Fracciones continuas

XVII Seminario Estalmat

Estalmat Andalucía

Miguel L. Rodríguez

Castro Urdiales, 5-4-45^2

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

C I E M

Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

Purposeful Ventures

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES

FECYT INNOVACIÓN

Indice

Dividiendo rectángulos

Fracción continua

Aproximaciones

Dividiendo rectángulos

Fracción continua

Aproximaciones

Introducción

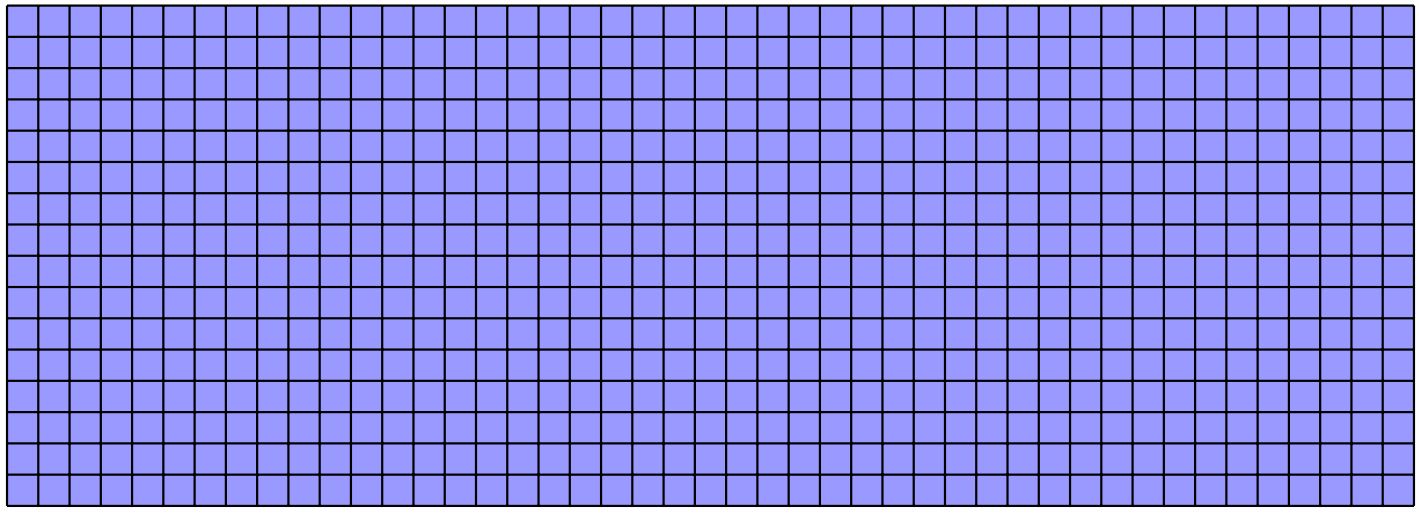
Partimos de un rectángulo de las dimensiones enteras (las que deseéis) y queremos cubrirlo con baldosas cuadradas, no necesariamente del mismo tamaño. Lo haremos así:

- Cubrimos el rectángulo "ordenadamente" con cuadrados completos de lado igual al lado menor del rectángulo.
- Si queda superficie por cubrir, ésta será un rectángulo así que volvemos a repetir el paso anterior con cuadrados.

Mediante este método el rectángulo debe quedar cubierto en un número finito de pasos.

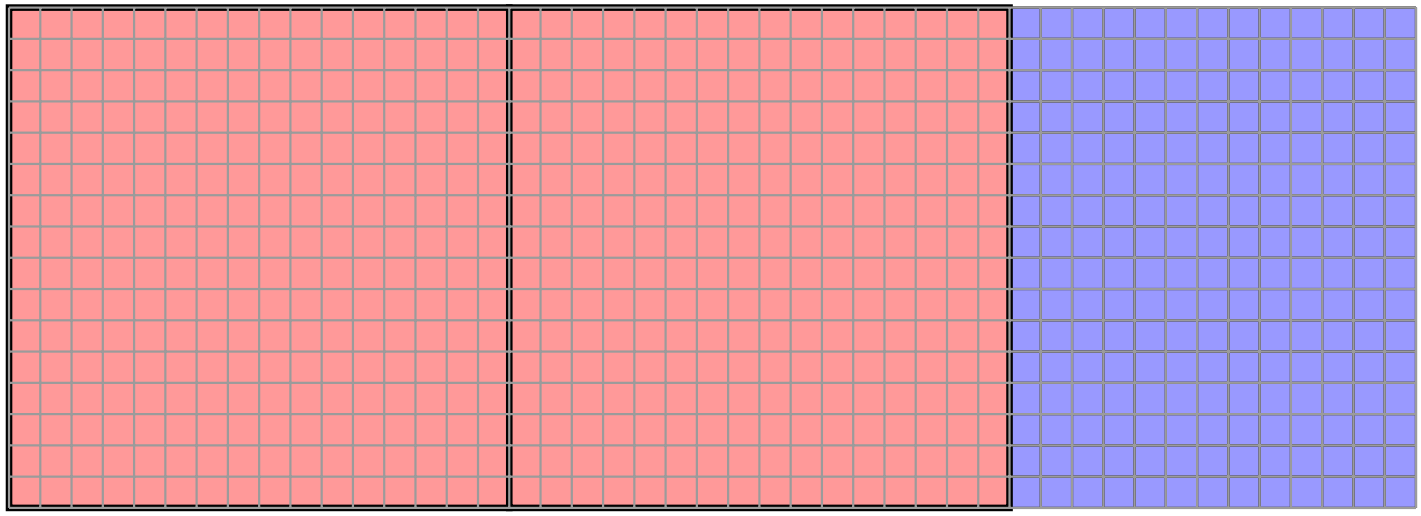
Ejemplo

Proceso con un rectángulo de lados 45 y 16 :



