PARIDAD

Uno de los temas clásicos que abordamos en nuestras clases de Estalmat es el de PARIDAD.

Presentamos el tema mediante algunos juegos de "Magia Matemática" basados en el concepto de paridad. A continuación se les presentan actividades y otros juegos de magia para que ellos vayan intuyendo "el por qué" de las "adivinaciones".

Los juegos son simples de realizar, la única habilidad que hay que tener es saber contar y discernir Par e Impar. Son fáciles de realiza, pero de gran impacto entre los alumnos que rápidamente se muestran interesados en el tema.

Se les explica los juegos para que vean que todo el mérito es de las matemáticas y del concepto de Paridad.

El concepto de paridad es una idea muy simple que, sin embargo, se muestra muy útil para resolver muchos problemas, algunos realmente complicados. Es una estrategia que no suele aparecer en los modelos clásicos de resolución de problemas.

Definición de paridad

Se dice que dos números tienen la misma paridad si ambos son pares o ambos impares.

La suma de dos números con la misma paridad es par.

La suma y la cantidad de impares en la suma tienen la misma paridad.

Algunas propiedades elementales:

i. La suma de dos números pares es par.
ii. En general la suma de números pares es par.
iii. La suma de dos números impares es par.
iv. La suma de una cantidad par de números impares es par.
v. En general la suma de una cantidad impar de impares es impar.
vi. La suma de un par y un impar es impar
vii. En general la suma de pares e impares dependerá del número de impares que haya en la suma, es decir, si la cantidad es par la suma es par, si la cantidad es impar la suma es impar.

Un problema típico podría ser el siguiente:

> *"En un tablero de ajedrez, diseña un paseo de un caballo, que comience en la casilla a1 del tablero y termine en la casilla h8, visitando cada una de las demás casillas una sola vez en su camino."*

Volteando Cartas (o copas),

Disponemos de una baraja 5 cartas.
Colocamos las 5 seguidas, de modo que haya 3 cara abajo (B) y 2 cara arriba (A)

B	A	B	A	B

Se le pide al espectador, que intente poner todas las cartas boca arriba (todas con la A), volteando siempre dos cartas consecutivas (las que quiera, pueden estar en las orillas o en el centro).
Al no conseuirlo trataremos de hacerlo nosotros. Sin prisa y titubeando y dudando, iremos cambiando hasta conseguir las 5 cartas boca arriba(A).

El truco está en qué cuando nosotros hagamos el juego colocaremos las cartas, "aparentemente" igual pero estarán en esta posición

A	B	A	B	A

El primer movimiento será rápido, para que no pueda reparar en el "pequeño cambio"

Explicación:
En el primer caso, hay 2 cartas boca arriba (paridad PAR) por lo que no podremos conseguir una cantidad impar de cartas boca arriba, ya que el movimiento que se permite, (voltear dos cartas consecutivas) siempre mantiene la paridad de las que están boca arriba y las que están boca abajo.

CUATRO OBJETOS DE YATES

Martind Gasdner
Magia inteligente. Pag. 81

Colocamos tres palillos verdes y uno rojo en una fila, nos volvemos de espalda.
Un espectador cambiará la posición del Rojo, intercambiando su posición con uno verde que esté a su lado, tantas veces como quiera, pero debemos saber cuántas.
Iremos pidiendo que retire palillos, hasta que se quede solo con el rojo.

Método

1 2 3 4

Antes de volvernos nos fijamos en la posición del rojo (4).

- Si el número de cambios es impar, el Rojo acabará en posiciones 1 o 3

•Mandamos retirar el 4 (extremo derecho).
•Pedimos un nuevo intercambio del palillo Rojo, con lo cual quedará en la posición 2 (centro)
•Mandamos retirar los dos extremos, y queda el Rojo

- Si el número de cambios es par, el Rojo acabará en las posiciones 2 o 4

•Mandamos retirar el 1 (extremo izquierdo).
•Pedimos un nuevo intercambio del palillo Rojo, con lo cual quedará en la posición 2 (centro)

•Mandamos retirar los dos extremos, y queda el Rojo

Buscando al Personaje

Divulgamat. Pedro Alegría

Este juego es similar al anterior, pero un poco más espectacular. Se puede hacer con cartas o también con los propios alumnos, uno de ellos será el director del juego y habrá otros 7 que harán el papel de las cartas. El que haga de director decidirá quién es la "***persona importante***" a la que el mago tendrá que descubrir y será el encargado de dirigir los movimientos a realizar.

