# XIII Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

Real Academia de Ciencias Exactas • Físicas • Naturales

# Jugando con Probabilidad


Ana Pontón Oca

Enrique Hernando Arnáiz

Antonio Arroyo Miguel


~~LAS PALMAS DE GRAN CANARIA~~
~~Marzo 2020~~
15,16 y 17 abril 2021

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

# Jugando con Probabilidad

- Este tema está pensado para los alumnos de 2º año. Se da en 4 sesiones de 1,5 horas.
- Trabajo en grupo
- Experimentación - Investigación
- Tratamos de acercarnos a la idea de probabilidad y de su medida, a través de la **experimentación y el juego**. Además, como es habitual en el trabajo que realizamos en Estalmat, les iremos proponiendo actividades **de Resolución de Problemas y de Investigación.**

# Jugando con Probabilidad

1. Introducción
2. Recuentos. Combinatoria
3. Juegos de azar. Probabilidad
4. Paradojas
5. Ábaco probabilístico.
6. Problemas finales
7. Bibliografía

# TRIELO

# TRIELO

Aquí están los programas completos:

Aquí los capítulos de Mates

Alfonso Población en Divulgamat

# Introducción

- Necesidad de la estadística y la probabilidad
- Fenómenos aleatorio y deterministas
- Las leyes del Azar (Video "Las leyes del azar" Antonio Pérez)
- https://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-leyes-del-azar/1296423/
- El juego a lo largo de la historia
- Principio de Kruskal

# Recuentos

(Combinatoria)

- En el primer curso ya tuvimos unas sesiones dedicadas a los recuentos.
- Realizamos algunos problemas de recuentos, poniendo el acento en algunos que nos parecen especialmente interesantes.

# Recuentos

## (Combinatoria)

(Glaymann y Varga "*La Probabilidad en la escuela*")

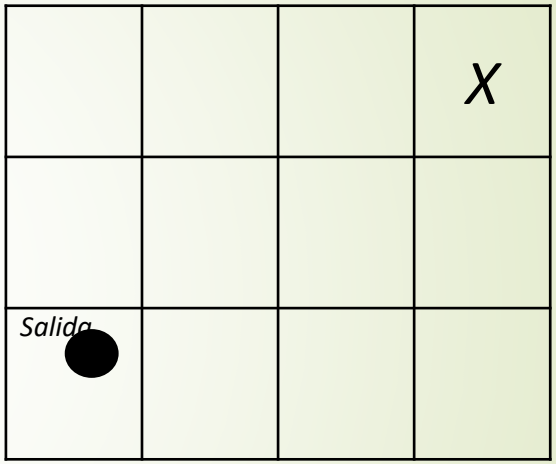
Problema 1

- Tenemos 5 cajas colocadas una al lado de otra y 3 bolas idénticas. De cuantas maneras diferentes puedo colocar las bolas en las cajas, con la condición de que cada caja tenga como máximo una bola.
- Ejemplos:
- El problema se puede generalizar a cualquier número de cajas y de bolas.

# Recuentos

## (Combinatoria)

- Problema 2




- En la cuadrícula de la derecha, colocamos una ficha en la casilla de salida y queremos llegar a la casilla X. Los únicos caminos que podemos seguir son *a LA CASILLA DE ARRIBA O A LA CASILLA DE LA DERECHA (Nunca hacia la izquierda ni hacia abajo)*

¿Cuántos caminos diferentes podemos realizar?

# Recuentos

## (Combinatoria)

Después de haber trabajado el problema, trataremos de

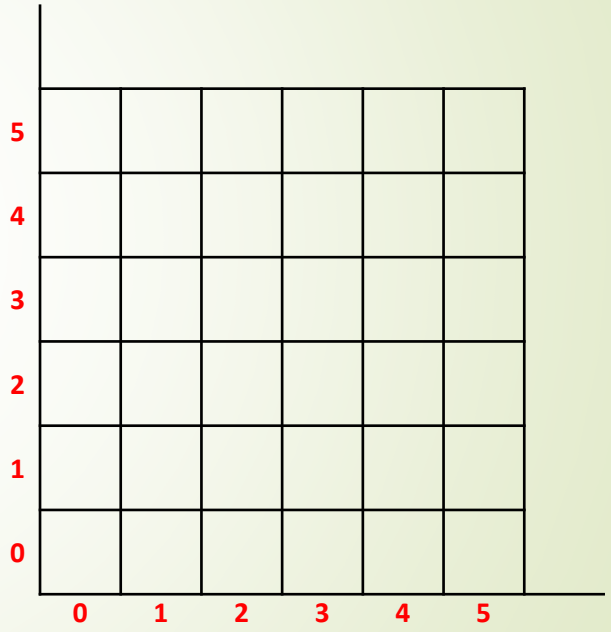
- Generalizar el resultado, cambiando el número de bolas.
- Generalizar el resultado cambiando, también el número de cajas.

| | | Número de bolas | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Número de cajas | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| | 3 | | | | | | | |
| | 4 | | | | | | | |
| | 5 | | | | | | | |
| | 6 | | | | | | | |

# Recuentos

## (Combinatoria)

- ¿Cuántos caminos hay para ir de la casilla (0,0) a una casilla cualquiera de la siguiente cuadrícula?




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 5 | | | | |
| 3 | 1 | 4 | 10 | | | |
| 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

# Recuentos

## (Combinatoria)

**Juega. Investiga**

(Glaymann y Varga "*La Probabilidad en la escuela*")

. Vamos a construir un conjunto $\mathbb{A}$ de figuras formadas por cuadrados, mediante las siguientes reglas:

figura 1

**Regla O**: La figura 1 es elemento de $\mathbb{A}$

**Regla D:** Si $\mathbb{F}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, entonces se obtiene un nuevo elemento de $\mathbb{A}$ añadiendo a $\mathbb{F}$ un cuadrado a su derecha.

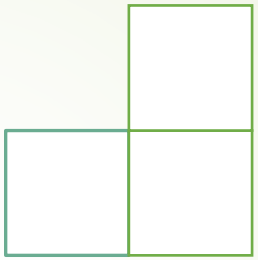
**Regla H:** Si $\mathbb{F}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, entonces se obtiene un nuevo elemento de $\mathbb{A}$ añadiendo a $\mathbb{F}$ un cuadrado sobre la columna que está más a la derecha.

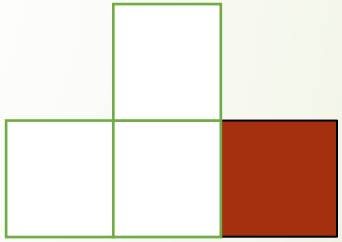
# Recuentos

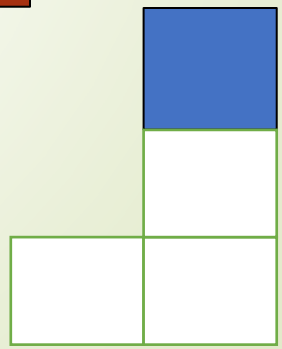
## (Combinatoria)

**Juega. Investiga**

(Glaymann y Varga *"La Probabilidad en la escuela"*)

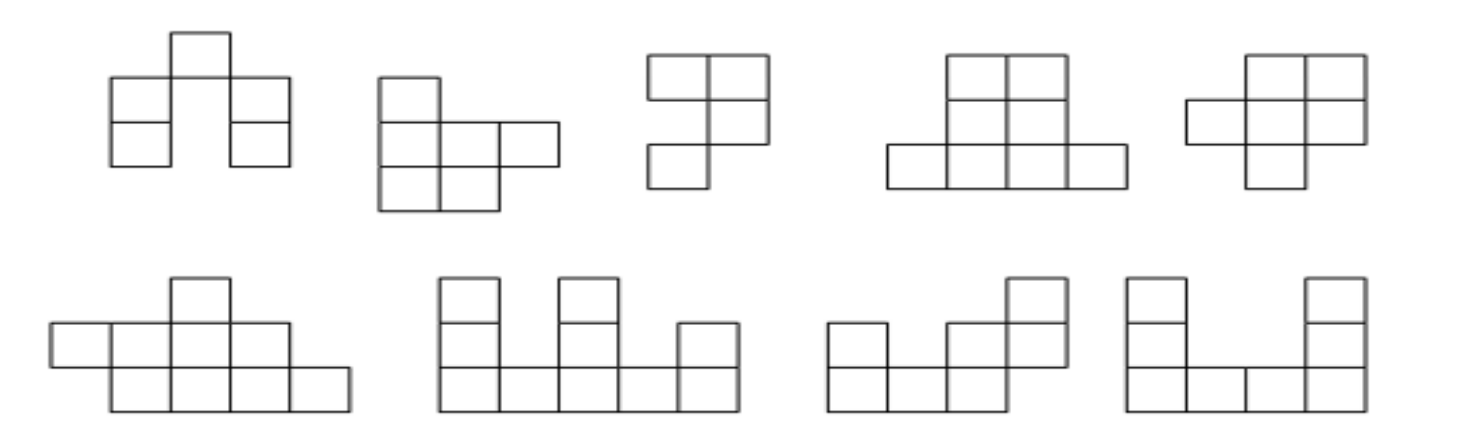
Ejemplo: Si la figura  está en **A**, podremos formar dos figuras:

1. Según la regla **D** 

2. Según la regla **H** 

# Recuentos - Combinatoria

1. Partiendo de la figura 1, encuentra nuevos elementos de $\mathbb{A}$, añadiendo 1,2, o 3 cubos.
2. De las siguiente figuras, di cuales pertenecen a $\mathbb{A}$, justificando tu respuesta.