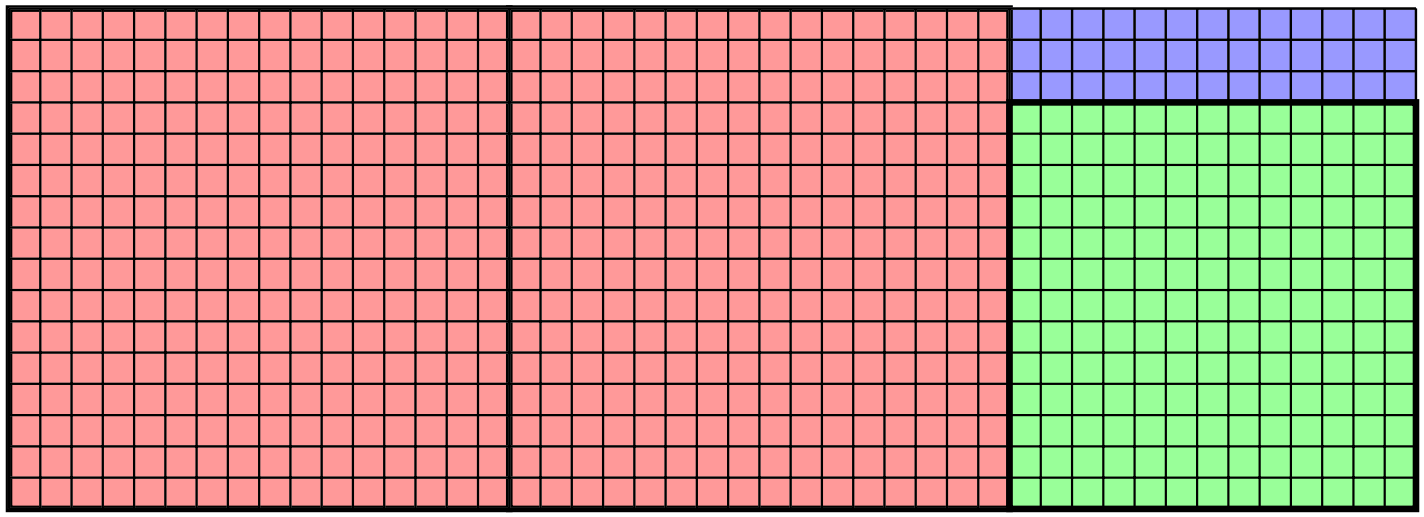
Ejemplo

Proceso con un rectángulo de lados 45 y 16 :



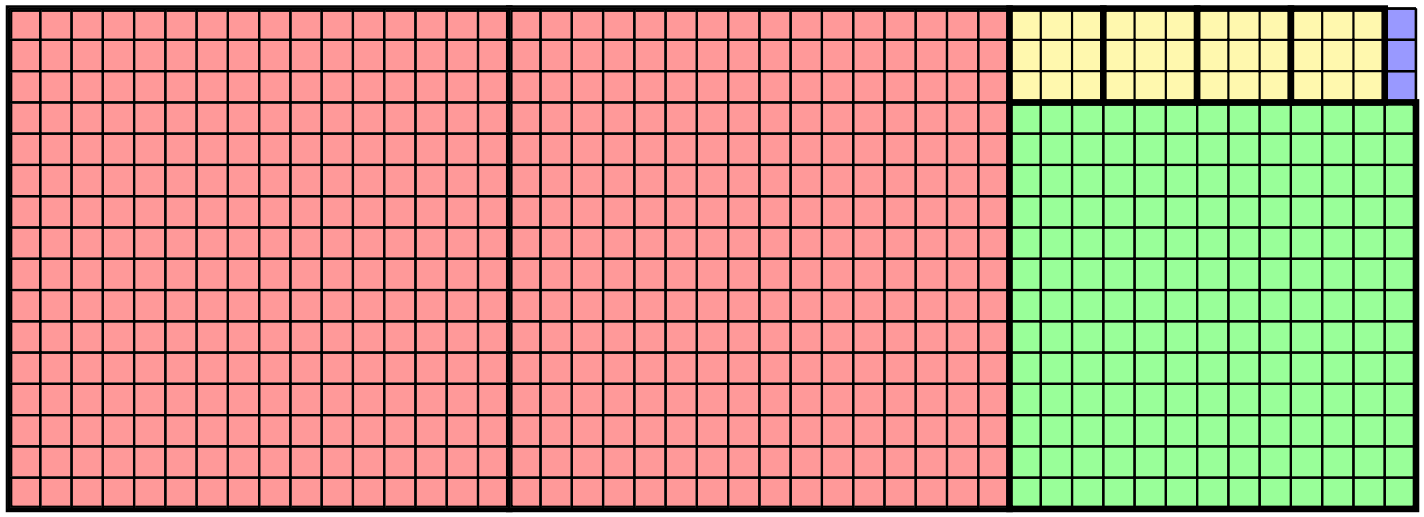
Ejemplo

Proceso con un rectángulo de lados 45 y 16 :



