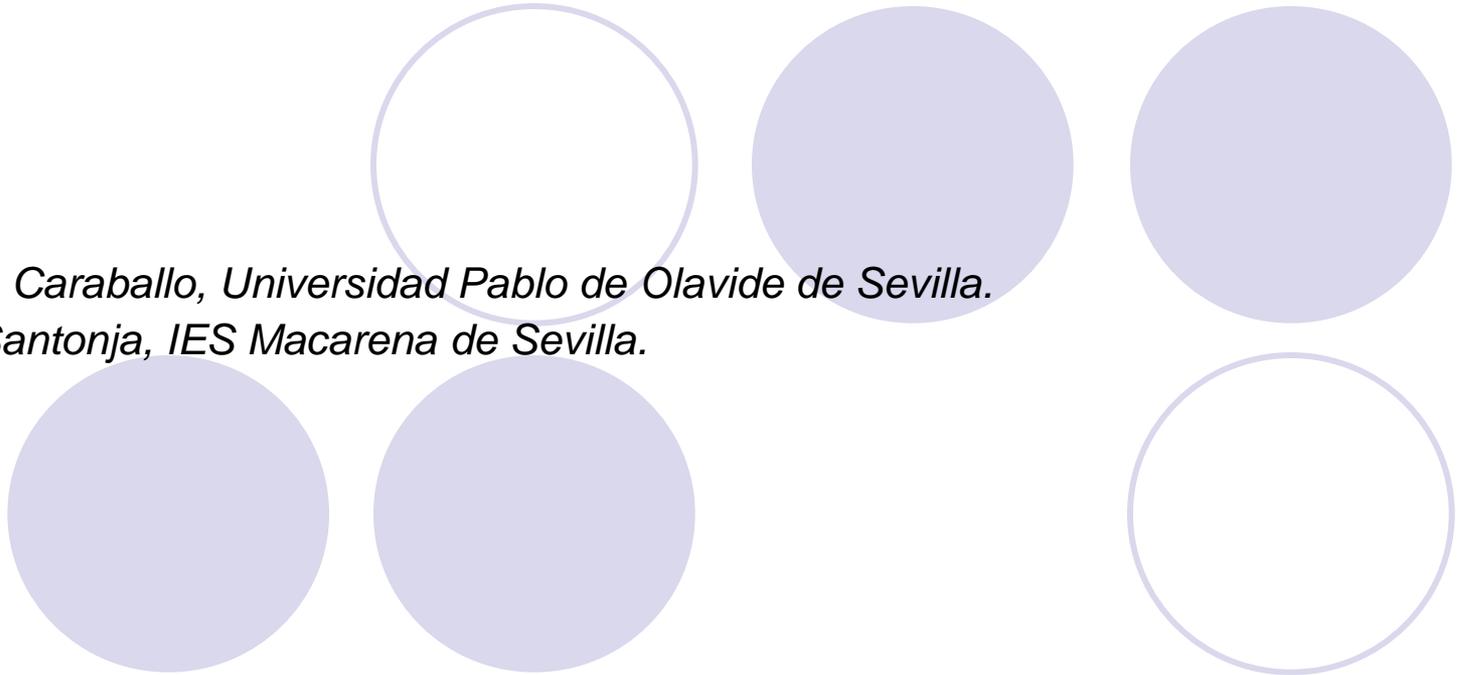


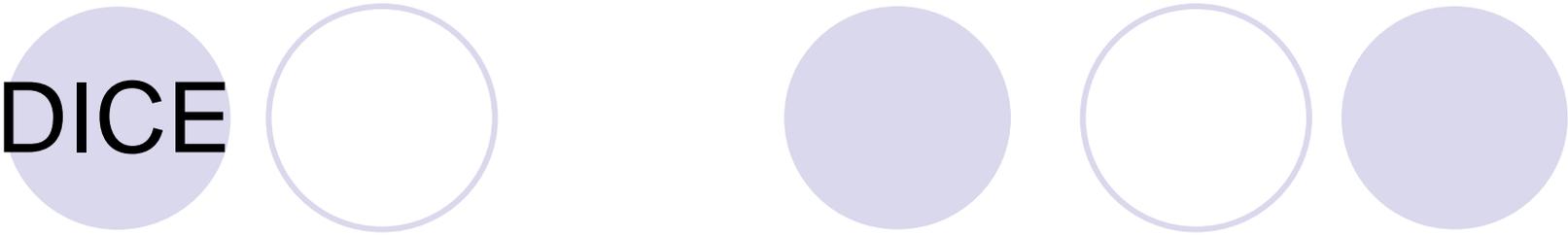
DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

*Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide de Sevilla.
José Muñoz Santonja, IES Macarena de Sevilla.*



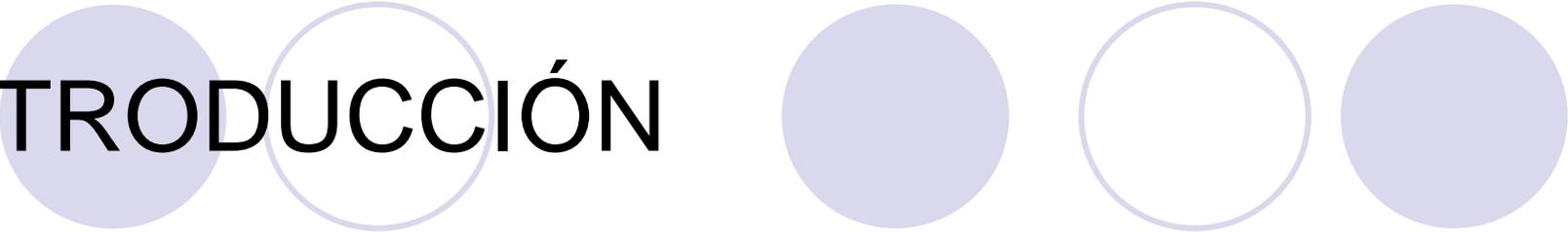
*ESTALMAT ANDALUCÍA
SEDE SEVILLA*

ÍNDICE



- INTRODUCCIÓN
- PRIMERA PARTE:
 - ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES
 - TIPOS DE DEMOSTRACIÓN
- SEGUNDA PARTE:
 - SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.
 - PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO.
 - ALGUNOS TEOREMAS Y SU DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

INTRODUCCIÓN



HENRI POINCARÉ

(Nancy, Francia, 1854 – París, 1912)

¿QUE ES LA CREACIÓN MATEMÁTICA?

(Primera parte de la conferencia dictada en 1903, en la Sociedad Psicológica de París, y cuyas ideas tienen todavía un cierto impacto en nuestra sociedad, ¡más de cien años después!)

INTRODUCCIÓN

El primer hecho que habría de sorprendernos, si no fuese por lo acostumbrados que estamos a aceptarlo, es el de cómo es posible que haya personas que no entiendan las matemáticas. Puesto que solo recurren a las leyes de la lógica, que toda mente normal acepta, y dado que sus pruebas se basan en principios comunes a todos los seres humanos, que nadie en su sano juicio podría negar, ¿cómo es posible que haya tanta gente refractaria a ellas? (...)

Es comprensible que no todo el mundo tenga capacidad inventiva y puede pasar que se olvide una demostración tras haberla aprendido, pero, si pensamos en ello, sí que es muy raro que alguien no comprenda un razonamiento matemático que se le explique. Y, sin embargo, quienes no pueden seguir tal razonamiento más que con dificultad son mayoría, como atestigua la experiencia de los profesores de enseñanza secundaria. (...)

