

# El ábaco y los sistemas de numeración

ESTALMAT CANARIAS

# El ábaco y los sistemas de numeración

- El ábaco en distintas culturas
- El ábaco chino
  - Representación
  - Suma y resta con el ábaco chino
- El ábaco y los sistemas de numeración posicionales
  - Representación en una base
  - Suma y resta en otras bases
  - Cambio de base
- Los números en otras culturas anteriores
  - Sistema de numeración en Babilonia
  - Sistema en Egipto
  - Sistema Maya
  - Sistema Griego
  - Sistema Inca
  - Sistemas Romano e Indoarábigo
- Algoritmos para la multiplicación
- La multiplicación en el ábaco chino
- Construcción del Ábaco Chino

# El ábaco

El ábaco es el instrumento de cálculo más antiguo, adaptado y apreciado en diversas culturas. La época de origen del ábaco es indeterminada.

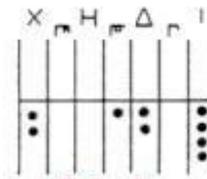
Cuando el hombre dejó de ser nómada, se asentó y empezó a tener excedentes comenzó el comercio en forma de trueque al principio, luego con monedas.

El hombre primitivo encontró maneras de realizar el conteo.

Es muy probable que su inicio fuera en una superficie plana y piedras que se movían sobre líneas dibujadas con polvo

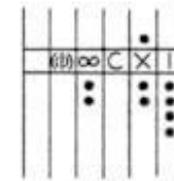
## Tiempos Antiguos

Greek

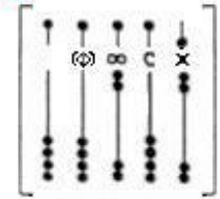


*Salamis*

Roman

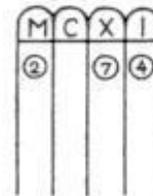


*Calculi*

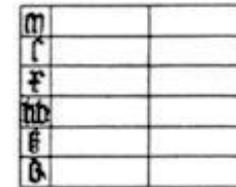


*Hand-abacus*

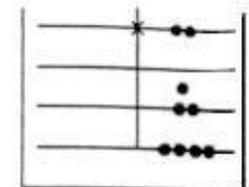
## La Edad Media



*Apices*



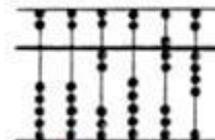
*Coin-board*



*Line-board*

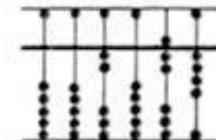
## Tiempos Modernos

Chinese



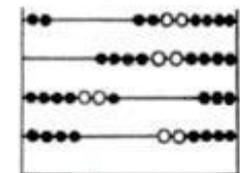
*Suan-pan*

Japanese



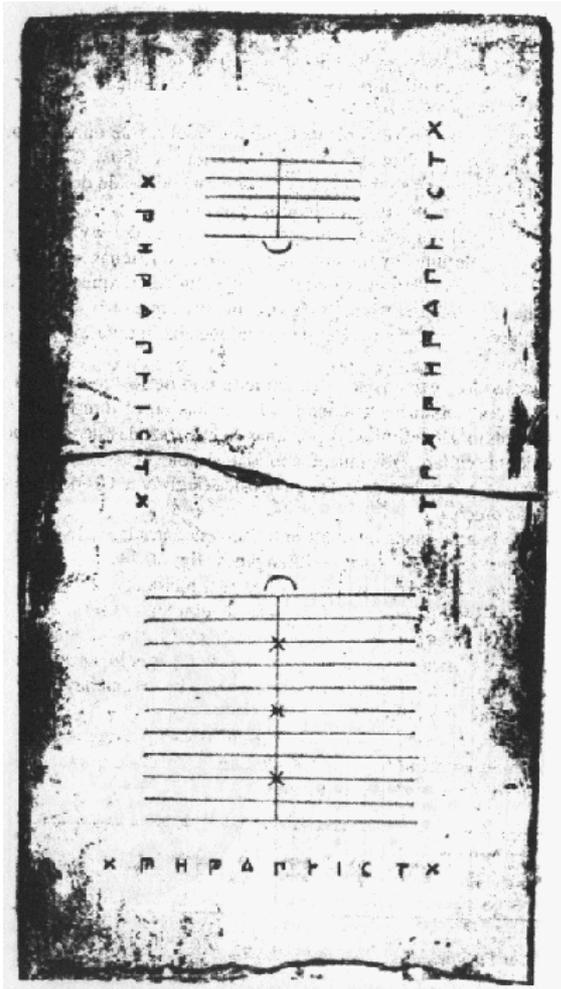
*Soroban*

Russian



*Ščet*

# Ábacos



La tabla de contar mas antigua es la tablilla Salamis (situada siglo V A.C.