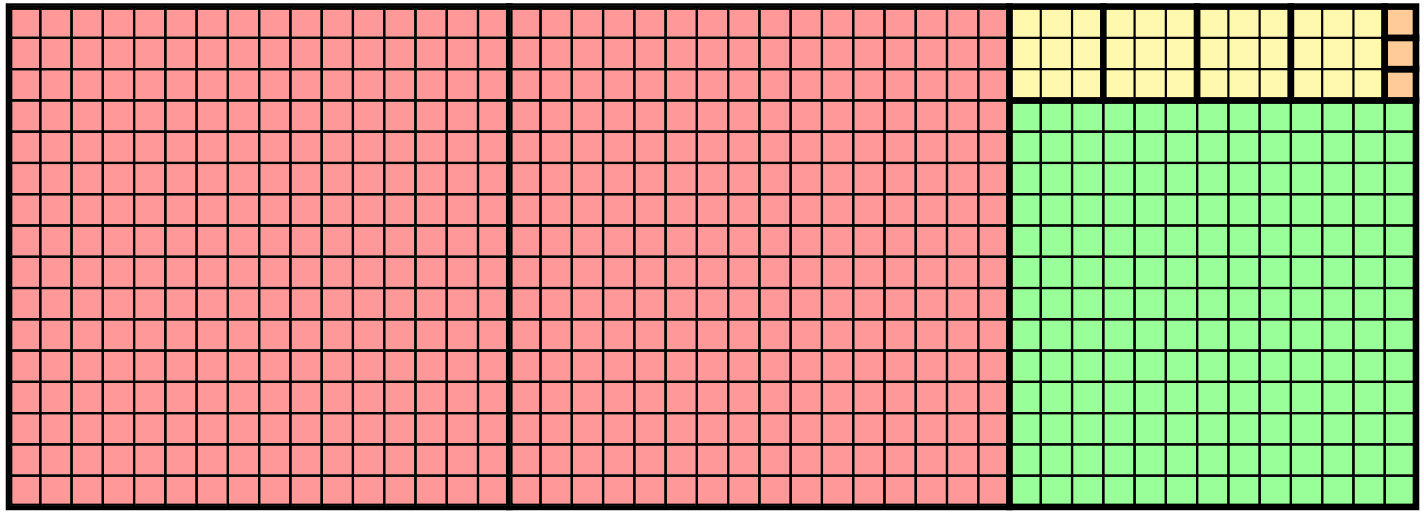
Ejemplo

Proceso con un rectángulo de lados 45 y 16 :



Ejemplo

Proceso con un rectángulo de lados 45 y 16 :



Hemos dividido el rectángulo de 45×16 en:

- 2 cuadrados de 16×16
- 1 cuadrado de 13×13
- 4 cuadrados de 3×3
- 3 cuadrados de 1×1

Fracción continua

También podíamos haber procedido así:

$$\frac{45}{16} = 2 + \frac{13}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{13}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{13}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{3}}}.$$

Así que

$$\frac{45}{16} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}$$

Un famoso algoritmo

El algoritmo de Euclides conecta todo lo que hemos realizado.

$$45 = 2 \times 16 + 13$$

$$16 = 1 \times 13 + 3$$

$$13 = 4 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

Un famoso algoritmo

El algoritmo de Euclides conecta todo lo que hemos realizado.

$$45 = 2 \times 16 + 13$$

$$16 = 1 \times 13 + 3$$

$$13 = 4 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

Lado largo = Cuadrados obtenidos $\times$ lado corto + Resto.

Por tanto, el proceso para obtener la fracción continua de un número racional $\frac{a}{b}$ es el mismo que el de obtener el $m.c.d(a, b)$ mediante el algoritmo de Euclides.

Actividad

Haz el mismo proceso con un rectángulo de lados 22 y 6 y con otro de lados 23 y 16.

Antes de continuar vamos a definir este nuevo concepto y establecer una notación para simplificar su escritura.

Dividiendo rectángulos

Fracción continua

Aproximaciones

Definición

La fracción continua de un número real $\alpha > 0$ es una expresión del tipo

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\ldots}}}.$$

donde a_0 es un entero no negativo y a_i son enteros positivos. La denotaremos por

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots].$$

Cada a_i se denomina cociente parcial.

El primero en utilizar este nombre fue John Wallis in 1653 en su libro Arithmetica infinitorum.

Para cualquier número real nos podemos plantear las siguientes cuestiones:

Preguntas

- ¿Su fracción continua es única o puede tener asociada más de una?
- ¿Son siempre finitas?
- ...

Resultado

Un número $\alpha > 0$ es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua simple finita.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \iff \alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n].$$

La representación anterior de los racionales es única salvo si $a_n = 1$, en cuyo caso

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + 1].$$

A partir de ahora consideraremos que $a_n > 1$ para las fracciones continuas de los números racionales.

Sea $\alpha = [a_0; \ldots, a_n]$, entonces:

- Los números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se denominan cocientes incompletos de α y
- el número $[a_0; \ldots, a_m]$, $0 \leq m \leq n$ se denomina m-ésimo convergente de α.

Actividad

Determina los convergentes de $\dfrac{49}{13}$.

Sea $\alpha = [a_0; \ldots, a_n]$, entonces:

- Los números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se denominan cocientes incompletos de α y
- el número $[a_0; \ldots, a_m]$, $0 \leq m \leq n$ se denomina m-ésimo convergente de α.

Actividad

Determina los convergentes de $\dfrac{49}{13}$.