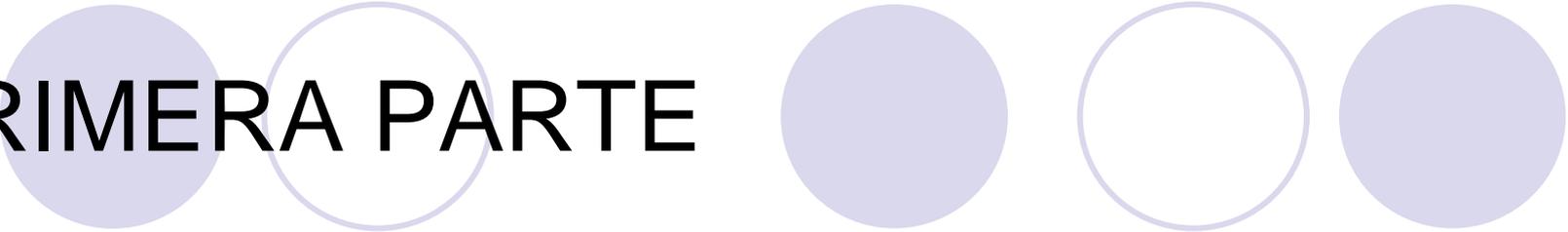
INTRODUCCIÓN

Por lo que a mí respecta, he de confesar que soy incapaz hasta de hacer una suma sin equivocarme... no tengo mala memoria, pero tampoco lo suficiente buena como para ser un jugador de ajedrez destacado. ¿Por qué entonces no me falla en los momentos difíciles de razonamiento matemático, cuando la mayor parte de los ajedrecistas se perderían? Sin duda alguna porque la marcha general del razonamiento la guía. Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados en determinado orden, siendo este orden de colocación mucho más importante que los elementos mismos. Si tengo la sensación, la intuición, como si dijéramos, de ese orden, percibo sin más el razonamiento como un todo y no tengo ya que preocuparme de que se me olvide ninguno de sus elementos, pues cada uno de ellos ocupará su parte en el elenco, sin que mi memoria tenga que hacer esfuerzo alguno. (...)

INTRODUCCIÓN

¿Qué es una demostración matemática? Todo el mundo sabe qué es una demostración matemática. Una demostración de un teorema matemático es una sucesión de pasos que conducen a la conclusión deseada. Las reglas que dichas sucesiones de pasos deben seguir fueron hechas explícitas cuando fue formalizada la lógica al principio de este siglo, y no han cambiado desde entonces. La expresión 'demostración correcta' es redundante. La demostración matemática no admite grados. Una sucesión de pasos en un argumento es o bien una demostración o bien pura basura. (...)

PRIMERA PARTE



- **ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES**
 - Axiomas
 - Convenios matemáticos
 - Demostración
- **TIPOS DE DEMOSTRACIÓN**
 - Directa
 - Por contraposición
 - Reducción al absurdo
 - Inducción

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (I)

AXIOMAS

*Un **axioma** es una frase matemática que todo el mundo admite como verdadera. Por lo tanto, se considera verdadera y no se tiene que demostrar que lo es. Los axiomas son las **verdades elementales o verdades básicas**.*

Por ejemplo:

- Por dos puntos distintos sólo pasa una recta.
- Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Todo número natural tiene un siguiente.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (II)

CONVENIOS MATEMÁTICOS

Cuando se dice: en un triángulo la suma de los ángulos es 180° , queremos decir que en todos los triángulos la suma de los ángulos es 180° . Si queremos referirnos a todos los elementos de un conjunto A , diremos “para todo x perteneciente al conjunto A ”

$(\forall x \in A)$

Cuando se dice: existe un número x que cumple $x^4 = 1$, queremos decir que al menos hay uno que lo cumple. $(\exists x \mid x^4 = 1)$

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (II)

CONVENIOS MATEMÁTICOS

Cuando se dice: existe un único número entero x que cumple $x^3 = -1$, queremos decir que existe uno y sólo uno que lo cumple.

$$(\exists! x \text{ entero} \mid x^3 = -1).$$

Cuando decimos: A y B queremos decir "los dos a la vez".

Cuando decimos: A o B queremos decir "o bien A, o bien B, o los dos a la vez". ¡Cuidado, porque en la vida cotidiana, a veces, no es así!

Una frase matemática puede ser verdadera o falsa. Para que una frase sea una propiedad matemática necesitamos estar seguros de su veracidad.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (II)

CONVENIOS MATEMÁTICOS

Las propiedades matemáticas no siempre son evidentes por tanto, hay que demostrarlas para ver si son ciertas o no.

Por ejemplo:

El cuadrado de un número nunca acaba en 2.

El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

El Teorema de Pitágoras.

Algunas propiedades, por su propia trascendencia o por la relevancia del matemático que las enunció o las demostró, les llamamos Teoremas.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (II)

El proceso por el que nos aseguramos de que una propiedad es verdadera se llama

DEMOSTRACIÓN

Hacer una demostración es escribir una serie de frases matemáticas encadenadas, partiendo de las definiciones, hipótesis y propiedades conocidas hasta llegar a la conclusión.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (III)

CUESTION 1

Analiza la verdad o falsedad de las siguientes frases. Sustituye las proposiciones falsas por expresiones correctas según el cuadro anterior.