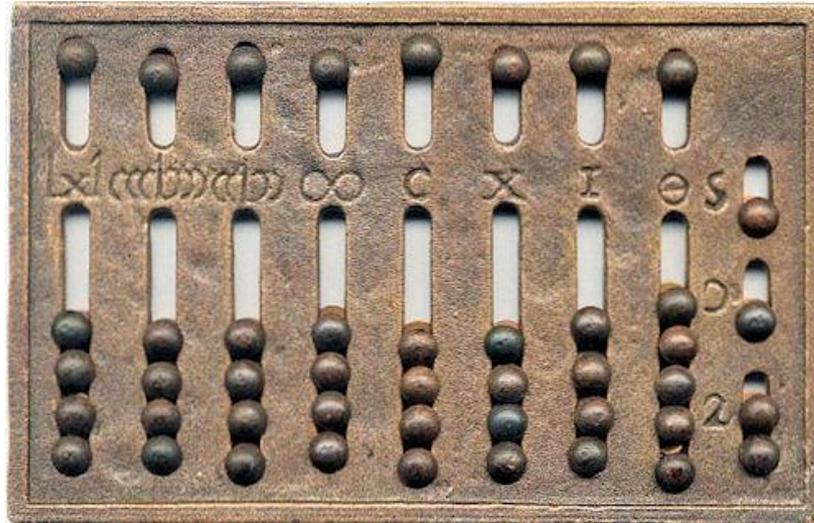
Talentos					Dracmas				
10.000	1.000	100	10	1	10.000	1.000	100	10	1
	●	●		●				●	
		●●	●	●		●	●		●●●

●●	●	●●●
●●●		

●● Óbolos  
 ● Medio óbolo  
 ●●● Cuarto óbolo  
 ●●●● Jalkoi

# El ábaco romano



	1	5
unidades	I	V
decenas	X	L
centenas	C	↵
millares	↵↵	↵↵
dec. de millar	↵↵↵↵	↵↵↵↵
cent. de millar	↵↵↵↵↵↵	↵↵↵↵↵↵



AS: moneda romana

1 as = 12 onzas

fracciones de onza:

media onza (S), un

cuarto de onza ( ) y un

tercio de

onza (Z).

# Edad media

**Leonardo de Pisa, Fibonacci**, aprovechó sus viajes comerciales por todo el mediterráneo, Egipto, Siria, Sicilia, Grecia..., de rigor.

Quiso poner orden a todo lo aprendido de aritmética y álgebra, y darlo a conocer a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado, nace, en 1202, el **Liber abaci**, la primera summa matemática de la Edad Media.

En él aparecen por primera vez en Occidente, los nueve cifras hindúes y el signo del cero. Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas claras para realizar operaciones con estas cifras tanto con números enteros como con fracciones, pero también proporciona la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.