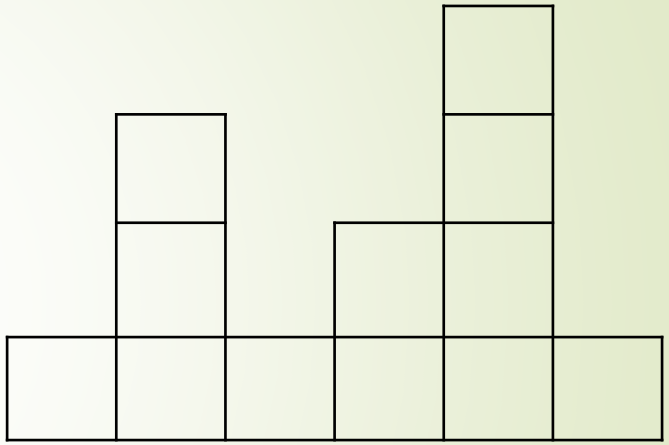


# Recuentos - Combinatoria

3. Dibuja todas las figuras de 𝔸 que estén compuestas de 4 cuadrados.
4. Haz lo mismo para las figuras de 5 cuadrados. ¿Cuántas hay?
5. ¿Cuántas figuras hay compuestas de 6 cuadraditos
6. Busca una regla que te permita calcular el nº de figuras de 𝔸 compuestas de un número dado “n” de cuadrados.

# Recuentos - Combinatoria

A la figura de la derecha, que es un elemento de **A**, podemos asociarle un par de números naturales **(12, 6);** el primer elemento de este par de números es el número total de cuadrados de la figura y el segundo es el número de cuadrados de la base.



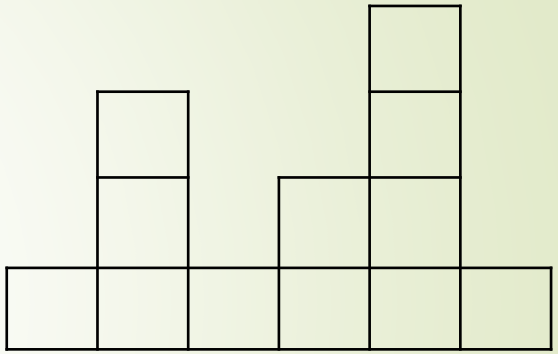
# Recuentos - Combinatoria

i) Determinar todas las figuras de $\mathbb{A}$ asociadas al par (6,3).

ii) Determinar todas las figuras de $\mathbb{A}$ asociadas al par (9,8).

iii) Determinar todas las figuras de $\mathbb{A}$ asociadas al par (12,2).

iv) Determinar todas las figuras de $\mathbb{A}$ asociadas al par (12,6).



# JUEGOS DE AZAR. PROBABILIDAD

Pedimos a los alumnos palabras relacionadas con el Azar

- Azar
- Probabilidad
- Seguro
- Imposible
- Posible
- Probable
- Improbable
- Coincidencia
- Juegos de Azar

- En una urna tenemos:

  **3 bolas Rojas, 3 Azules y 3 Verdes.**

- ¿Cuántas bolas tenemos que sacar, para estar seguros de que tenemos los tres colores?

En una urna tenemos:

**3 bolas rojas, 3 Azules y 3 verdes.**

- ¿Si saco n es _____ que saque los tres colores?

(Seguro, imposible, improbable, probable,…)

# PROBABLE

- ¿Qué tiempo hará mañana? ¿Lloverá? ¿Habrá aire? ¿Podremos sentarnos a tomar el sol?

- Durante el pasado año nacieron en Burgos 783 niños y 711 niñas. ¿Podemos saber cuántas niñas y niños nacerán el mes que vine en Burgos? ¿Podemos hace alguna afirmación “razonable” sobre el número de nacimientos?

# PROBABLE

- Existen situaciones, donde los alumnos ya tienen una ida intuitiva y clara de la probabilidad, por ejemplo:

- Si saco una carta de una barja española, qué es más probable:
  - Salga oros o no salga oros
  - Salga un as o un rey.
  - Salga un as  o una figura
- Al lanzar un dado
  - Salga un 1 o un 5
  - Múltiplo de 2 o múltiplo de 3

# PROBABLE

TABAS. Al tirar una taba, qué es más probable

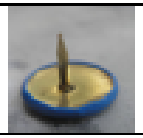
Hoyos, Panza, Carne, Lisas.

- CHINCHETA. Al lanzar una chincheta, puede caer con la punta hacia arriba o poyada en el suelo. ¿qué es más probable?

- Experimentamos

# PROBABLE

- Experimentamos

| Lanzamientos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

En una urna tenemos:
3 bolas Rojas, 3 Azules y 3 Verdes.

# Sacamos cuatro bolas.

- ¿Pueden ser de un color?:
  - ¿Pueden ser de dos colores?
  - ¿Pueden ser de tres colores?
  - ¿Pueden ser de cuatro colores?
  - ¿Qué es más probable?

Experimentamos

Simulación con Scratch

## En una urna tenemos:
## 3 bolas Rojas, 3 Azules y 3 Verdes.
## Sacamos **cuatro** bolas.

- ¿Pueden ser de un color?:
- ¿Pueden ser de dos colores?
- ¿Pueden ser de tres colores?
- ¿Pueden ser de cuatro colores?

¿Qué es más probable?

- Para esta fase de ver que es más probable, llevaremos varias bolsas con bolas (o fichas) de colores. Cada uno de los alumnos (trabajando por parejas) hará 20 o 30 extracciones y apuntará los resultados. A continuación, juntaremos todos los resultados de la clase.
- Comprobarán que **es más probable obtener 3 colores que 2**. Les pediremos que intenten dar un razonamiento para explicar los resultados obtenidos.

❖ Probabilidades teóricas: p(2 colores)=5/14 = 0,357142857…

❖ Probabilidades teóricas: p(3 colores)=9/14 = 0,642857142…

- En una urna tenemos:

**3 bolas Rojas**, **3 Azules** y **3 Verdes.**

¿Cambia el problema si, después de sacar la bola y anotar el color, la volvemos a meter a la urna?. (Con REPOSICIÓN)

- ¿Pueden ser de un color?:
- ¿Pueden ser de dos colores?
- ¿Pueden ser de tres colores?
- ¿Pueden ser de cuatro colores?
- ¿Qué es más probable?

- En una urna tenemos:

**3 bolas Rojas, 3 Azules y 3 Verdes.**

Sacamos cuatro bolas de una en una y después de anotar el color la volvemos a meter a la urna. (Con REPOSICIÓN)

- ¿Pueden ser de un color?:
- ¿Pueden ser de dos colores?
- ¿Pueden ser de tres colores?
- ¿Pueden ser de cuatro colores?
- ¿Qué es más probable?
- En este caso, comprobarán que es **más probable obtener 2 colores que 3**. Les pediremos que intenten dar un razonamiento para explicar los resultados obtenidos.
- Probabilidades teóricas: p(1 color)=3/81=0,037
- Probabilidades teóricas: p(2 colores)=42/81=0,518
- Probabilidades teóricas: p(3 colores)=36/81=0,444

# En una urna tenemos:
# 9 bolas Rojas, 6 Azules y 5 Verdes

Sacamos dos bolas.

- ¿Qué pareja es más probable:
- Dos Rojas
- Dos Azules
- Una Roja y una Azul
- …

Simulación con
Excel o Scratch

# En una urna tenemos:
# 9 bolas Rojas, 6 Azules y 5 Verdes

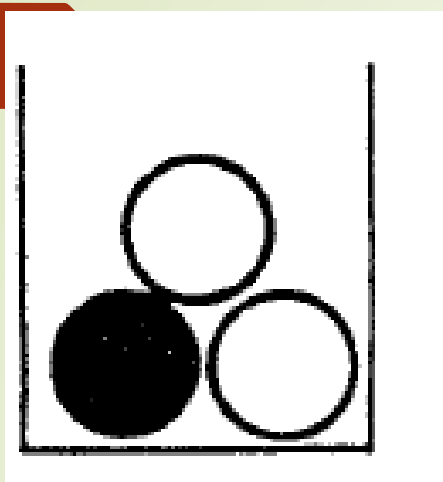
Sacamos dos bolas.

¿ Ordena de más a menos probables, los siguientes sucesos:

- Dos Rojas
- Dos Azules
- Dos Verdes
- Una Roja y una Azul
- Una Roja y una Verde
- Una Azul y una Verde
- Dos colores diferentes
- Dos colores iguales

- Experimentemos

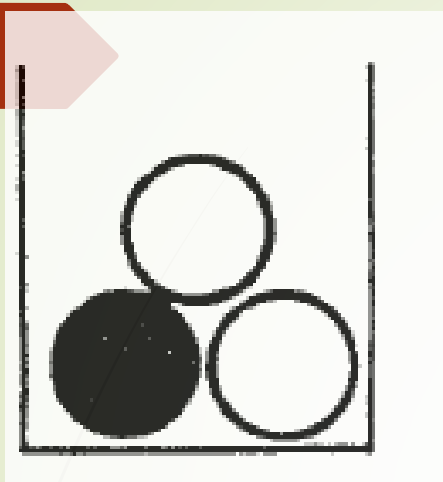
# Tablas de doble entrada y Diagramas de árbol



Colocamos en una urna dos bolas blancas y una negra. Extraemos una bola de la urna, anotamos su color, la devolvemos a la urna y extraemos de nuevo una bola y anotamos el color.

¿Cuál es el resultado más probable? BN, BB, ...