Una vez colocadas todas las personas en fila, se harán una serie de cambios. Cada cambio consiste, siempre, en intercambiar la posición de con alguien que esté a su lado

- Coloca las siete personas en fila y señala, sin que yo lo vea a la ***"persona importante"***
- En primer lugar, mueve la dama tantas veces como el lugar que ocupa. Es decir, si la dama está en quinto lugar, (puedes empezar a contar por el lado que tu decidas) vas a intercambiar a "***la persona importante***" cinco veces.
- A continuación mueve la dama dos veces más.
- Creo que en este momento, no has colocado la dama en ninguna de las esquinas, de modo que retira las personas de la izquierda y la derecha. Seguiremos el juego sólo con cinco personas
- Mueve la"***la persona importante***" tres veces más.
- Creo que ha vuelto a huir de las esquinas. Retira las personas de las esquinas.
- Sólo quedan tres personas y una de ellas es la que debemos descubrir.
- Mueve una vez más.
- "***la persona importante***" está en el centro de las tres.

El Castillo Encantado

Martin Gadner
Nuevos Pasatiempos matemáticos. Cap. 9

Construimos un cuadrado mágico con una baraja.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Poner una ficha en uno cualquiera de los números.

Cada movimiento consiste en trasladar la ficha a un lugar adyacente, en Horizontal o Vertical (no en diagonal)

A continuación, le entregamos una ficha con instrucciones de movimientos y retirada de números. Al final de las instrucciones, la ficha quedará en el 5.

Explicación

Debemos tener preparadas dos tarjetas con las instrucciones correspondientes.
Sacaremos la primera tarjeta si la ficha se coloca en los " lugares impares"(8,6,5,4,2) y la segunda si la ficha se coloca en los "lugares pares" (1,3,7,9)

Tarjeta 1:
•1- Retirar el 7
•2- Mover 7 veces y Retirar el 8
•3- Mover 4 veces y Retirar el 2
•4- Mover 6 veces y Retirar el 4
•5- Mover 5 veces y Retirar el 9
•6- Mover 2 veces y Retirar el 3
•7- Mover 1 veces y Retirar el 6
•8- Mover 7 veces y Retirar el 1

Tarjeta nº 2:
•1- Retirar el 6
•2- Mover 4 veces y Retirar el 2
•3- Mover 7 veces y Retirar el 1
•4- Mover 3 veces y Retirar el 4
•5- Mover 1 veces y Retirar el 7
•6- Mover 2 veces y Retirar el 9
•7- Mover 5 veces y Retirar el 8
•8- Mover 3 veces y Retirar el 3

Cartas Rojas y Negras (Principio de Hummer),

Venancio Ávarez, Pablo Fernández y M. Auxiliadora Márquez
Gaceta de la RSME
Vol. 5.3 Pags. 711-735

Disponemos de una baraja con cartas rojas y negras alternadas (Puede ser cualquier número de ellas).
Pedimos a varios espectadores que corten y volteen las dos cartas que quedan en la parte de arriba (deben voltearse simultáneamente). Esta operación la pueden repetir tantas veces como deseen, ocultos a la vista del mago.
Cuando se han terminado estas operaciones entregan la baraja y "adivinaremos" cuantas cartas han quedado boca arriba y cuantas han quedado boca abajo. Lo haremos por medio del "tacto", por lo que haremos una pasada, sin mirar las cartas y sin que las vea el público, para terminar anunciando que exactamente, la mitad de las cartas han quedado boca arriba y la otra mitad boca abajo.
Y no solo eso, han quedado boca arriba las cartas rojas y boca abajo las negras.

Explicación:
Al principio, todas las cartas rojas tienen paridad par y las negras paridad impar.
Al voltear las dos cartas simultáneamente, lo que se está haciendo es cambiar la paridad de las dos cartas.
Cuando pasamos la baraja debajo de la mesa, o por la espalda, separamos las cartas en dos partes, en una irán las cartas que ocupan posición impar y en el otro las que ocupan posición par y antes de sacarlas giramos uno de los montones y lo colocamos sobre el otro. De ese modo quedaran las rojas en un sentido y las negras en otro

Volteando monedas

Martin Gadner
Magia matemática pag. 76

Unas cuantas monedas colocadas encima de la mesa. (habrá caras y cruces.)

Pedimos a un espectador que voltee las monedas, tantas como quiera. Debe decidir de antemano cuántas monedas va a voltear. A continuación tapa una moneda, y yo adivinaré si está tapando una cara o una cruz.