**Gregor Reisch, Margarita Philosophica, 1508**



# Nueva Escuela (Siglos XVIII-XIX)

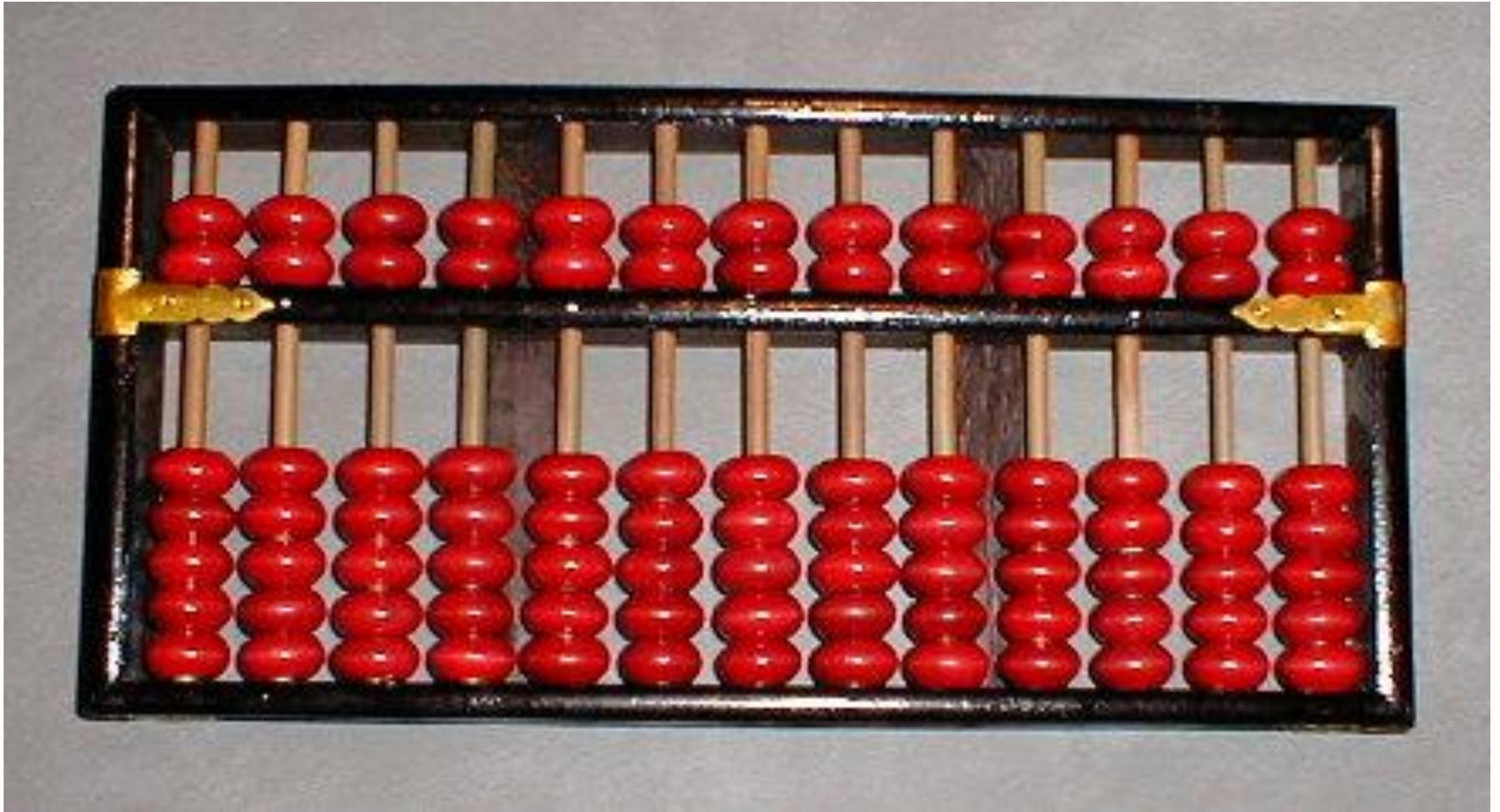
La Revolución Francesa prohibió el uso del ábaco en las escuelas y en la administración:  
“Así como un peatón liberado de cualquier peso tiene ventaja sobre el que lleva una carga pesada, así el cálculo con cifras aventaja a los cálculos con las fichas de la tabla de contar)

Mejor representante de la Nueva Escuela Pestalozzi (1746-1827), que defendió el principio de intuición como principio fundamental de la enseñanza.

La primera referencia sobre el tablero contador en España es de José Mariano Vallejo (1779-1846), redactor de la “Exposición sobre el estado de la enseñanza pública”, hecha a las Cortes. En esta obra recomienda empezar el estudio de la numeración auxiliándose de un tablero contador con filas móviles.