1. El 2 o el 3 son números pares.
2. El 2 y el 3 son números pares.
3. Existe un único número negativo que es cuadrado perfecto.
4. Todos los números naturales son pares o impares.
5. Existe un número natural n verificando $n + n = n.n$
6. Si dos números son primos, entonces tienen múltiplos comunes.
7. Entre dos números diferentes siempre hay otro número.
8. Existe un único número x tal que $a.x = 0$ para cualquier número a .
9. Si a y b son números que cumplen $a.b = 0$, entonces $a = 0$ y $b = 0$.
10. Los cuadriláteros son polígonos regulares.
11. La ecuación $x^2 - 2x = 0$ tiene dos soluciones distintas.

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN (I)

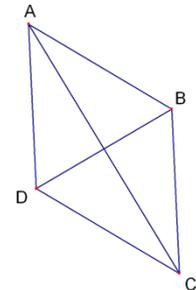
DEMOSTRACIÓN DIRECTA

La demostración directa consiste en demostrar que $A \Rightarrow B$ partiendo de A y deduciendo proposiciones hasta llegar a B .

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (III)

CUESTION 2

1. Demuestra que el cuadrado de un número par es también un número par.
 - Si probamos con el 2, con el 4 o con el 6, vemos que sus cuadrados, 4, 16 y 36 son pares. Pero esto no vale porque tenemos que probarlo **para todos** los números pares.
2. En el conjunto de los números enteros, demuestra que si m y n son múltiplos de p , entonces $m+n$ y $m-n$ también son múltiplos de p .
3. Demuestra que si $ABCD$ es un rombo, entonces sus diagonales, AC y BD , son perpendiculares.

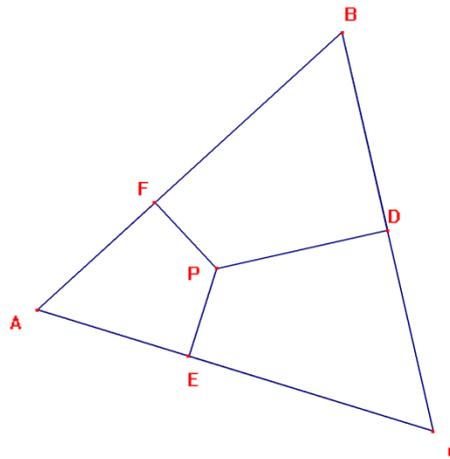


ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (III)

CUESTION 3

Teorema de Viviani: En un triángulo equilátero la suma de las tres distancias de un punto interior a los lados de un triángulo tiene un valor que es independiente de la posición del punto, es decir, se mantiene constante.

¿Qué característica del triángulo equilátero mide esa constante?



MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN (IV)

DEMOSTRACIÓN POR CONTRAPOSICIÓN

*En ocasiones, para conseguir demostrar la proposición $A \implies B$, resulta más sencillo demostrar la proposición $\text{no } B \text{ no } A$, que es el enunciado **contrarrecíproco** del anterior.*

Un enunciado y su contrarrecíproco tienen la propiedad de ser equivalentes, es decir, si uno es verdadero, también lo es el otro y si el primero es falso también es falso el segundo.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (V)

CUESTION 4

Demuestra por contraposición las siguientes propiedades:

1. Si p y q son números reales positivos tales que $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$.
2. Si n es un entero y n^2 es par, entonces n es par. (Supón que n es impar).
3. Si en un cuadrilátero no hay ningún ángulo obtuso, dicho cuadrilátero es un rectángulo.