# Tablas de doble entrada y Diagramas de árbol



Hagamos una tabla con los posibles resultados:

2ª extracción

1ª extracción

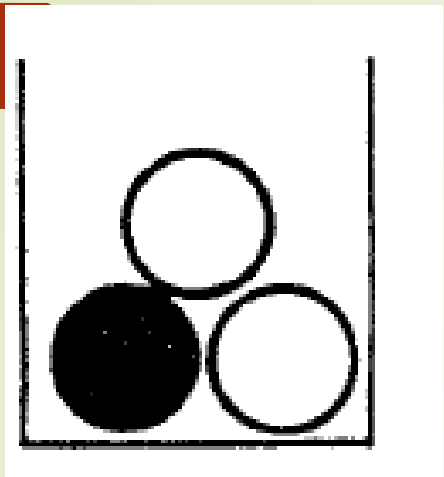
| | N | B1 | B2 |
|---|---|---|---|
| N | **N N** | **N B** | **N B** |
| B1 | **BN** | **B B** | **B B** |
| B2 | **BN** | **B B** | **B B** |

Observamos que tenemos 1 resultado para NN, 2 para NB, 2 para BN y 4 para BB.

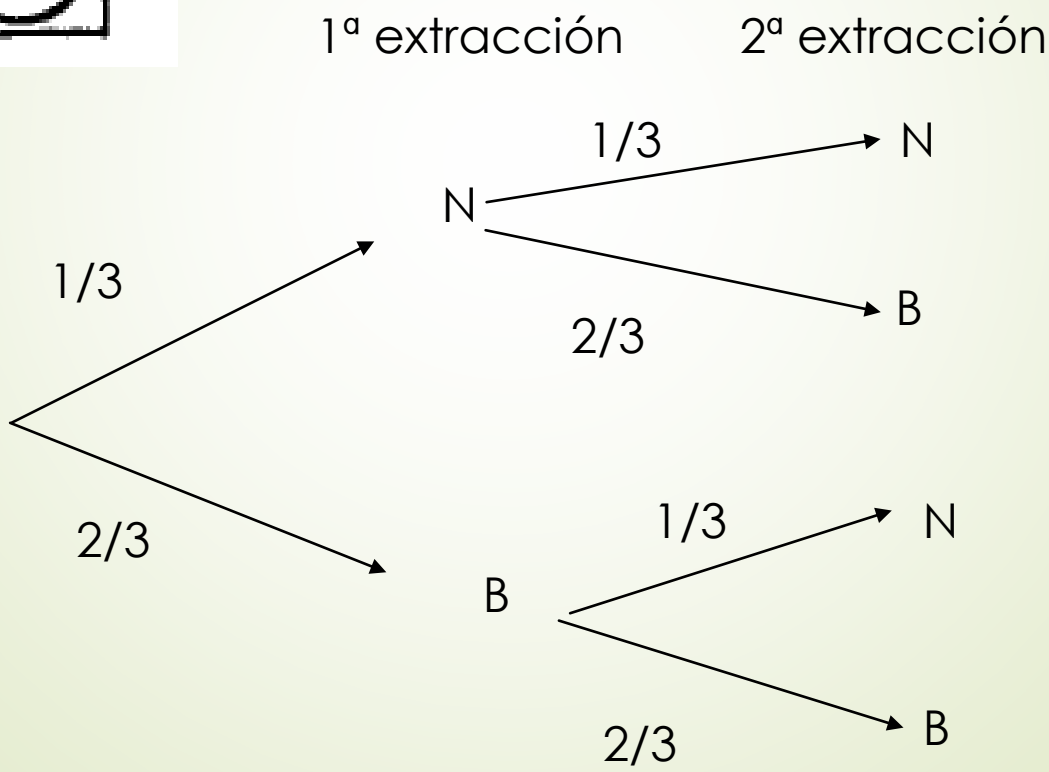
Por lo que podemos asignar las probabilidades de 1/9, 2/9, 2/9 y 4/9.

La probabilidad de una Blanca y una Negra seria de 4/9.

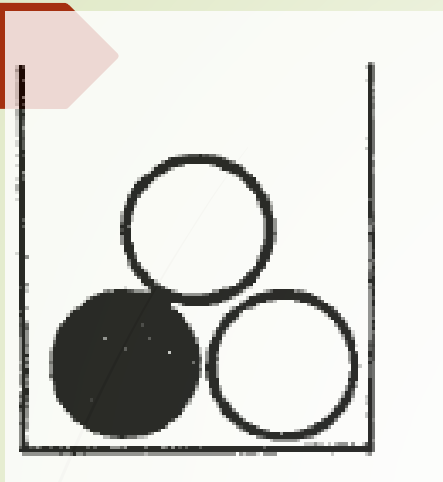
# Tablas de doble entrada y Diagramas de árbol



Hagamos diagrama de árbol con los posibles resultados:



# Tablas de doble entrada y Diagramas de árbol



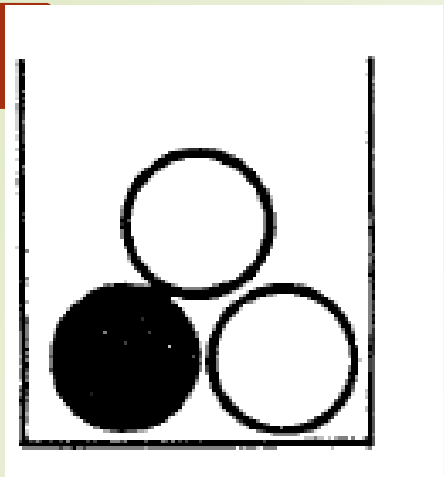
Repetimos la experiencia, SIN volver la primera bola a la urna:

2ª extracción

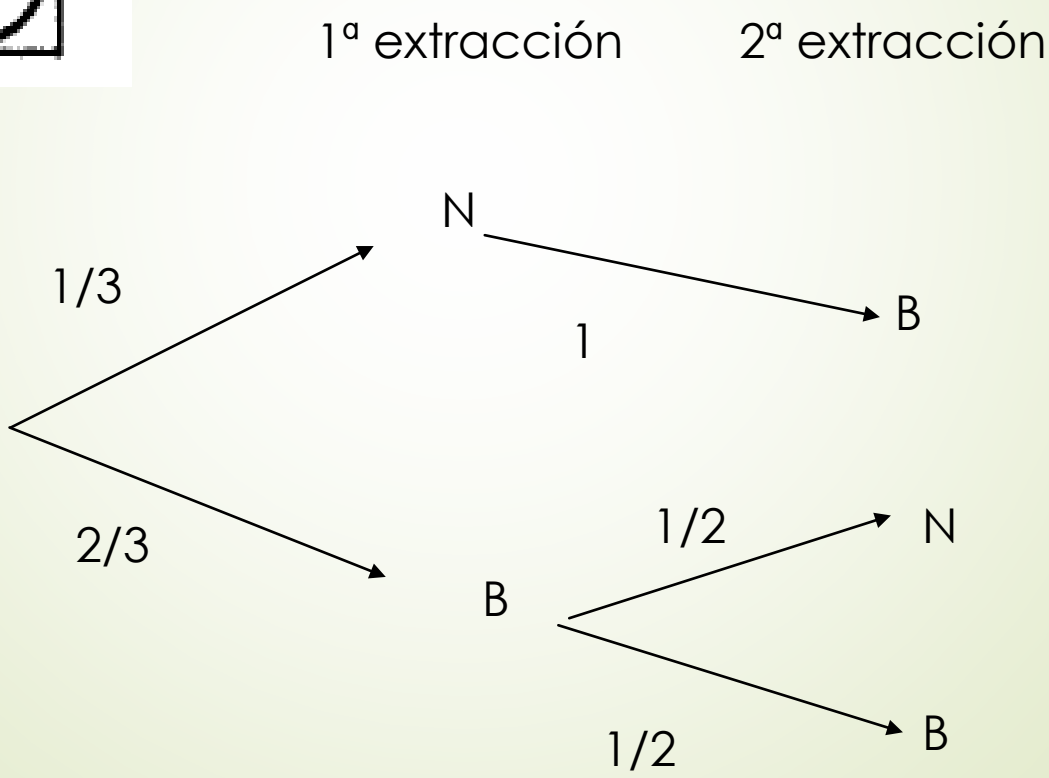
1ª extracción

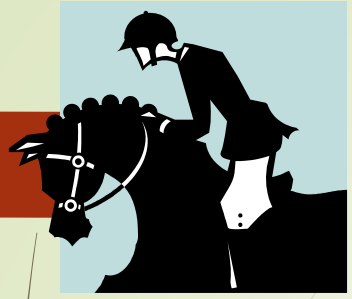
| | N | B1 | B2 |
|---|---|---|---|
| N | -- | N B | N B |
| B1 | BN | -- | B B |
| B2 | BN | B B | -- |

# Tablas de doble entrada y Diagramas de árbol



Repetimos la experiencia, SIN volver la primera bola a la urna:





# JUEGOS DE PROBABILIDAD

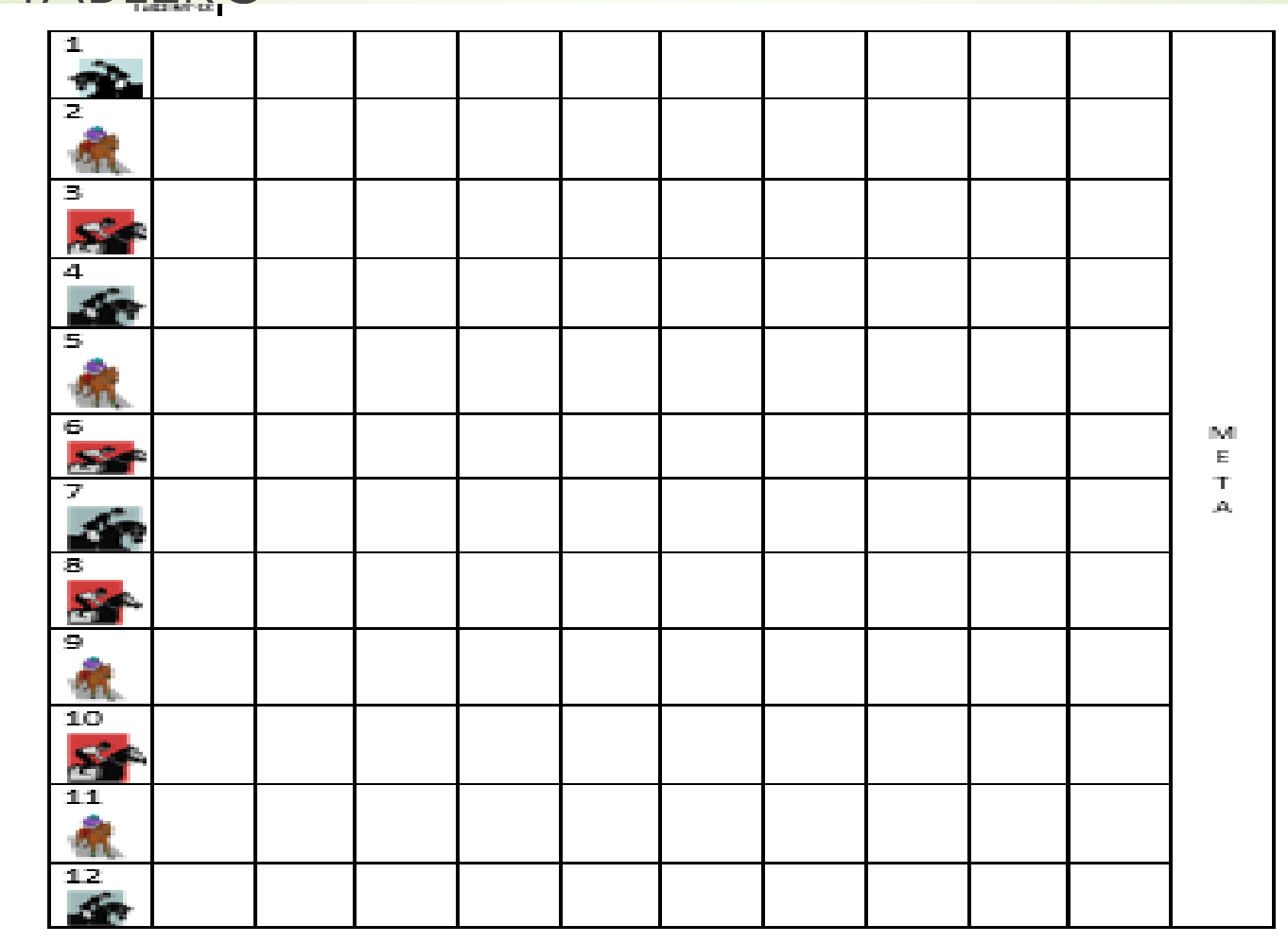
## Carreras de Caballos

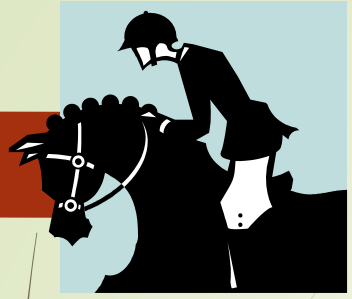
- 12 caballos numerados del 1 al 12 compiten en una carrera. Lanzamos dos dados y el caballo que tenga el número coincidente con la **suma** de los dados, avanza una casilla.
- ¿A qué caballo apostamos?

http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349638891/widget
http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349670574/widget

# Carreras de Caballos

- TABLERO

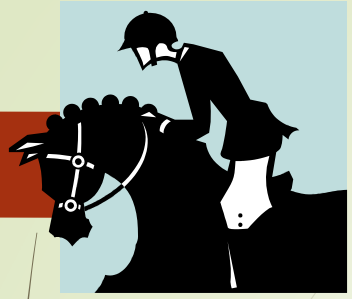




# Carreras de Caballos

- **SUMA**

- Se hacen grupos de tres alumnos, se les reparte el tablero y se les explica la mecánica del juego
- A continuación, cada alumno elige cuatro caballos, de uno en uno y por turnos.
- Un secretario que anota **todos** los números que van saliendo.
- Se deja que jueguen libremente durante un rato. En cada partida empieza un jugador diferente a elegir los caballos. (Se lo pasan muy bien, se observa cómo afrontan las derrotas...)
- Se hace un estudio estadístico de los resultados que han ido saliendo en toda la clase. Se habla de los resultados en el juego, del azar y de si algún caballo tiene ventaja. DADOS



# Carreras de Caballos

- **SUMA**

- Se ordenan los resultados en una tabla de doble entrada, Se insiste en que los resultados previstos teóricamente se ven alterados por el azar.
- Se comparan los resultados experimentales con los resultados previstos

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

# Carreras de Caballos 2

- 12 caballos numerados del 1 al 12 compiten en una carrera. Lanzamos dos dados y el caballo que tenga el número coincidente con **la diferencia** de los dados, avanza una casilla.
- ¿A qué caballo apostamos?

- Procedemos como en el juego anterior.

| - | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Investiga:

# Carreras de Caballos 3

- 12 caballos numerados del 1 al 12 compiten en una carrera. Lanzamos TRES dados. Eliminamos el que tenga la mayor puntuación y el caballo que tenga el número coincidente con **la suma** de los dos dados restantes, avanza una casilla.
- ¿A qué caballo apostamos?

Investiga:

# Carreras de Caballos 4

- 12 caballos numerados del 1 al 12. Sólo compiten tres de ellos. Lanzamos dos dados y el caballo que tenga el número más próximo a **la suma** de los dados, avanza una casilla.
- Que caballos debemos escoger para tratar de ganar la carrera.

# *CRUZANDO EL RÍO*

- Dos Jugadores
- Cada jugador dispone de 12 fichas que tiene que colocar en su orilla. Puede colocar tantas fichas como quiera en un mismo número.
- Después se lanzaran dos dados y cada jugador puede retirar una ficha de la casilla cuyo número coincida con el resultado obtenido en el lanzamiento. Si en dicha casilla no hay fichas , no se libera ninguna.
- Gana el jugador que primero termina con sus fichas.

# *CRUZANDO EL RÍO*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Investiga:

# *CRUZANDO EL RÍO*

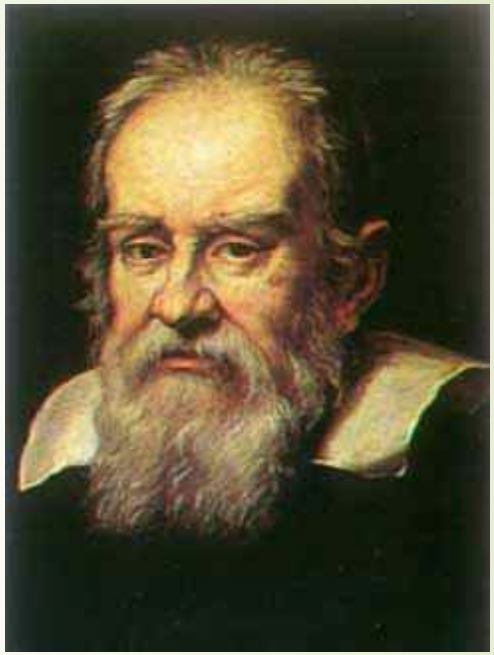
- ¿Cuál es la mejor estrategia?

- Si en lugar de 12 fichas, tuviéramos 36. ¿Cómo colocas las fichas?

¿Cambiarias de estrategia?

# PARADOJAS
## El Problema de GALILEO

- El Duque de Toscana le preguntó a Galileo:
- *¿Por qué, cuando se tiran tres dados, se obtiene más a menudo la suma 10 que la suma 9, aunque ambas sumas se obtengan de seis maneras diferentes cada una?*



**9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3**

**10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4**

# Una Apuesta peculiar
## DADOS DE EFRON (NO TRANSITIVOS)

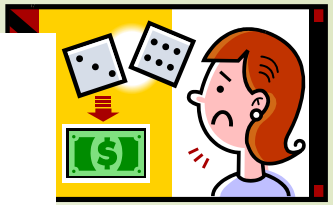
- Dos jugadores.
- Tenemos 4 dados diferentes.
- El primer jugador elige dado. El segundo jugador está obligado a coger el dado siguiente, según la numeración propuesta. (1- 2- 3 - 4-1)
- Lanzamos un dado.
- Gana el que saque la puntuación más alta.
- ¿Qué dado elegirías tu?