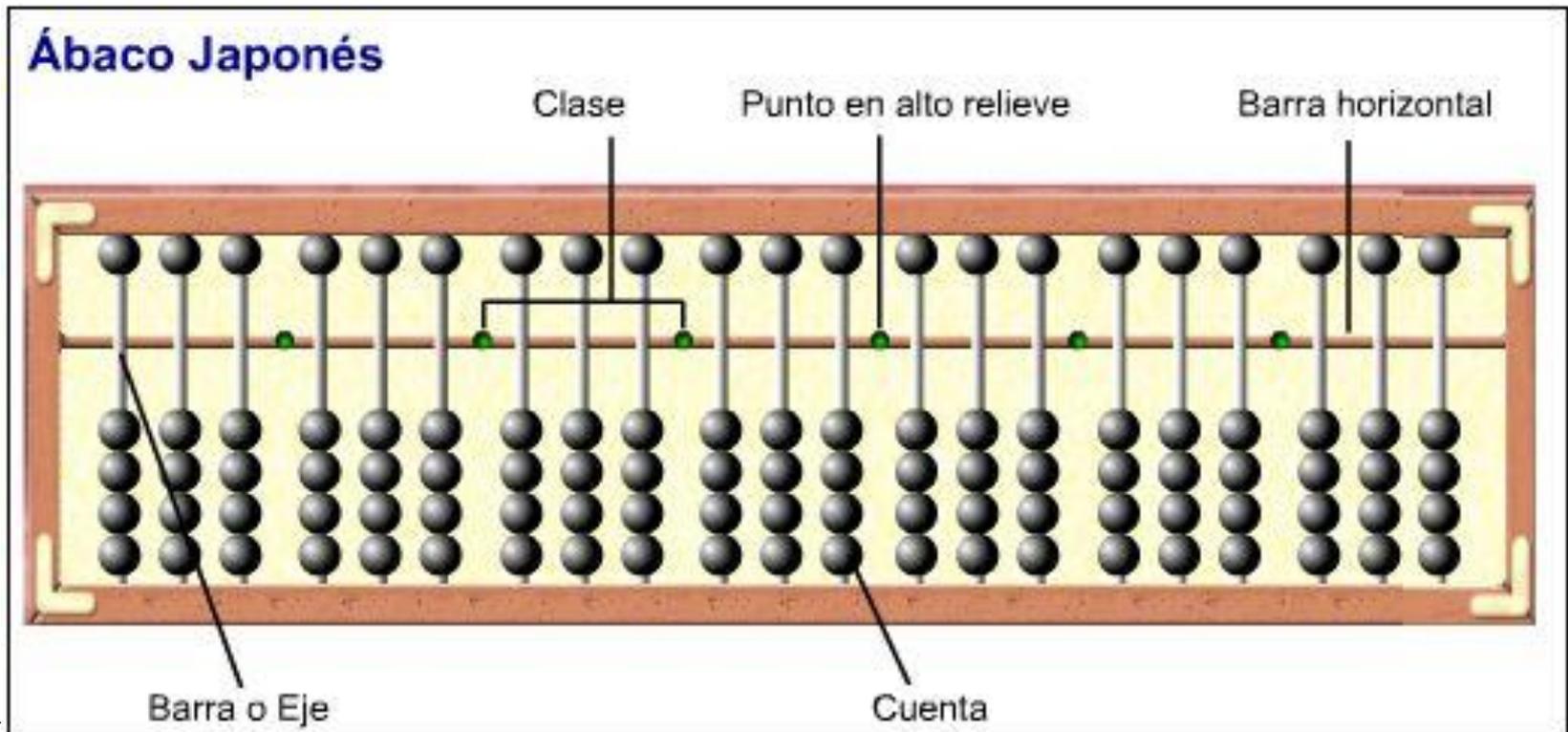
Ábaco Chino

Suan Pan (1200 D.C.)



# Ábaco Japonés

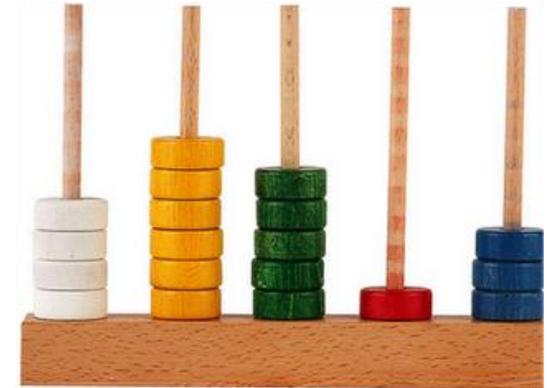
Con un manejo habitual, permanente, persistente y disciplinado se puede lograr una eficiencia y velocidad de cálculo muy notable, pudiendo superar al uso manual de una calculadora digital de bolsillo. Está pensado para poder ser usado por estudiantes en formación desde los 6 años, personas dedicadas a los negocios comprometidos con el manejo de los números, como contables o comerciantes, e incluso para mantener la mente lúcida y productiva en personas de edad avanzada.