La fracción continua asociada es

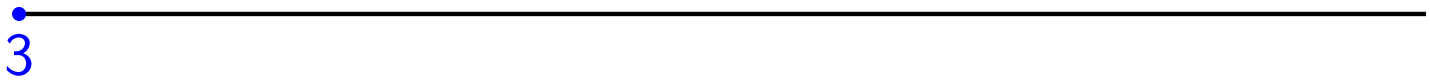
$$\frac{49}{13} = [3; 1, 3, 3].$$

Sus convergentes son

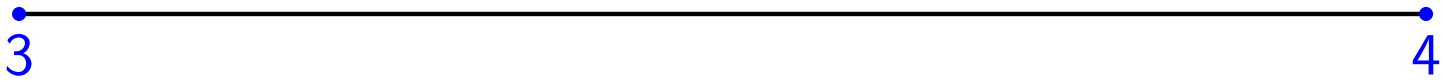
$$3, 4, \frac{15}{4}, \frac{49}{13}.$$

Ilustración

Ilustración

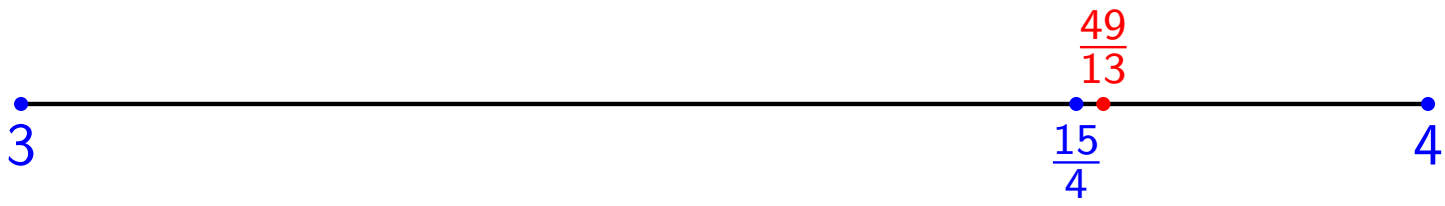


Ilustración

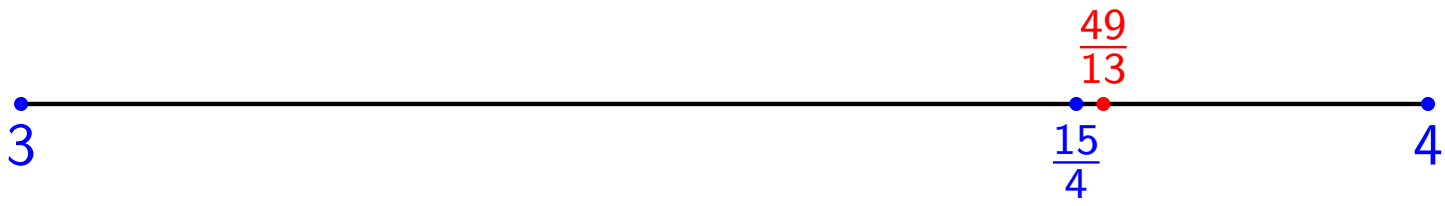


Ilustración

Ilustración

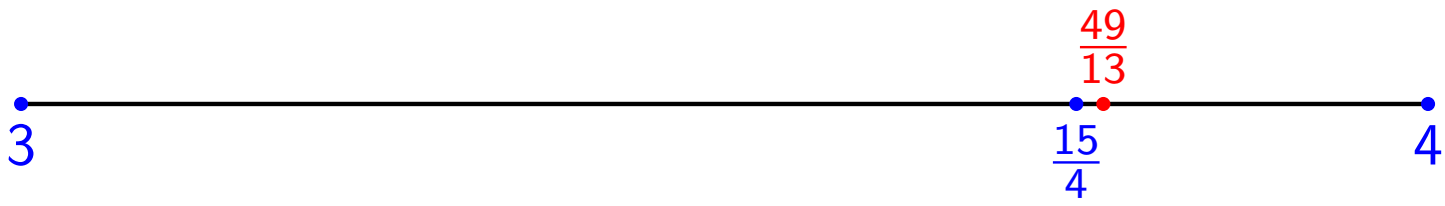


Ilustración



Observa que cada convergente es menor o mayor que el número que estamos estudiando hasta llegar al último convergente, que coincide con el número de partida.

Ilustración



Observa que cada convergente es menor o mayor que el número que estamos estudiando hasta llegar al último convergente, que coincide con el número de partida.

Esta propiedad se cumple para cualquier número, es decir, la sucesión de los convergentes se acerca a la fracción por defecto y por exceso de manera alterna.

Actividad

Halla la fracción continua asociada a $\frac{45}{16}$ e investiga si hay alguna relación entre ella y las siguientes:

$$[2; 1, 4, 4]$$

$$[2; 1, 4, 5]$$

$$[2; 1, 4, 6]$$

$$[2; 1, 4, 7]$$

$$[2; 1, 4, n]$$

¿Qué relación hay con $[2; 1, 4] = \frac{14}{5}$?

Fracciones y cuadrados

Actividad

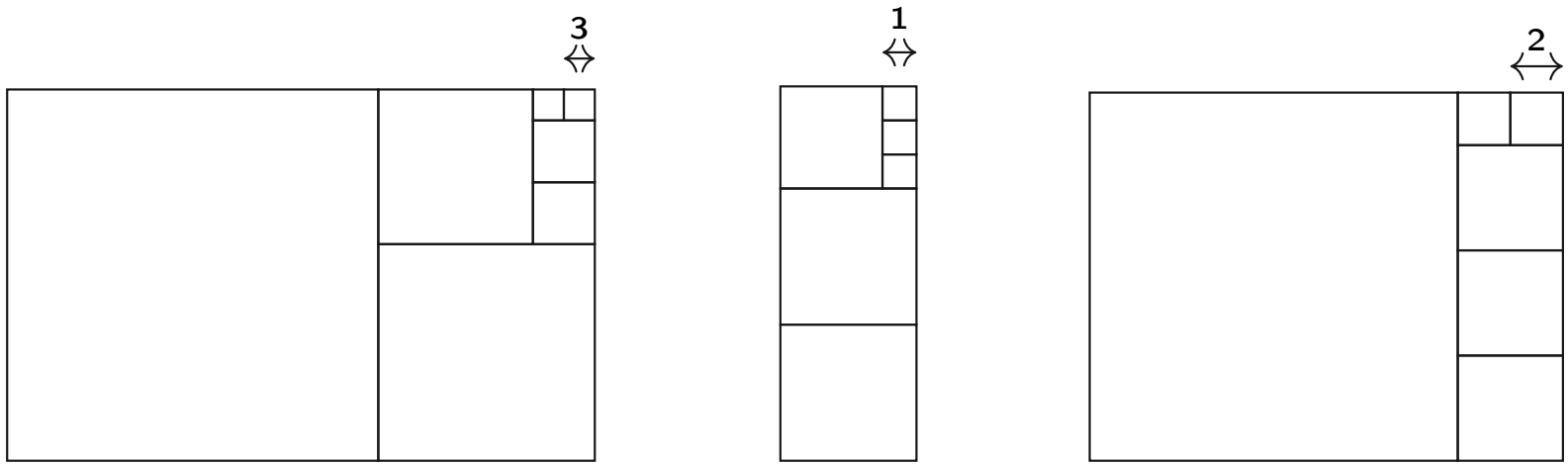
Encuentra la fracción continua asociada a:

$$\frac{25}{16}, \frac{49}{36}, \frac{81}{64}, \frac{121}{100}$$

y trata de encontrar algún tipo de patrón entre ellas.