Debemos fijarnos si la cantidad de caras es par o impar)
El nº total de caras PAR - IMPAR va cambiando con cada vuelta de una moneda.
Cuando termina de voltear, si el número de vueltas es par, la paridad del número de caras no ha cambiado y si ha habido un número impar de vueltas, habrá cambiado. Por tanto, sabemos que el número de caras debe ser par o impar, y por tanto basta contar las que quedan a la vista.

Rojas, Negras, Picas, Corazones,….

Se reparte el mazo en dos partes, aproximadamente iguales y se da cada una a un espectador para que barajen y corten tanto como quieran. Mientras tanto, el mago entregará a otro espectador, un papel doblado donde ha escrito una predicción.

A continuación, cada uno de ellos deja su parte del mazo frente a él y se procede de la siguiente manera: Cada uno de los espectadores, corta su montón y volteando las cartas (quedaran boca arriba), las pone frente al montón del otro espectador, para que inmediatamente cada uno con las cartas que tiene delante, forme un único montón, mezclando las cartas que están boca arriba con las que están boca abajo. En ese momento, en cada montón quedan algunas cartas boca arriba y otras, boca abajo.

Este proceso se repite, al menos, dos veces más. Ahora en el proceso de inversión, las cartas que estén boca arriba, volverán a quedar boca abajo y viceversa

Una vez terminado el proceso, el mago une los dos montones y el espectador que tiene la predicción pasa a leerla. La predicción va a ir graduada, así que tenemos que advertir al espectador que vaya desdoblando el papel paso a paso

Desdobla la primera y lee: *"Han quedado 23 cartas invertidas"*
2ª Doblez: *"De las 23 cartas invertidas, 13 serán Rojas y 10 Negras"*
3ª Doblez: *"Las cartas Rojas on 6 Rombos y 7 Corazones. Las Negras son 3 Picas y 7 Trebol.*
4ª Doblez: *Las Cartas son:* *Rombos: 1, 4, 5, 9, J, K*
Corazones: 2, 4, 7, 8, 10, J, Q
Picas: 3, 6, J
Trebol: 1, 2, 5, 7, 9, Q, K.

El público comprueba que ha habido un pequeño error, ha fallado una de las cartas. Cuando el público comprensivo, concede que un pequeño fallo no es importante, le pide al espectador que observe que en la hoja, todavía hay un pequeño doblez, lo abre y lee: "*Habrá un error, en vez del K de Trebol, estará el 3 de Trebol"*

Explicación:

El mago deberá tener la baraja preparada en dos partes, en una estarán las 23 de la predicción y en la otra el resto (29). Y así se las dará a los espectadores. Para hacer bien la separación puede decir que va a quitar los comodines que para este juego, no nos hacen falta,
Al unir los dos montones, tiene que girar el que en un principio tenía las 23 cartas y ponerlo sobre el otro. El resto es automático.

El tapiz del señor Kolo

Carlos Vinuesa del Río.
MatemáGicas:
Revista NÚMEROS vol. 76

Tomamos 16 cartas (Ases, J, Q, K) las disponemos de modo que las cuatro K, queden como en el dibujo, el resto de cartas es indiferente.

Se cuenta que el millonario señor Kolo mandó realizar un tapiz de vivos colores, que se representa con las doce figuras y los cuatro ases de la baraja formando un “cuadrado” de 4 x 4 cartas.
Dado el desorbitado precio del tapiz, el señor Kolo decidió que sería buena idea marcar el mismo con su inicial, la letra K, pues así en caso de robo podría reconocerlo de nuevo. La marca se realiza volteando algunas de las cartas.

		K	K
K			K

I			I
	I		I
		I	I
	I		I

Como era de esperar el tapiz fue robado.
Para llevárselo los ladrones tuvieron que doblarlo. Se pide a un alumno que doble el tapiz, siguiendo las líneas horizontales o verticales como desee, hasta que queden todas las cartas agrupadas en un solo montón.
Pasado un tiempo, el señor K creyó reconocer su tapiz. Para comprobar que era el suyo, no tuvo más que extenderlo y allí apareció su marca: La letra K.
Al extender las cartas sobre la mesa, todas están cara abajo, excepto los cuatro K, que están cara arriba.

