)\cdot(-6+7)\cdot(-8+9) = 1$

Los números romanos “vip”

Los alumnos van diciendo un número cada uno pero esta vez en números romanos.

Así por ejemplo deberían empezara diciendo:

Palito(I), palito palito(II), palito palito palito(III), palito uve (IV)….

Pero vamos a cambiar la forma de decir los números, asociamos a los símbolos lo siguiente:

I=“o sea”   V= “ te lo juro”   X=“ por favor”

L=“ por snoopy”

Cuadrados

El cuadrado de a0 es $a^2$00 : termina en dos ceros.

Calcula los cuadrados de 15, 25, 35, 45, 55. ¿En qué terminan?

$$15^2 = 225; \quad 25^2 = 625; \quad 35^2 = 1225; \quad 45^2 = 2025; \quad 55^2 = 3025$$

Terminan todos en 25

Busca una regla para calcular los cuadrados de 65, 75, 85, 95, 105, 195

$$a5^2 = [a \cdot (a+1)]25$$

1473 no puede ser un cuadrado perfecto ¿Cuál debe ser la última cifra de un número cuadrado perfecto?

Debe ser 0, 1 , 4, 5, 6, 9

Cuadrados

Calcula los cuadrados de 11, 21, 31, 41, 51. Todos acaban en 1.

$$11^2 = 121; \quad 21^2 = 441; \quad 31^2 = 961; \quad 41^2 = 1681; \quad 51^2 = 2601$$

Da una regla que permita calcular el resto de los cuadrados relacionándolos con los cuadrados de 10, 20, 30 ...

$$a1^2 = a0^2 + 2 \cdot a0 + 1 \qquad a1^2 = a0^2 + 2 \cdot a1 - 1$$

El cuadrado de una suma $(10+1)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2$

¿Cuál debe ser la última cifra del cuadrado de un número que acaba en 1?

La última cifra es el 1

Calcula mentalmente los cuadrados de 61, 71, 81, 91, 101, 151, 251.

Cuadrados

Calcula los cuadrados de 19, 29, 39, 49.

$$19^2 = 361; \qquad 29^2 = 841; \qquad 39^2 = 1521; \qquad 49^2 = 2401$$

Da una regla que permita calcular el resto del cuadrado relacionándolos con los cuadrados de 20, 30, 40, 50.

$$a9^2 = (a+1)0^2 - 2\cdot[(a+1)0] + 1$$

$$(20-1)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot 1 + 1$$

Calcula mentalmente los cuadrados de 59, 69, 79, 89, 99, 159, 259.

¿Cuál debe ser la última cifra del cuadrado de un número que acaba en 9?

Todos acaban en 1

Potencias

Calcula $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 ....$ **¿Cuál es la última cifra de** 3^{2015} **?**

$$3^0 = 1; \quad 3^1 = 3; \quad 3^2 = 9; \quad 3^3 = 27; \quad 3^4 = 81....$$

$$\begin{array}{l|l} 2015 & 4 \\ \hline 015 & 503 \\ \quad 3 & \end{array}$$

3^{2015} termina igual que 3^3 luego termina en 7

Calcula $7^0, 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 ....$ **¿Cuáles son las dos últimas cifras de** 7^{2015} **?**

$$7^0 = 1; \quad 7^1 = 7; \quad 7^2 = 49; \quad 7^3 = 343; \quad 7^4 = 2301....$$

7^{2015} termina igual que 7^3 luego termina en 3

Potencias

¿Cuál es la última cifra del número resultante de la siguiente operación $13^{2015}+17^{2015}-7^{2015}$?

$$13^0=1;\quad 13^1=13;\quad 13^2=169;\quad 13^3=2197;\quad 13^4=28561$$

$$17^0=1;\quad 17^1=17;\quad 17^2=289;\quad 17^3=4913;\quad 17^4=83521$$

Luego la terminación será 7+3-3=7

¿Ocurre lo mismo si la base es un número par? ¿En qué cifra acaba el número 2^{432}?

$$2^0=1;\quad 2^1=2;\quad 2^2=4;\quad 2^3=8;\quad 2^4=16;\quad 2^5=32....$$

Observamos que la única potencia que acaba en 1 es la primera, luego si el resto es 0, la terminación va a ser 6

!!!!MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN !!!!!