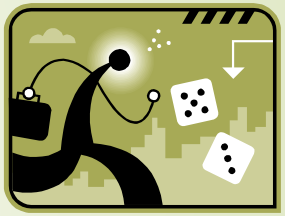
## Dado 1

| | | |
|---|---|---|
| | 5 | |
| 5 | 5 | 1 |
| | 1 | |
| | 1 | |

## Dado 2

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | |
| 6 | 2 | 2 |
| | 2 | |
| | 2 | |





## Dado 3

| | | |
|---|---|---|
| | 3 | |
| 3 | 3 | 3 |
| | 3 | |
| | 3 | |

## Dado 4

| | | |
|---|---|---|
| | 4 | |
| 4 | 4 | 4 |
| | 0 | |
| | 0 | |

# LOS DADOS

- Los alumnos se colocan por parejas y juegan varias partidas. Para elegir el dado, van alterando el primero en elegir.
- Cuando han jugado unas cuantas veces, cambian de pareja.
- Irán anotando, en cada partida, los dados elegidos, el orden en que se han elegido y el ganador de la partida.
- Después de unas cuantas partidas se les pide que escriban en su cuaderno, cuál creen que es el mejor dado y porqué.
- Juntamos los resultados de toda la clase.
- Por último, vamos a calcular la probabilidad de ganar con cada uno de los dados.
- Por grupos, van a ir analizando las probabilidades de ganar entre las diferentes parejas de dados.

# Comparemos el dado 1 con el 2

Dado 1

Dado 2

| | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

El dado número 2 gana en 24 de las 36 posibilidades que pueden darse.

Por tanto: **p(Dado 2) = 2/3**

**p(Dado 1) = 1/3**

# Comparemos el dado 2 con el 3

Dado 3

Dado 2

| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

El dado número 3 gana en 24 de las 36 posibilidades que pueden darse.

Por tanto: **p(Dado 3) = 2/3**

**p(Dado 2) = 1/3**

# Comparemos el dado 3 con el 4

Dado 3

Dado 4

| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

El dado número 4 gana en 24 de las 36 posibilidades que pueden darse.

Por tanto: **p(Dado 4) = 2/3**

**p(Dado 3) = 1/3**

- Hemos visto que el 2 gana al 1, el 3 al 2 y el 4 al 3, por lo que puede parecer razonable pensar que lo mejor es coger el 4, pues gana al 3, que a su vez gana al 2, que a su vez gana al 1, …

# Comparemos el dado 1 con el 4

Dado 1

Dado 4

| | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |

El dado número 1 gana en 24 de las 36 posibilidades que pueden darse.

Por tanto: **p(Dado 1) = 2/3**

**p(Dado 4) = 1/3**

# Hagamos las comparaciones que faltan

La Probabilidad de ganar cada dado a cada uno de los otros son:

| | Dado 1 | Dado 2 | Dado 3 | Dado 4 |
|---|---|---|---|---|
| Dado 1 | ---------- | 2/3 | 1/2 | 1/3 |
| Dado 2 | 1/3 | ---------- | 2/3 | 4/9 |
| Dado 3 | 1/2 | 1/3 | ---------- | 2/3 |
| Dado 4 | 2/3 | 5/9 | 1/3 | ---------- |

# Problema

- Si juegan los 4 dados simultáneamente. (4 Jugadores)

- ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno de ellos?

**p(Dado 1) = 1/3**
**p(Dado 2) = 1/3**
**p(Dado 3) = 1/9**
**p(Dado 4) = 2/9**

Investiga

# Juego de Penney

- Juego para dos jugadores.
- Lanzamos varias veces una moneda al anotamos los resultados.
- Cada jugador elige tres resultados, que deben producirse seguidos al lanzar la moneda. (p.e. +CC y CC+)
- Se lanza la moneda hasta que aparezca uno de los dos modelos elegidos por los jugadores.
- Gana el jugador que tiene el modelo que aparece en primer lugar.

Investiga

# Juego de Penney

Modelo de partida:

- Jugador 1: +CC
- Jugador 2: CC+
- Lanzamos: C+C+++C++**+CC**
- La primera en aparecer es +CC por lo que en este caso ganaría el primer jugador.

Investiga

# Juego de Penney

¿Cuál es la mejor elección para ganar?

- Busca todos los modelos de tres lanzamientos.
- Calcula la Probabilidad de cada uno de ellos
- Recuerda el problema anterior (dados) y piensa si puede darse alguna situación parecida a la que se daba allí.

| |
|---|
| CCC |
| CC+ |
| C+C |
| +CC |
| C++ |
| +C+ |
| ++C |
| +++ |

# Juego de Penney

¿Cómo la probabilidad de cada una de las ternas es 1/8, podemos decir que todas tienen las mismas probabilidades de ganar?

*Supongamos que el jugador A elige CCC y el B elige XCC. En el momento en el que salga una X ya no podrá ganar CCC, porque cuando aparezcan dos C seguidas ya habrá ganado XCC. Por tanto, la única opción para que gane CCC es que aparezca al principio, y la probabilidad de que eso ocurra es 1/8. Por tanto, con esta elección la probabilidad de que gane A es 1/8 y la de que gane B es 7/8 (el resto).*

**¿Qué terna elegir?**

**Para cada jugada de A, hay una respuesta de B, que le permite tener una mayor probabilidad de ganar**

# Juego de Penney

| Selección de A | Respuesta B | Probabilidad de ganar B |
|---|---|---|
| CCC | +CC | 7/8 |
| CC+ | +CC | ¾ |
| C+C | CC+ | 2/3 |
| +CC | ++C | 2/3 |
| C++ | CC+ | 2/3 |
| +C+ | ++C | 2/3 |
| ++C | C++ | ¾ |
| +++ | C++ | 7/8 |

# Juego de Penney

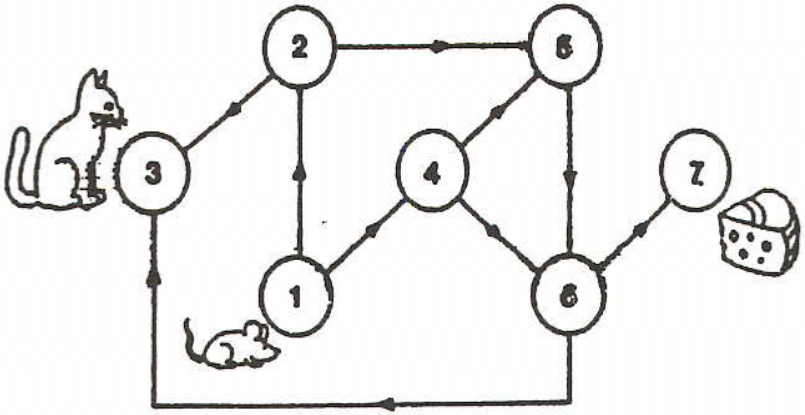
- La forma de elegir la respuesta es la siguiente:

  Sus dos primeras posiciones van a ser nuestras dos últimas y la primera la escogeremos de modo que no se forme un palíndromo, es decir que no sea simétrica.

# SIMULACIÓN

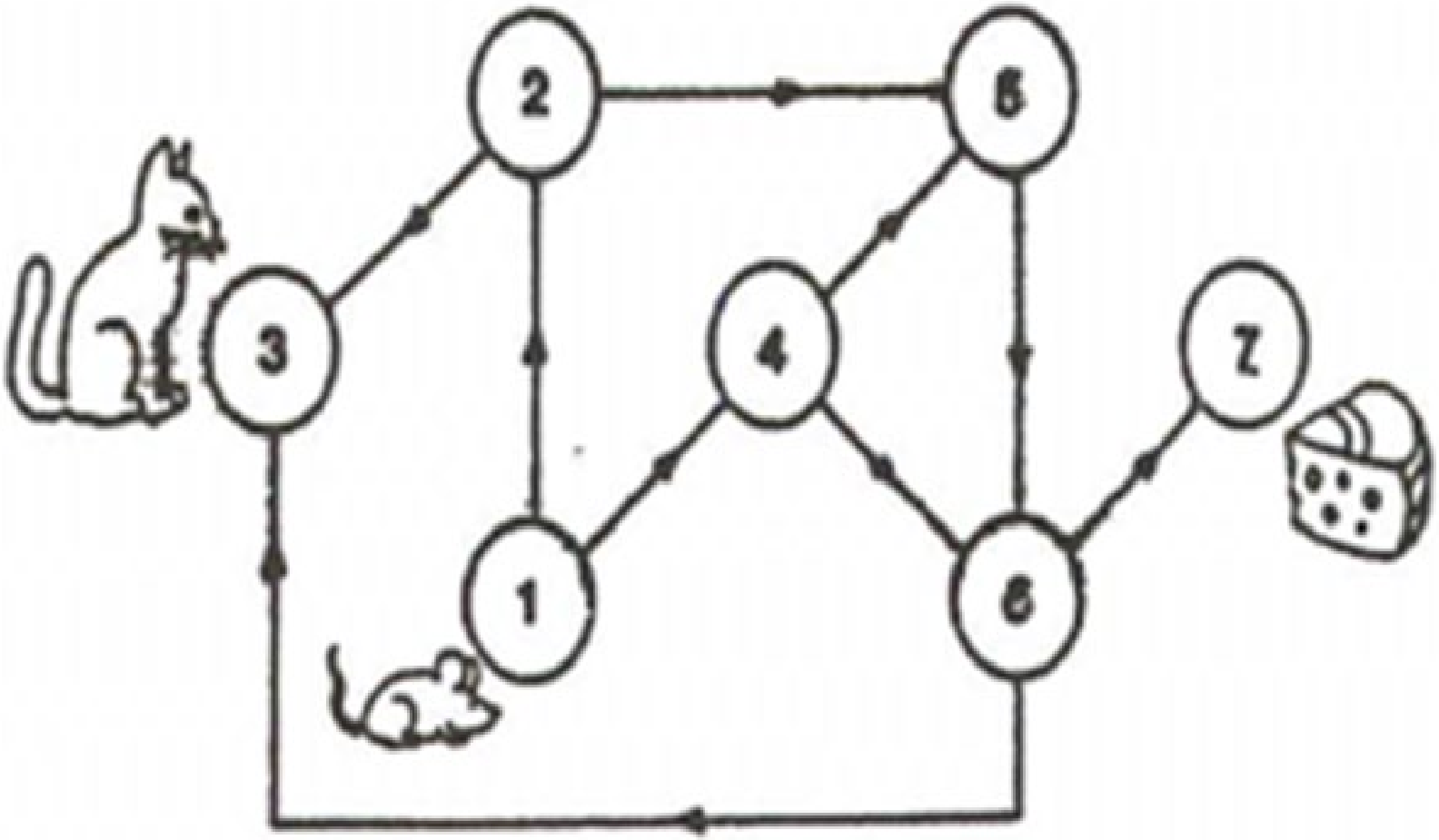
**El ratón y el queso**

*De 12 a 16. Grupo Cero de Valencia*




Observa el laberinto que representa el grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un gato y otra en la que hay un trozo de queso. Un ratón está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega al queso, sale del laberinto relamiéndose, pero si tropieza con el gato, está irremisiblemente perdido, el gato será el que se relama y se atuse los bigotes. ¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentado? ¿Y de que se lo coma el gato?