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN (VI)

DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

*Una demostración por reducción al absurdo consiste en lo siguiente: quieres demostrar que $A \implies B$ y para ello demuestras que, suponiendo que son ciertas A y $(\text{no } B)$, se llega a una **contradicción**. Entonces resulta que la suposición $(\text{no } B)$ era falsa y, por tanto, B es verdadera.*

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (VII)

CUESTION 5

1. **Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + 1 \geq 2x$**
2. **Demuestra que hay una cantidad infinita de números primos.**
3. **Prueba que $\sqrt{2}$ es un número irracional o, lo que es lo mismo, no es racional (no puede escribirse en forma de fracción).**

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN (VIII)

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN

*La inducción es un método de demostración que suele ser muy útil en problemas en los que se trata de probar que **todos** los números naturales (1, 2, 3,..) cumplen una cierta propiedad.*

Consta de dos pasos:

- Primero se demuestra que **el 1 cumple la propiedad.***
- A continuación se **supone** que la propiedad es verdadera para un cierto **número n** y se **demuestra** que también lo es para el número siguiente, **el $n + 1$.***

Si se consigue probar estos dos pasos, como se cumple para 1, se cumple para 2; como se cumple para 2, se cumple para 3;... y así se demuestra que la propiedad la cumplen todos los números naturales. El método de inducción es mucho más general de lo que pueda parecer a primera vista. Es también muy potente y muy intuitivo y puede aplicarse a una gran variedad de problemas.

ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES (VII)

CUESTION 6

Demuestra por este método las propiedades siguientes:

- 1. Para todo número $n \geq 1$ se cumple que 6^n acaba en 6.**

- 1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$**

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Triángulos semejantes: Dos figuras son semejantes cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. sus ángulos respectivos son iguales; y
2. sus lados respectivos son proporcionales.

No obstante, en el caso del polígono más sencillo, el triángulo, sí basta con una de las dos condiciones puesto que la otra se cumplirá automáticamente.

Primer Criterio de semejanza de triángulos: Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

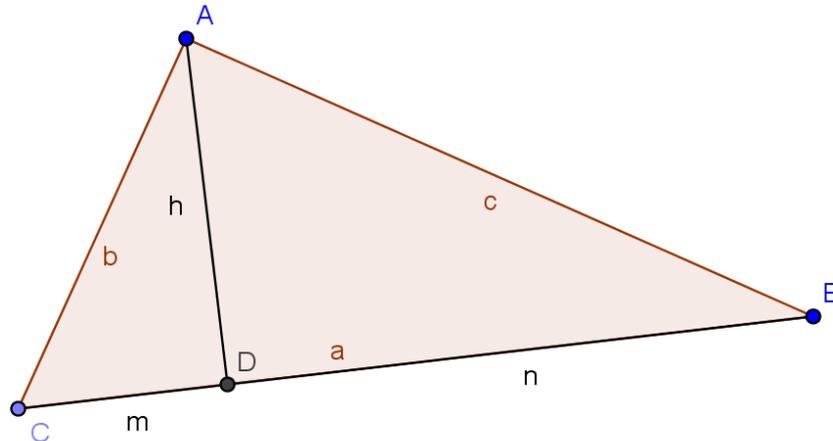
Segundo Criterio de semejanza de triángulos: Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Tercer Criterio de semejanza de triángulos: Dos triángulos son semejantes si tiene los tres lados homólogos proporcionales.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (II)

CUESTION 7

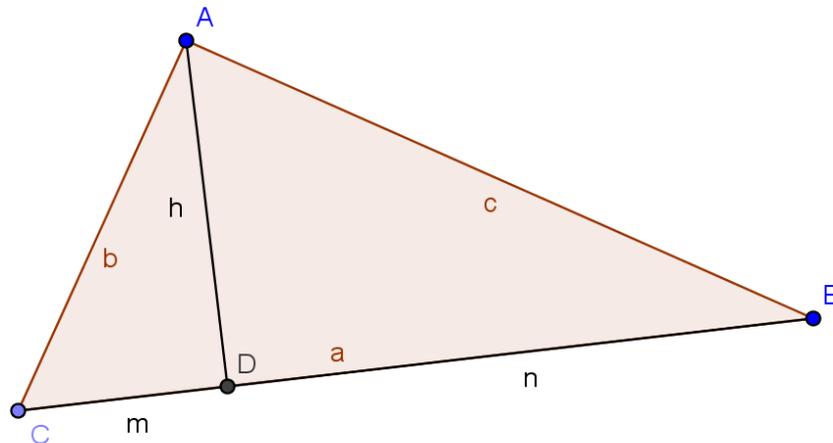
Teorema del cateto: En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, es decir, $b^2 = a \cdot m$ y también $c^2 = a \cdot n$