JUEGO: Fichas Rojas y Negras

Sobre una mesa se tienen **n** fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuántas con el lado rojo hacia arriba y cuántas con el color negro hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de la siguientes dos cosas: 1.-Retirar cualquier cantidad de fichas, con la condición de que todas tienen que ser del mismo color hacia arriba. 2.-Voltear cualquier cantidad de fichas, con la condición de que todas las volteadas tengan el mismo color hacia arriba. Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál de los jugadores se puede asegurar que ganará el primero o el segundo.

ACTIVIDADES

1. Empezamos con un problema-juego muy conocido. El histórico solitario del paseo del caballo sobre un tablero de ajedrez.

"Con un caballo de ajedrez, realizar un "paseo" saltando por el tablero, visitando todas las casillas, una única vez."

El paseo es posible y tiene una gran cantidad de soluciones. Podéis ir probando colocando un número sobre cada casilla visitada de modo que queden marcadas las casillas visitadas y además, si no consigues el paseo completo, veras el número de casillas visitadas.

1.1. Algo aparentemente más difícil. Realizar el paseo anterior comenzando en la casilla a1 y terminando en la h8.

1.2. En un tablero de ajedrez, un caballo comienza desde la casilla $a1$, y vuelve a la misma después de recorrer casi todas las casillas del tablero. Demuestra que el caballo ha realizado un número par de movimientos.

2. Escribimos los números del 1 al 10 en una fila. Colocar los signos "+" y "-" entre ellos de manera que el resultado de la expresión que resulte sea igual a 0.

2.1. Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse colocando los signos "+" y " – " entre los números del 1 al 10

3. Cuántas piezas de dominó nos hacen falta para tapar completamente un tablero de ajedrez, sin que sobresalga ninguna fuera del tablero. (Suponemos que cada cuadrado de la pieza del dominó es del mismo tamaño que los cuadrados del ajedrez)

3.1. ¿Podemos tapar un tablero de ajedrez al que le faltan dos esquinas opuestas con piezas de dominó de 1×2? ¿Cuántas nos harán falta?

4. Marta y sus amigos están de pie en un círculo. Sucede que las dos personas que se encuentran al lado de cada niño o niña son del mismo género. Si hay 5 niños en el círculo, ¿cuántas niñas hay?

5. Un grillo salta a lo largo de una línea. Su primer salto es de 1 cm, su segundo salto de 2 cm, tercer 3, etc... Cada salto puede llevarle a derecha o izquierda de su posición. Probar que, después de 2013 saltos, el grillo no puede acabar en el mismo lugar en el que empezó. ¿Podría volver si el número de saltos fuera de 2014?

5.1. Puedes dar alguna regla que te permita saber el número de saltos que debe dar el grillo para poder volver al punto de partida?

6. Dado un polígono de 101 lados convexo que tiene un eje de simetría, prueba que el eje de simetría pasa a través de uno de sus vértices. ¿Qué puedes decir sobre un polígono de 10 lados con las mismas propiedades?

7. Predicción de los extremos

Le damos las fichas de dominó a un alumno, de modo que forme una cadena con todas las fichas. Nosotros vamos a predecir cuál es el principio y el fin de esa cadena, antes de que empiece a colocarlas.

7.1. Se colocan todas las piezas de dominó en cadena (de modo que el número de puntos de cada uno de los lados de dominós adyacentes coincidan). Si un extremo de la cadena es un 5, ¿cuál es el otro extremo?

7.2. En un dominó todas aquellas piezas en las cuales uno de los cuadrados no tiene puntos quedan apartadas. Construye una cadena con las restantes piezas.

¿Cómo formarías la cadena utilizando solamente las piezas que contengan 0 y 1? ¿y si añadimos las que tienen 2? ¿y con los 3?...

8. Contando con cualquier número de damas, ¿cuál es el menor número de damas que se pueden colocar en las diagonales de un tablero de 5x5 para que la posición final de las damas sea simétrica respecto de las dos diagonales? ¿Y en un tablero de 6x6? ¿y en uno de 4x4?. Generaliza el problema para cualquier tamaño del tablero.

9. Pedro compró una libreta que tenía 96 hojas y las numeró del 1 al 192. Víctor por su parte rasgó 25 de las hojas del cuaderno de Pedro, y sumó los 50 números que encontró en dichas hojas. Víctor nos dice que la suma de esos números es 1990, ¿Podrías decir qué páginas arrancó?