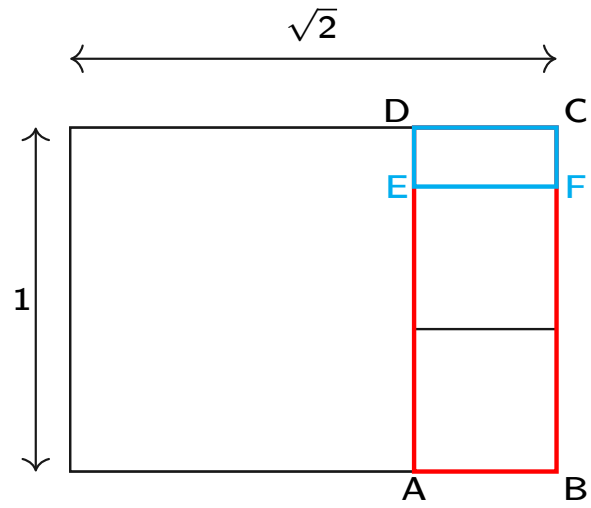
Actividad

Los tres rectángulos de la figura están recubiertos por cuadrados. A partir del lado del cuadrado más pequeño, ¿es posible hallar la dimensión del rectángulo? ¿Y qué ocurre si no se cuenta con esa información?



Actividad

¿Es posible, siguiendo el mismo procedimiento anterior, cubrir con cuadrados un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$? ¿Cuántos cuadrados habría que utilizar? Intenta buscar un patrón de semejanza.

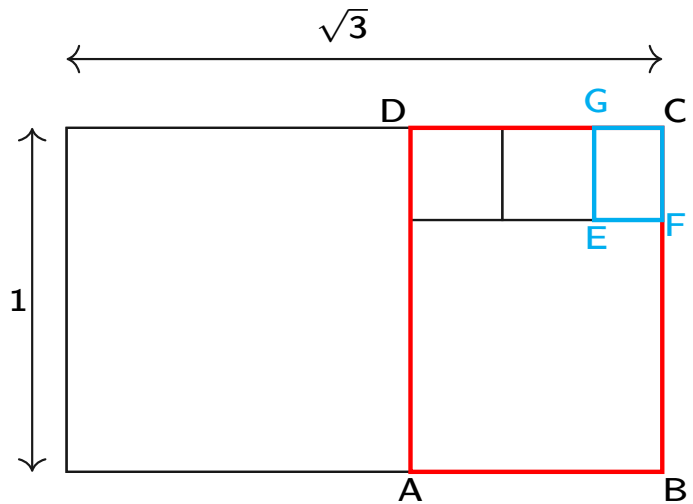


¿Cómo son los rectángulos ABCD y EFCD?¿Qué consecuencias podemos sacar de ello?

Fracciones continuas de irracionales

Actividad

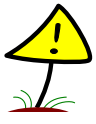
¿Es posible, siguiendo el mismo procedimiento anterior, cubrir con cuadrados un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{3}$? ¿Cuántos cuadrados habría que utilizar? Intenta buscar un patrón de semejanza.



¿Y ABCD y EFCG? ¿Qué consecuencias podemos sacar de ello?

Sumando cuadrados podemos aproximarnos cada vez más a los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ pero el proceso sigue indefinidamente ....

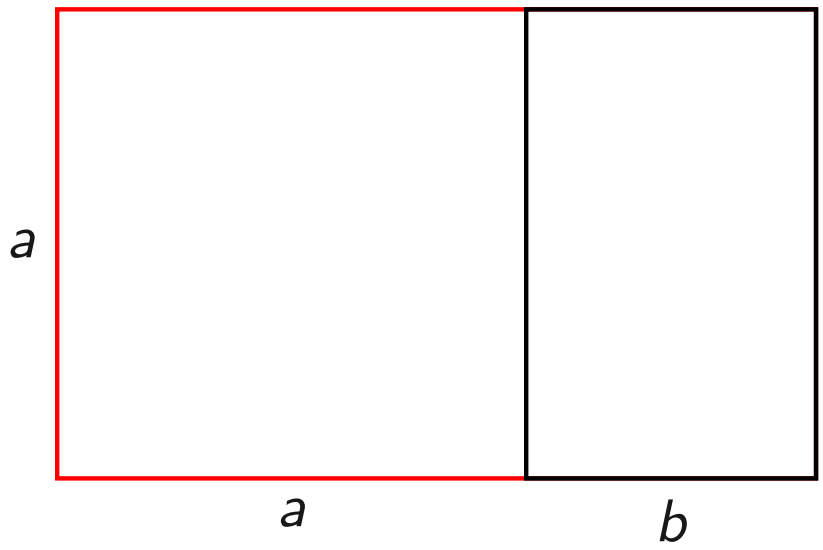
Por tanto, la fracción continua que obtendremos no será finita.