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (III)

CUESTION 8

Teorema de la altura: *En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que divide a ésta: $h^2 = n \cdot m$*



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (IV)

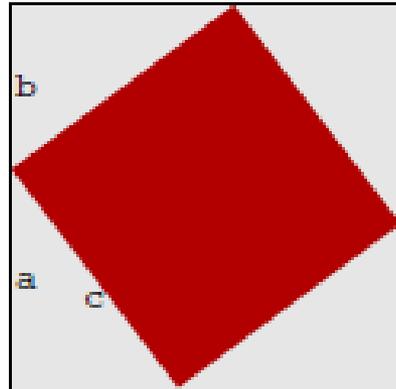
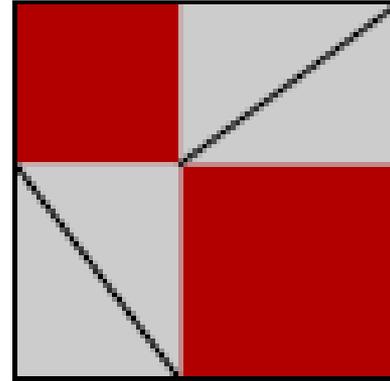
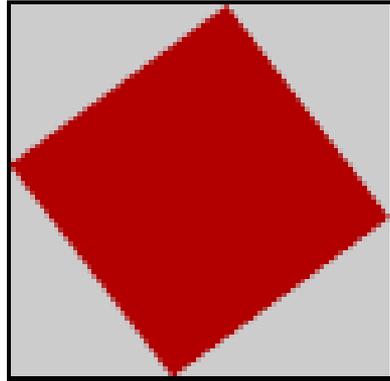
CUESTION 9

Teorema de Pitágoras: *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $a^2+b^2=c^2$.*

Intenta demostrar el Teorema de Pitágoras:

- 1. Utilizando el Teorema del Cateto y de la Altura.*
- 2. De alguna otra forma que se te ocurra.*
- 3. Comenta la siguientes demostraciones del Teorema de Pitágoras:*

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (V)



$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULOS

- Las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto se llaman medianas.
- Las rectas perpendiculares a cada lado trazadas desde el vértice opuesto se llaman alturas.
- Las rectas perpendiculares a cada lado trazadas por su punto medio se llaman mediatrices.



PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULOS (II)

CUESTION 10

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro (G).

1. ¿Qué propiedades conoces del baricentro?
1. ¿De qué modo divide el baricentro de un triángulo a cada una de sus medianas?

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULOS (III)

CUESTION 11

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que se llama circuncentro (**O**).

1. Demuestra que las tres mediatrices se cortan en un punto.
2. ¿De qué vértice del triángulo estará más cerca el punto D? ¿Por qué?
3. ¿De qué depende que el circuncentro de un triángulo esté en su interior o no?
4. ¿De qué lado del triángulo estará más cerca el circuncentro?

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULOS (IV)

CUESTION 12

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro (**H**).

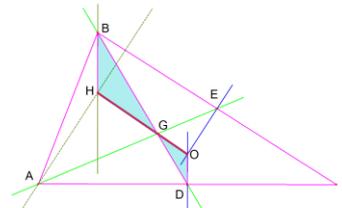
1. Demuestra que las tres alturas se cortan en un punto.
2. ¿De qué depende que el ortocentro de un triángulo esté en su interior o no?
3. ¿Dónde se sitúa el ortocentro de un triángulo rectángulo? ¿Por qué?
4. ¿De qué vértice del triángulo estará más cerca su ortocentro?

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO (V)

CUESTION 13

Recta de Euler: En todo triángulo, no equilátero, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados, y el segmento que definen se denomina segmento de Euler.

1. Dibuja el baricentro y el circuncentro y prolonga el segmento OG hasta el punto H de modo que GH sea igual a dos veces OG .
2. ¿Cómo son los triángulos coloreados? ¿Cómo son las rectas OD y BH ?



PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO (VI)

CUESTION 14

Teorema de Napoleón: Si sobre cada lado de un triángulo se construyen triángulos equiláteros hacia el exterior, los baricentros de los mismos forman un triángulo equilátero.

¿Qué ocurre si los triángulos se dibujan hacia el interior del triángulo original?