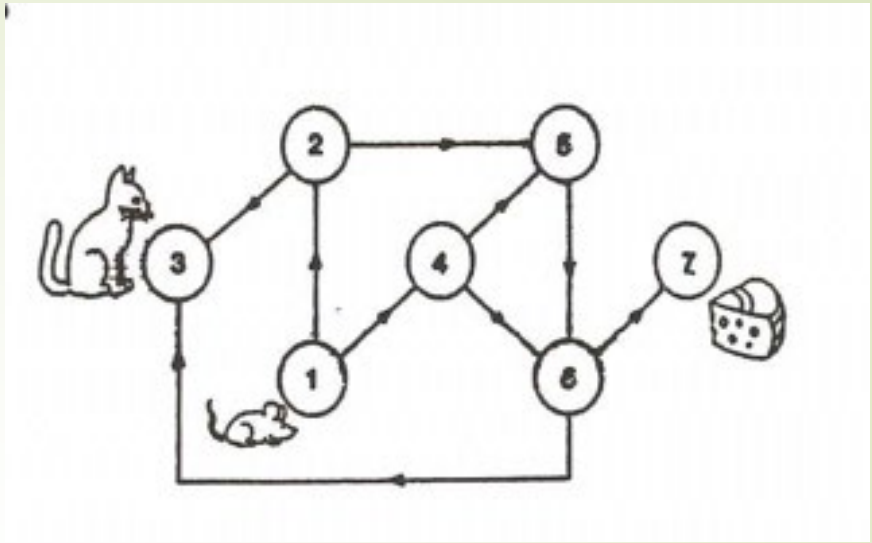
Buscando su destino, el ratón puede ir por muchos caminos distintos: ¿requieren todos el mismo tiempo para recorrerlos? ¿Cuánto tiempo le costará al ratón acabar, bien o mal, su paseo por el laberinto, si tarda un minuto en recorrer la distancia que separa dos nudos consecutivos?


2
5
3
4
7
1
6

Podemos hacer una simulación con fichas:

Partimos de 1, colocamos dos fichas, para que una vaya para cada lado, si hubiera tres caminos pondríamos tres fichas,…

Llegamos a 2 y 4 con una ficha, como tenemos que repartir, necesitamos tener otra, por lo que vuelvo a sacar dos fichas de 1.




Repitiendo el proceso tengo dos fichas en 2 y dos en 4. Las fichas de 2 van una a 3(final) y la otra a 5. Las de 4 van a 5 y a 6 respectivamente.

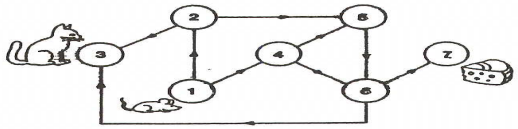
Las dos fichas de 5 pasan a 6 (un solo camino).

Ahora tenemos 3 fichas en 6, como hay que repartir en dos partes iguales, podemos repetir todo el proceso anterior y tendremos seis fichas en el 6 (en ese proceso una segunda ficha habrá caído en 3).

Por último, desde el 6, 3 fichas val al queso(7) y 3 al gato(3).

Por lo que nos queda que de las 8 fichas que hemos sacado desde 1, 5 han llegado al gato y 3 al queso, luego se espera que al queso lleguen 3/8 y al gato 5/8

**El ratón y el queso**




Observa el laberinto que representa el grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un gato y otra en la que hay un trozo de queso. Un ratón está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega al queso, sale del laberinto relamiéndose, pero si tropieza con el gato, está irremisiblemente perdido, el gato será el que se relama y se atuse los bigotes. ¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentado? ¿Y de que se lo coma el gato?

Buscando su destino, el ratón puede ir por muchos caminos distintos: ¿requieren todos el mismo tiempo para recorrerlos? ¿Cuánto tiempo le costará al ratón acabar, bien o mal, su paseo por el laberinto, si tarda un minuto en recorrer la distancia que separa dos nudos consecutivos?

Calculemos probabilidades:

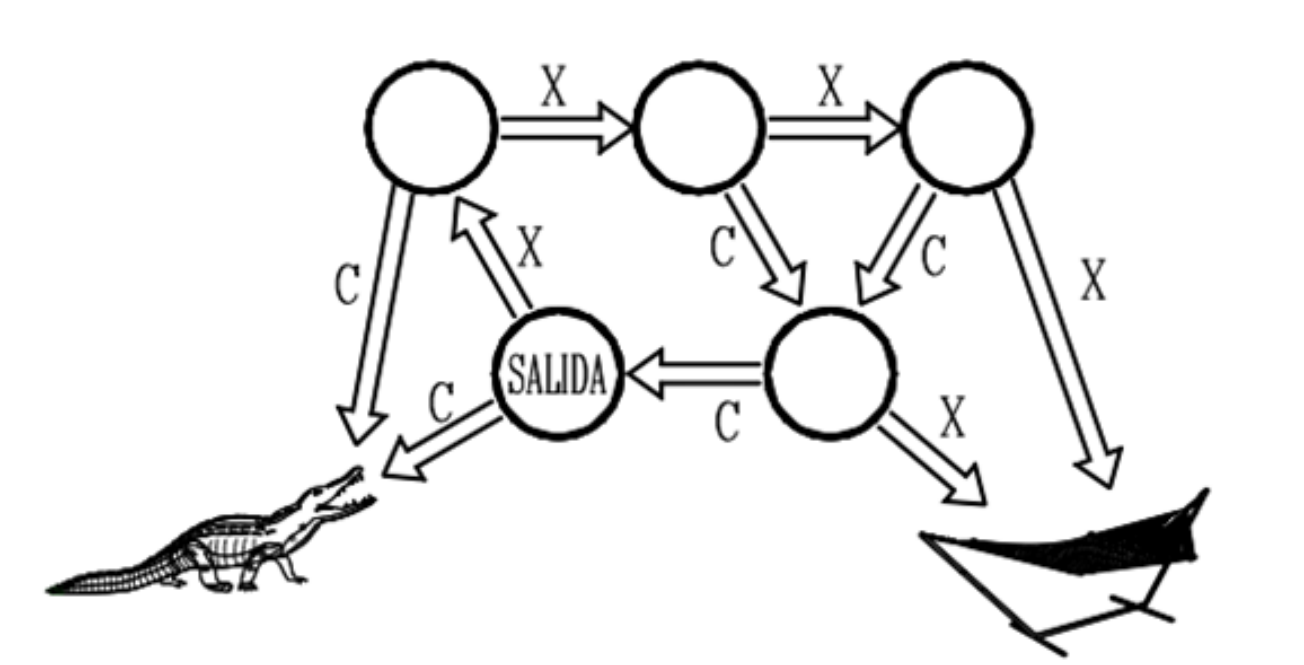
Para llegar al queso tenemos 3 caminos:
12567 – 14567 -1467, por lo que la probabilidad será:

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 3/8 .$$

Para llegar al gato, tenemos el camino 123 y los mismos caminos de antes, pero cambiando el último paso (en vez de ir a 7 vamos a 3, pero con las mismas probabilidades), por tanto, la probabilidad de ir al gato serán:

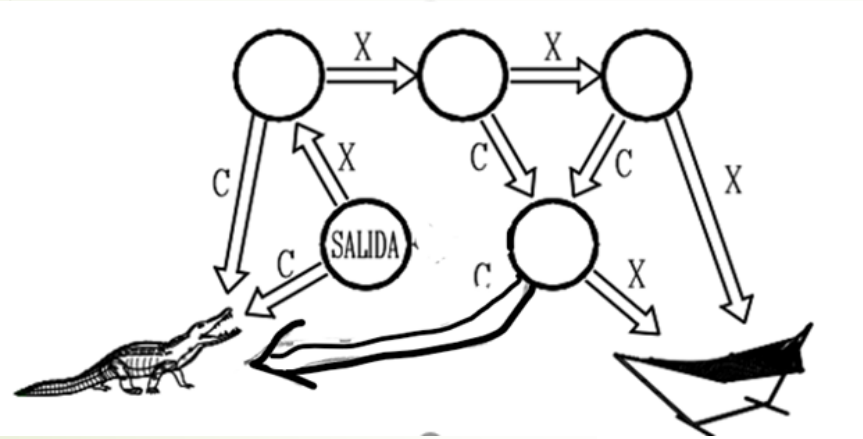
$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 3/8 = 5/8$$