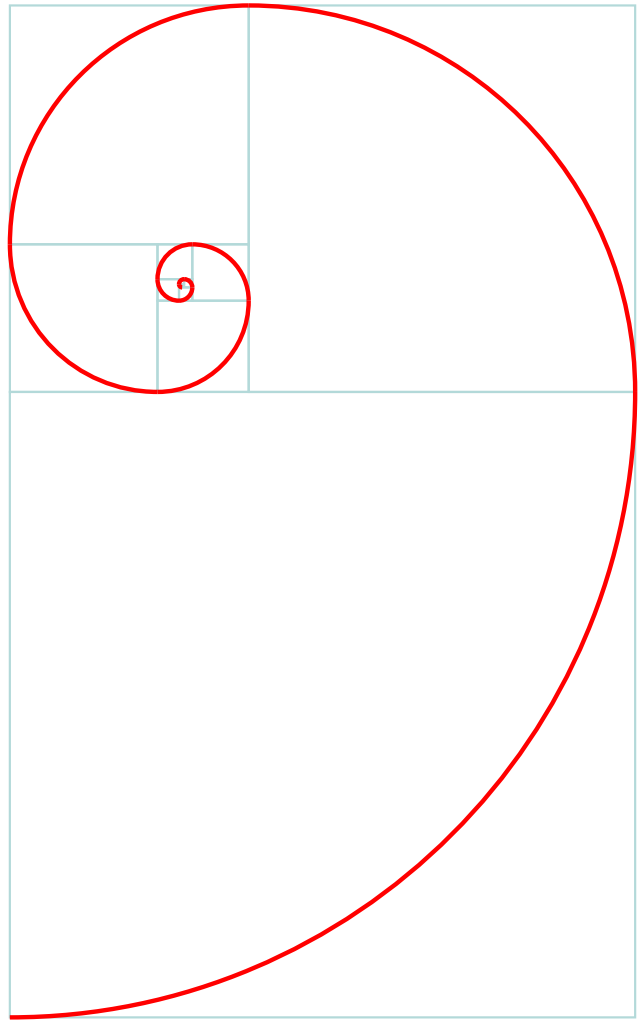


Eso ocurre con cualquier número irracional.

¿Y este ejemplo?

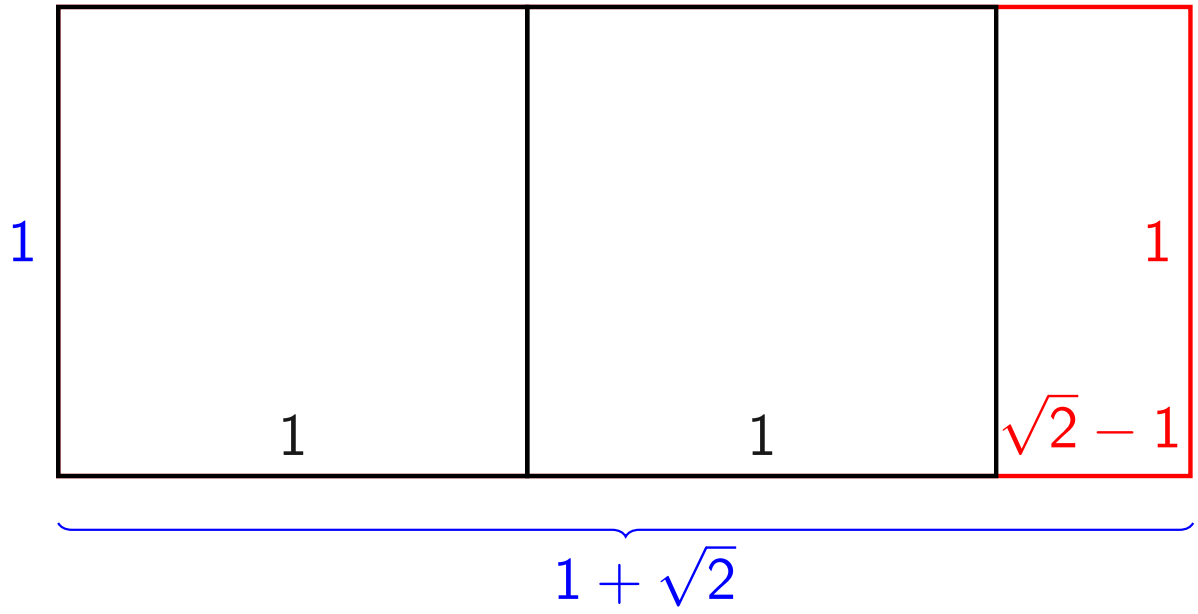
El siguiente rectángulo tiene la propiedad de que al "quitarle" un cuadrado de lado igual a su lado menor queda un rectángulo semejante al inicial. ¿Cuál es la razón de sus lados?





Ejemplo

Vamos a obtener la fracción continua de $\sqrt{2}$. Partimos del siguiente rectángulo:



$$\frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Llamando $1+\sqrt{2}=t$ entonces $\sqrt{2}-1 = t-2$ y

$$\frac{t-2}{1} = \frac{1}{t} \Longrightarrow t-2 = \frac{1}{t} \Longrightarrow t = 2+\frac{1}{t}$$

Ejemplo

Por tanto

$$t = 2 + \frac{1}{t} \Longrightarrow t = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}}.$$

de donde $t = 1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, 2, \ldots]$ por lo que

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Resultado

La fracción continua de un número irracional es siempre infinita.

Un número irracional que se puede obtener como solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros se llama número cuadrático.

En estos casos no es difícil obtener su fracción continua. Veamos algunos ejemplos.

Definición

Llamamos números metálicos a la solución positiva de la ecuación

$$x^2 - mx - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Definición

Llamamos números metálicos a la solución positiva de la ecuación

$$x^2 - mx - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Actividad

Calcula los tres primeros números metálicos: $m = 1, 2, 3$.

Es claro que todos los números metálicos son irracionales ya que:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = mx + 1 \Rightarrow x = m + \frac{1}{x}.$$

Si seguimos sustituyendo x por el valor obtenido

$$x = m + \frac{1}{m + \frac{1}{x}} \Rightarrow x = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{x}}}} \Rightarrow x = [m; m, m, \ldots].$$

Es claro que todos los números metálicos son irracionales ya que:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = mx + 1 \Rightarrow x = m + \frac{1}{x}.$$

Si seguimos sustituyendo x por el valor obtenido

$$x = m + \frac{1}{m + \frac{1}{x}} \Rightarrow x = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{x}}}} \Rightarrow x = [m; m, m, \ldots].$$

Resultado

La fracción continua de un número cuadrático es siempre infinita y periódica.