10. Formar un "cuadrado mágico" usando los 36 primeros números primos.

11. Escribimos en una pizarra los números 1, 2, 3,..., 1984 y 1985. Borramos dos cualesquiera de ellos y los reemplazamos por su diferencia positiva. Después de repetir este proceso muchas veces, queda un único número en la pizarra. ¿Puede ser el cero?. Intentar el problema con menos números y estudiar si siempre es posible. ¿Para qué números es posible y para qué números no lo es?

12. Disponemos de los números siguientes: 1, 1, 2, 2, 3, 3. Coloca los 6 números de modo que entre dos "1" quede un número, entre dos "2" queden dos números y entre dos "3" queden tres números.

12.1. Repetir el problema anterior con los números 1,1,2,2,3,3,4,4. (Lógicamente entre dos 4 habrá cuatro números)

13. Cogemos un número de 17 dígitos e invertimos sus cifras formando un número nuevo. Sumamos estos dos números. Demostrar que esta suma tendrá al menos un dígito par.

14. Colocamos nueve números alrededor de un círculo: cuatro unos y cinco ceros. Con estos números realizamos la siguiente operación: entre cada dos números adyacentes colocamos un 0 si los números son diferentes, y un 1 si son iguales. Borramos después los números "viejos". ¿Podemos conseguir de esta manera que todos los números sean iguales, después de repetir esto varias veces?

15. Veinticinco chicos y veinticinco chicas se sientan alrededor de una mesa. Prueba que al menos uno de ellos tiene por vecinos a dos chicos.

16. De entre 101 monedas, 50 son falsas, y se diferencian de las verdaderas únicamente en 1 gramo de peso. Pedro tiene una balanza que muestra la diferencia de pesos entre los objetos colocados en cada plato. Elige una moneda y quiere saber si es verdadera o falsa en tan solo una pesada. ¿Puede hacerlo?

17. ¿Se pueden ordenar los números del 1 al 9 en una secuencia de manera que queden una cantidad impar de números entre el 1 y el 2, entre el 2 y el 3,… y entre el 8 y el 9.

18. **Concurso de El Pais, abril de 2011. Problema de lo sombreros**

Se informa a 30 presos de que se les va a colocar formando una fila y se les va a poner un sombrero en la cabeza a cada uno, blanco o negro, sin especificar cuántos gorros se pondrán de cada color (pueden ser 29 blancos y uno negro, 15 y 15, 17 y 13...). Cada preso sólo verá los sombreros de los prisioneros que tiene delante pero no el suyo ni los de detrás.

Un guardia irá preguntando sucesivamente a cada uno de los presos desde el último (el que ve todos pero no el suyo) al primero (que no ve ninguno) de qué color es su sombrero. Los presos sólo pueden contestar blanco o negro: si aciertan son liberados y si no, son ejecutados. Todos los presos pueden escuchar las respuestas anteriores a las suyas. Los prisioneros no pueden hacer señas, ni tocar a los otros, ni dar pistas con el tono o volumen de voz... deben contestar blanco o negro de la forma más aséptica posible porque si los carceleros detectaran algún truco de los mencionados, matarían a todos.

Antes de llevar esto a cabo, los presos, que conocen la prueba a la que van a ser sometidos pero no naturalmente de qué color serán sus sombreros, tienen un tiempo para hablar entre ellos y pensar una estrategia de grupo. ¿Cuál es la mejor estrategia para salvar al mayor número de prisioneros en cualquier caso? ¿Cuántos se salvan seguro con esa estrategia?

Bibliografía:

Alegría, Pedro. Página web: Divulgamat

Alegría, Pedro y Ruiz de Arcaute, J.C.. (2002): "La matemagia desvelada". *Sigma* 21, 145-174.

Álvarez, Venancio; Fernández, Pablo y Márquez, M. Auxiliadora. "Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos" Gaceta de la RSME Vol. 5.3 Pags. 711-735

Blasco, Fernando. "Matemagia" Temas de Hoy

Dmitry Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg . CÍRCULOS MATEMÁTICOS Editorial: RSME-SM Año: 2012

Martin Gardner. Magia inteligente. Ed Grarica. Barcelona

Martin Gardner. Nuevos pasatiempos matemáticos. Alianza ed.

Martin Gardner. Carnaval matemático. Alianza Editorial. Madrid

Martin Gardner. Circo Matemático . Alianza Editorial, Madrid

Muñoz Santonja, José. "Ernesto el aprendiz de matemago". Nivola, (2003Madrid.

Vinuesa del Río, Carlos. MatemáGicas: Revista NÚMEROS vol. 76