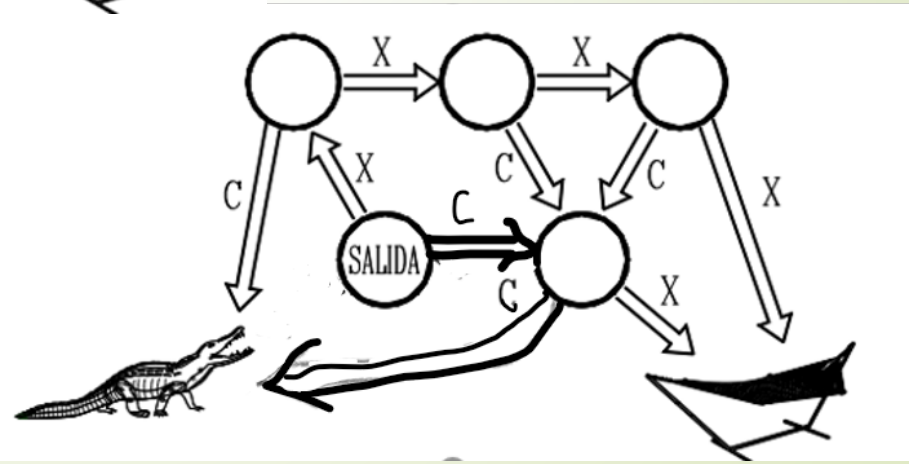
# AL COCODRILO O A LA TUMBONA
## Grupo Alquerque




En este caso el juego es infinito, pues si hacemos una simulación como en el caso anterior, siempre hay una ficha que vuelve a la casilla de salida.

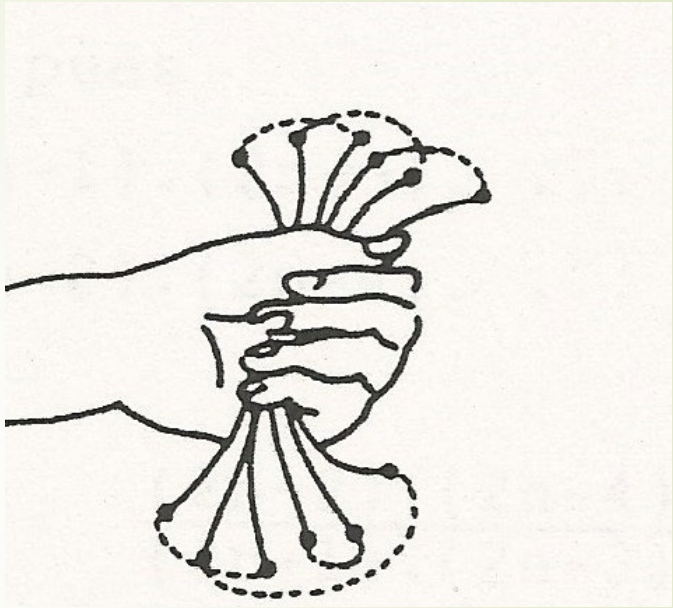
# AL COCODRILO O A LA TUMBONA



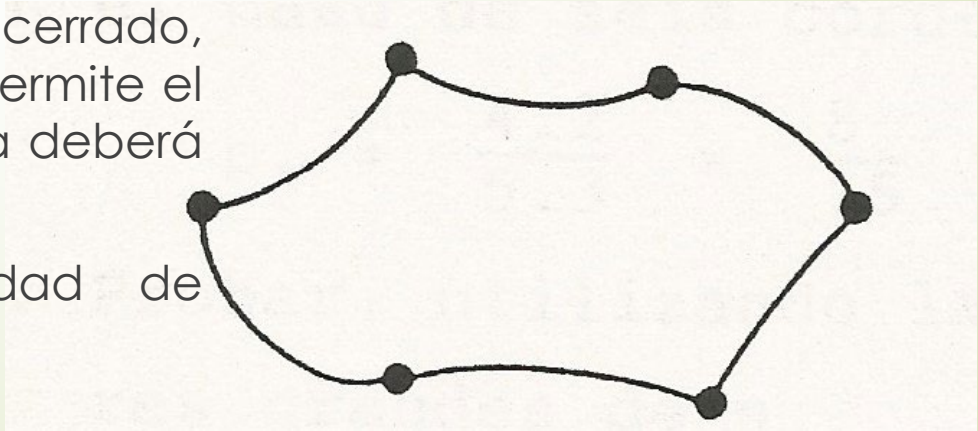
# CUERDAS

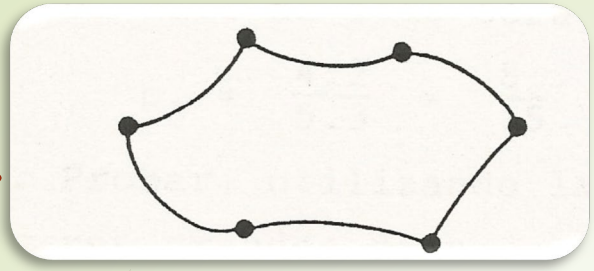
Arthur Engel. La enseñanza de la probabilidad



1. Cuando una joven pareja de Anchuria quiere casarse debe pedir permiso. Para darles permiso se les somete a una prueba: "El oficial del juzgado, coloca en la mano los seis trozos de cuerda. Por cada lado del puño cerrado sobresalen seis extremos. Por cada lado se eligen los extremos al azar por pares y se atan."

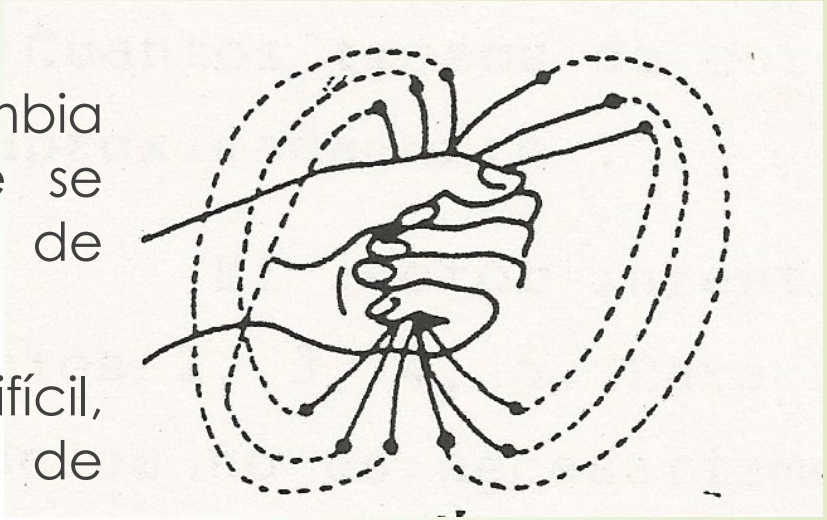
- Si se obtiene un bucle cerrado, como el de la figura, se permite el casamiento, sino la pareja deberá esperar un año.
- ¿Cuál es la probabilidad de casarse al primer intento?





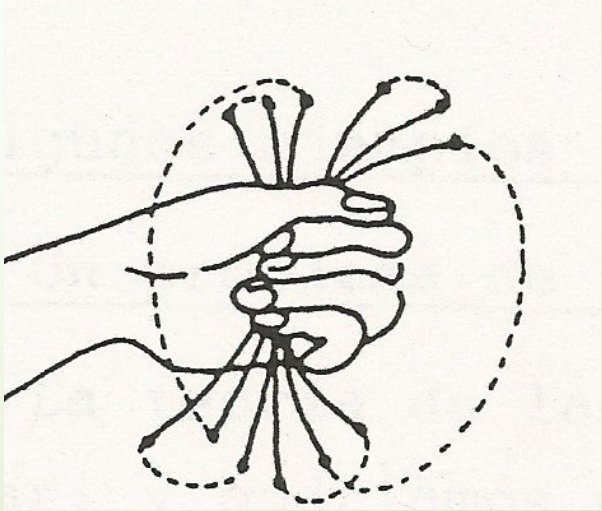
# CUERDAS

2. Un nuevo presidente cambia las reglas, y decide que se deben atar los extremos de arriba con los de abajo.



- ¿Será más fácil o más difícil, que se casen las parejas de Anchuria?

3. En otra nueva ocurrencia del presidente, se decide que cada extremo se ate, al azar con otro extremo libre, de arriba o de abajo. ¿Qué probabilidad hay ahora de conseguir el bucle?