Si $r_n = [a_0; \ldots, a_n]$ es el n-ésimo convergente de α se puede probar que

$$r_0 < r_2 < r_4 < \ldots < \alpha < \ldots < r_5 < r_3 < r_1.$$

Cada convergente se puede expresar naturalmente como $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $n \geq 0$, donde p_n, q_n se obtienen de esta forma:

$$\begin{array}{cc} p_0 = a_0, & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1, & q_1 = a_1 \\ p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2, & q_2 = a_1 a_2 + 1 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Convergentes

Sean

$$a_0, a_1, \ldots, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$$

los números definidos anteriormente. Entonces

Relación de recurrencia

- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad n \geq 2,$
- $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2,$
- $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \quad n \geq 1.$

La siguiente tabla, basada en la relación de recurrencia, es de utilidad para calcular los convergentes a partir de la fracción continua.

a_n			a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n+1}
p_n	0	1	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n+1}
q_n	1	0	q_0	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n+1}

Dividiendo rectángulos

Fracción continua

Aproximaciones

Introducción

En el libro de A. Khinchin sobre fracciones continuas, se definen dos nociones de aproximación:

- una fracción $\frac{c}{d}$ es una aproximación de primer orden de α si está "más cerca" de α que cualquier otra fracción $\frac{p}{q}$ con menor o igual denominador, es decir

  $$|\alpha - \frac{c}{d}| < |\alpha - \frac{p}{q}| \text{ para toda fracción con denominador } q \leq d.$$

- una fracción $\frac{c}{d}$ es una aproximación de segundo orden de α si para cualquier otra fracción $\frac{p}{q}$ con $q \leq d$, se verifica

  $$|d\alpha - c| < |q\alpha - p|.$$

Aproximaciones

Si $\frac{p}{q}$ es aproximación de segundo orden entonces lo es de primer orden pero el recíproco no tiene que cumplirse.

Actividad

Tomando como referencia el valor de π de tu calculadora halla las tres primeras aproximaciones de π de primer orden.

Aproximaciones de primer orden

La siguientes fracciones son aproximaciones de primer orden de π :

$$\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}.$$

Es claro que $\frac{13}{4}$ está más cerca de π que $\frac{3}{1}$, ya que distan de π 0.1084 y 0.1416 respectivamente

Aproximaciones de segundo orden

Ahora, si multiplicamos la diferencia anterior por el denominador la cosa cambia:

$$0.1416 \times 1 = 0.1416 < 0.4336 = 0.1084 \times 4.$$

Esto nos dice que que $\frac{13}{4}$ no mejora a 3 y no es una aproximación de segundo orden.

Aproximaciones de segundo orden

Ahora, si multiplicamos la diferencia anterior por el denominador la cosa cambia:

$$0.1416 \times 1 = 0.1416 < 0.4336 = 0.1084 \times 4.$$

Esto nos dice que que $\frac{13}{4}$ no mejora a 3 y no es una aproximación de segundo orden.

Lo mismo ocurre con $\frac{16}{5}$ y $\frac{19}{6}$ con respecto a 3.

Aproximaciones de segundo orden

Ahora, si multiplicamos la diferencia anterior por el denominador la cosa cambia:

$$0.1416 \times 1 = 0.1416 < 0.4336 = 0.1084 \times 4.$$

Esto nos dice que que $\frac{13}{4}$ no mejora a 3 y no es una aproximación de segundo orden.

Lo mismo ocurre con $\frac{16}{5}$ y $\frac{19}{6}$ con respecto a 3.

Así, $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$ no son mejores aproximaciones de segundo orden.

Aproximaciones de segundo orden

Ahora, si multiplicamos la diferencia anterior por el denominador la cosa cambia:

$$0.1416 \times 1 = 0.1416 < 0.4336 = 0.1084 \times 4.$$

Esto nos dice que que $\frac{13}{4}$ no mejora a 3 y no es una aproximación de segundo orden.

Lo mismo ocurre con $\frac{16}{5}$ y $\frac{19}{6}$ con respecto a 3.

Así, $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$ no son mejores aproximaciones de segundo orden.

Para $\frac{22}{7}$ la cosa cambia:

Aproximaciones

Para $\frac{22}{7}$ la cosa cambia:

Aproximaciones

Para $\frac{22}{7}$ la cosa cambia:

Su diferencia con respecto a π es 0.00126 y si multiplicamos esta diferencia por su denominador obtenemos

$$0.00126 \times 7 = 0.00882 < 0.1416.$$

Aproximaciones

Para $\frac{22}{7}$ la cosa cambia:

Su diferencia con respecto a π es 0.00126 y si multiplicamos esta diferencia por su denominador obtenemos

$$0.00126 \times 7 = 0.00882 < 0.1416.$$

Así que $\frac{22}{7}$ sí es una aproximación de segundo orden. De hecho, naturalmente, es segunda con menor denominador tras $\frac{3}{1}$.

Aproximaciones

Para $\frac{22}{7}$ la cosa cambia:

Su diferencia con respecto a π es 0.00126 y si multiplicamos esta diferencia por su denominador obtenemos

$$0.00126 \times 7 = 0.00882 < 0.1416.$$

Así que $\frac{22}{7}$ sí es una aproximación de segundo orden. De hecho, naturalmente, es segunda con menor denominador tras $\frac{3}{1}$.

Actividad

Calcula los cuatro primeros convergentes de π utilizando como valor aproximado 3.14159.

Aproximaciones

$$3 = [3], \qquad [3;7] = \frac{22}{7}, \qquad [3;7,15] = \frac{333}{106}$$

$$[3;7,15,1] = \frac{355}{113}$$

¿Os suenan esas fracciones? Vamos a conectarlo todo:

Aproximaciones

$$3 = [3], \qquad [3;7] = \frac{22}{7}, \qquad [3;7,15] = \frac{333}{106}$$

$$[3;7,15,1] = \frac{355}{113}$$

¿Os suenan esas fracciones? Vamos a conectarlo todo:

Resultado

Los convergentes de la fracción continua de un número son sus aproximaciones de segundo orden.

$$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\ldots]$$

Aproximaciones

$$3 = [3], \qquad [3;7] = \frac{22}{7}, \qquad [3;7,15] = \frac{333}{106}$$

$$[3;7,15,1] = \frac{355}{113}$$

¿Os suenan esas fracciones? Vamos a conectarlo todo:

Resultado

Los convergentes de la fracción continua de un número son sus aproximaciones de segundo orden.

$$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\ldots]$$

El cociente parcial 292 nos indica que $[3;7,15,1]$ es una muy buena aproximación de π.

Aproximaciones

$$3 = [3], \qquad [3;7] = \frac{22}{7}, \qquad [3;7,15] = \frac{333}{106}$$

$$[3;7,15,1] = \frac{355}{113}$$

¿Os suenan esas fracciones? Vamos a conectarlo todo:

Resultado

Los convergentes de la fracción continua de un número son sus aproximaciones de segundo orden.

$$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\ldots]$$

El cociente parcial 292 nos indica que $[3;7,15,1]$ es una muy buena aproximación de π. ¿Sabrías explicar el motivo?

Curiosidad

El número transcendentales se aproximan "bien" mediante fracciones continuas y además, e tiene una expresión bastante regular en fracción continua:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \ldots]$$

Curiosidad 2

Se dice en algunos ámbitos que el número de oro es "el más irracional de todos los irracionales" ...

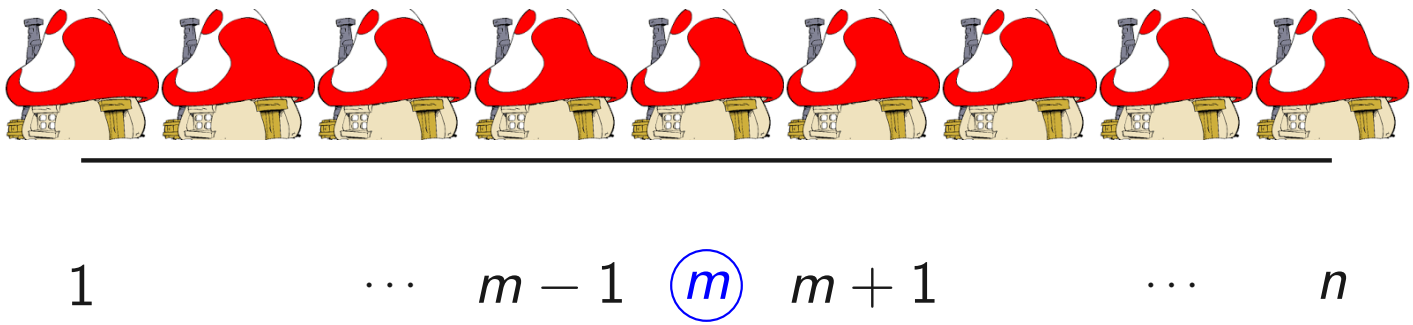
$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Extra I: Un problema con historia

The Strand Magazine, Sección "Perplexities", propuesto en el número de diciembre de 1914.

Reto

Imagina que estás en una calle con casas marcadas del 1 al n. Hay una casa, la número m, que cumple que la suma de los números de casa a su izquierda es igual a la suma de los números de casa a su derecha. Si m está entre 50 y 500, encuentra los valores de n y m.



$$1 \quad \cdots \quad m-1 \quad \textcircled{m} \quad m+1 \quad \cdots \quad n$$

Este problema merece una sesión completa de Estalmat.

Una forma de resolverlo

Al parecer, el compañero de piso de Ramanujan le comentó el problema y éste lo resolvió de inmediato, "porque sabía que la solución era una fracción continua. Pudo hacerlo así:

Paso 1: Deducir del enunciado que

$$1 + 2 + \ldots + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \ldots + n.$$

Paso 2: Deducir de lo anterior que

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \tag{1}$$

Paso 3: Como n y m son enteros positivos

$$m = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{2}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m^2}}{2}. \tag{3}$$

Una forma de resolverlo

Paso 4: Como n ó $n+1$ debe ser par deducir que

- Paso 4.1: Si n es par, entonces (2) queda $k(2k+1) = m^2$. Deducir que k y $2k+1$ no tienen factores comunes y que por tanto ambos deben ser cuadrados perfectos. Renombrar $2k+1 = a^2$ y $k = b^2$ y llegar a

$$a^2 - 2b^2 = 1.$$

- Paso 4.2: si $n+1$ es impar $n+1 = 2k$ y de (2) deducir de forma similar que si $2k-1 = a^2$ y $k = b^2$ se tiene que

$$a^2 - 2b^2 = -1.$$

Una forma de resolverlo

Combinando los casos debemos anteriores debemos resolver la ecuación de Pell

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1. \tag{4}$$

Paso 5: Observar que si $a^2 - Db^2 = 1$, podemos expresar $\sqrt{D}$ como una fracción simple continua (e infinita).

Paso 6: Calcular los convergentes de dicha fracción:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

Una forma de resolverlo

Paso 7: Como queremos que

$$\frac{p}{q} \approx \sqrt{2} \iff \frac{p^2}{q^2} \approx 2 \iff p^2 \approx 2q^2 \iff p^2 - 2q^2 \approx 0.$$

Como $p, q \in \mathbb{N}$ lo "mejor" que podemos obtener es

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

Paso 9: Y por tanto los convergentes de $\sqrt{2}$ son todas las soluciones de

$$p^2 - 2q^2 = 1 \quad \text{y} \quad p^2 - 2q^2 = -1.$$

Una forma de resolverlo

Paso 10: Obtener las soluciones (los convergentes)

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \ldots$$

p	q	Casa	Calle	Suma
3	2	6	8	15
7	5	35	49	595
17	12	204	288	20706
41	29	1189	1681	706266
99	70	6930	9800	24008985

Table: Soluciones

La solución del puzle es (204, 288).