# INVESTIGA:

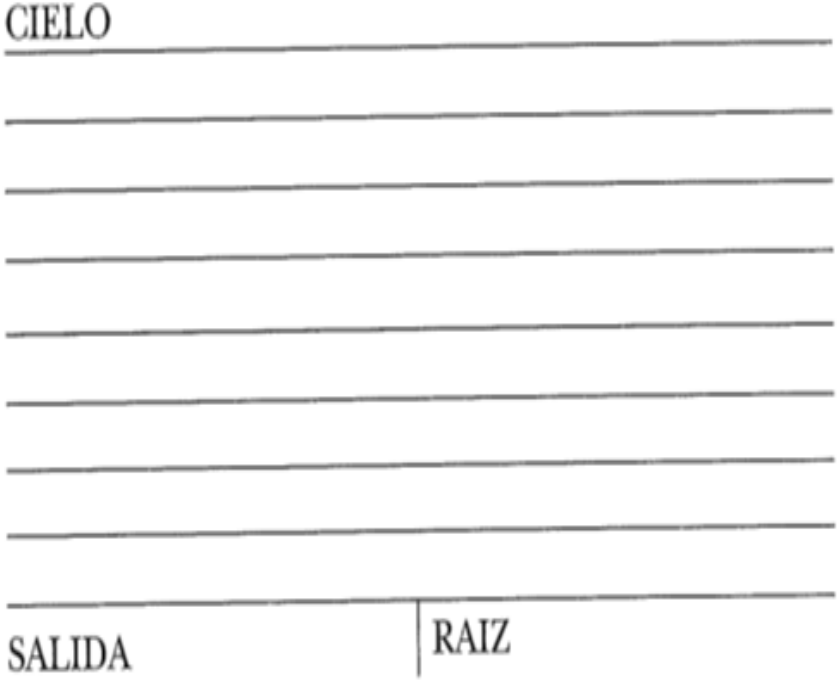
## De 12 a 16. Grupo Cero de Valencia

### *Llegar al cielo*

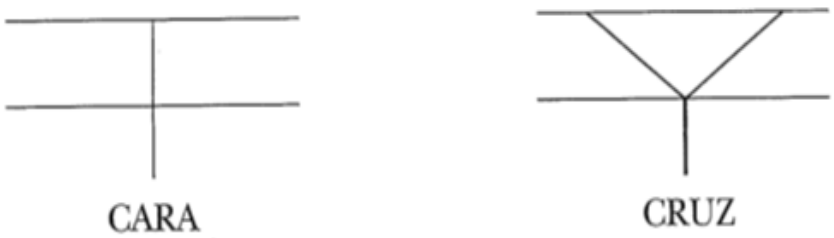
*Es un juego para dos jugadores.*

*El jugador A trata de hacer crecer su árbol hasta el "cielo", mientras que el jugador B trata de impedírselo.*

*Se juega sobre un tablero como el siguiente:*




*El jugador A lanza una moneda. Si el resultado es cara, el árbol se alarga una rama. Si es cruz, el árbol se alarga dos ramas.*




*El jugador B lanza la moneda una vez por cada rama que haya dibujado su contrario. Si sale cara, detiene el crecimiento de esa rama colocando una ficha en su extremo. Si sale cruz, la rama queda viva y puede seguir reproduciéndose.*

*El jugador A lanza de nuevo la moneda una vez por cada rama viva, para decidir sobre su forma de crecer.*

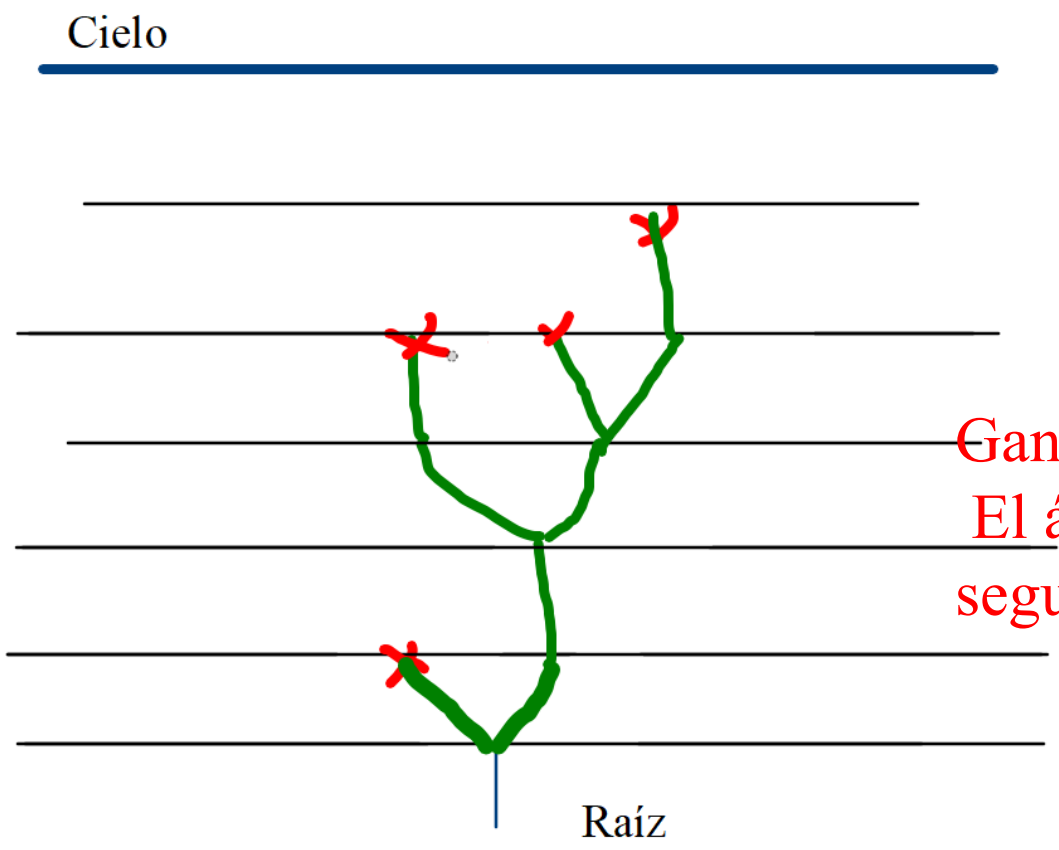
*Y así sucesivamente.*

*El jugador A gana si consigue llegar al cielo. En caso contrario, el ganador es el jugador B.*

# Ejemplo de una partida

Jugador A

1- X
2- C
3- X
4- CX
5- C

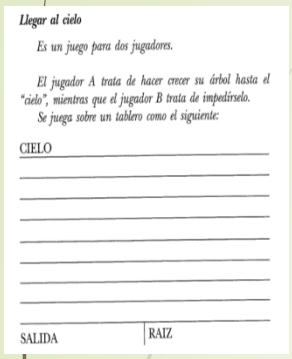



Jugador B

1- CX
2- X
3- XX
4- CCX
5- C

Gana el jugador B.
El árbol, no puede seguir creciendo

## ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?



***Llegar al cielo***

*Es un juego para dos jugadores.*

*El jugador A trata de hacer crecer su árbol hasta el "cielo", mientras que el jugador B trata de impedírselo.*

*Se juega sobre un tablero como el siguiente:*

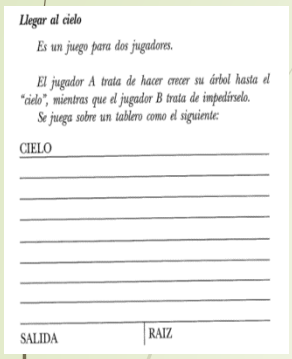
CIELO

SALIDA | RAIZ

Vamos a analizar casos sencillos, suponiendo que para llegar al cielo hay 1, 2, 3, … n escalones.
Haremos una tabla con las probabilidades de ganar de A y de B.

n=1 Obviamente gana A, pues al tirar primero conseguirá una (C) o dos (X) ramas que llegan al cielo.

# ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?



*Llegar al cielo*

*Es un juego para dos jugadores.*

*El jugador A trata de hacer crecer su árbol hasta el "cielo", mientras que el jugador B trata de impedírselo.*
*Se juega sobre un tablero como el siguiente:*

CIELO

SALIDA | RAIZ

N=2 hagamos un diagrama de árbol

| Lanza A | Lanza B | Lanza B |
|---|---|---|
| | **C (gana B)** | |
| **C** | **X**(gana A, en el siguiente lanzamiento) | |
| | **C** (B vuelve a lanzar en la segunda rama) | **C**(gana B) |
| **X** | | **X**(gana A, en el siguiente lanzamiento) |
| | **X** (gana A, en el siguiente lanzamiento) | |

B ganará en caso de que se den las secuencias:

CC

XCC

Probabilidad

¼ + 1/8=3/8

A gana con las secuencias:

CX

XX

XCX

Probabilidad

¼ + ¼ + 1/8=5/8

## ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

Veamos las probabilidades de ganar de cada uno de ellos

| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | **1** | **5/8** | **7/16** | | | |
| B | **0** | **3/8** | **9/16** | | | |

Para n=3

B gana si (Negro lanza el primer jugador, Rojo el 2º)

CC XCC

CXCC XCXCC XCXXCC

CXXCC XXCCC XXCXCC

**Probabilidad: ¼+1/8+1/16+3/32+2/64 = 9/16**

## ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

Observamos que las posibilidades de ganar de B, van aumentando al aumentar el número de pisos, pues lógicamente si B, consigue que A no llegue al piso 2, tampoco podrá llegar a los siguientes. Por tanto, las opciones ganadoras de B, en un nivel n, serán todas las que tenia hasta el nivel n-1, más las que puedan ir apareciendo en el siguiente nivel.

Por otra parte, también es cierto que si B, no consigue ganar en lo primeros niveles, las posibilidades de ganar serán cada vez más complicadas

# TRIELO

Para terminar:
Calcular las probabilidades que tienen de ganar el duelo cada uno de los contendientes.

Si se mantiene el orden de disparos, como sugiere el corto, (Bueno, Feo, Malo), las probabilidades de cada uno de salir ganador son:

**P (Bueno)=0,544** (haciendo su primer disparo al aire);

**P(Feo)=0,356;**

**P (Malo) = 0,10**

# • Bibliografía:


- Arthur Engel. La enseñanza de la probabilidad. (versión española de Florencio Villarroya Bullido)
- Fomin, Dimitri y otros 2012 “Círculos Matemáticos” Ed. SM
- Gardner, Martin (1985): Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas. Labor. Barcelona
- Grupo Alquerque de Sevilla, SUMA febrero 2006, pp 61-63
- Grupo Cero de Valencia. De 12 a 16. M.
- M. Glaymann – T. Varga. Las probabilidades en la escuela. 1975 Ed. Teide Barcelona