# Ábaco Ruso (*Schoty*)

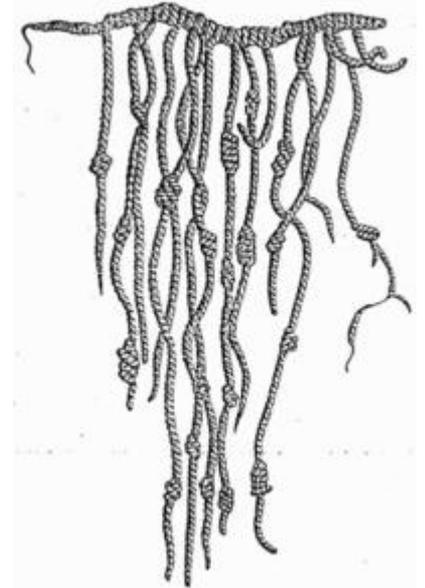


El Ábaco Ruso (*schoty*) es el más común, utiliza diez bolas o discos por alambre y es el más parecido a la forma que tenemos de hacer las operaciones.



# Yupana y Quipu (Incas)

360

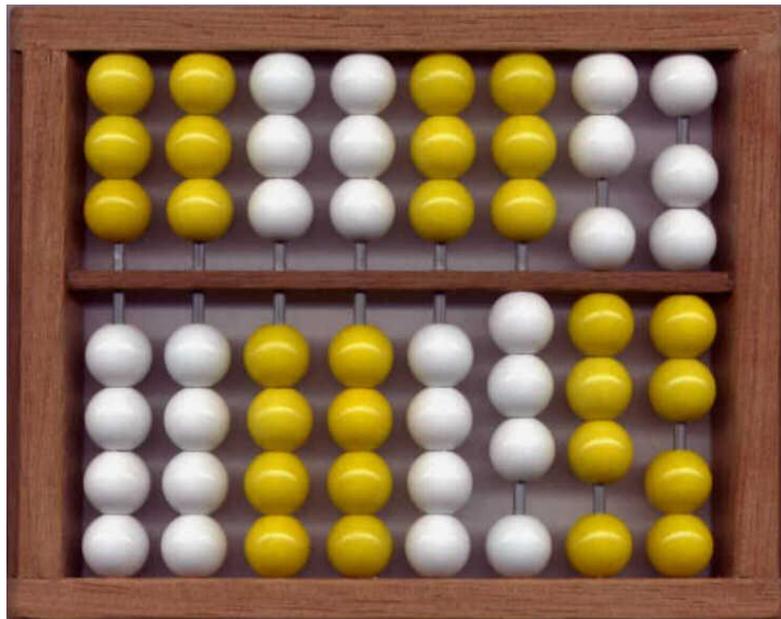


Cien miles	Diez miles	Miles	C	D	U
○	○	○	○	○	○
○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○

el nudo flamenco	el nudo compuesto	el nudo simple
se utilizaba únicamente para representar el número 1	representaba los números de 2 a 9, según las vueltas	servía para representar decenas, centenas, milares, etcétera.
número 1	número 1	

# Ábaco Maya (Nepohualtzintzin)

El sistema de numeración Maya era vigesimal, basado en el número 20



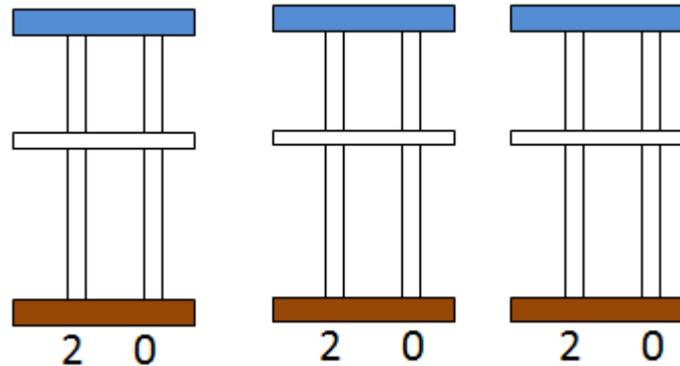
0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••
20	21	22	23	24
•	•	•	•	•
	•	••	•••	••••
25	26	27	28	29
•	•	•	•	•
	•	••	•••	••••

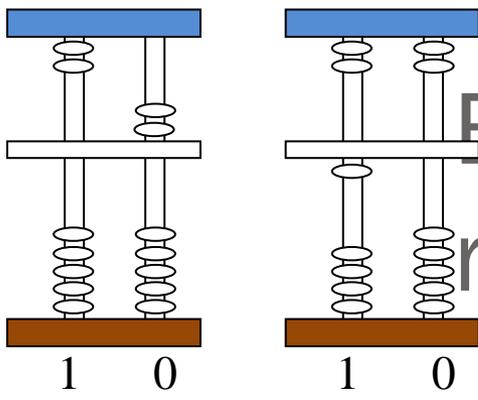
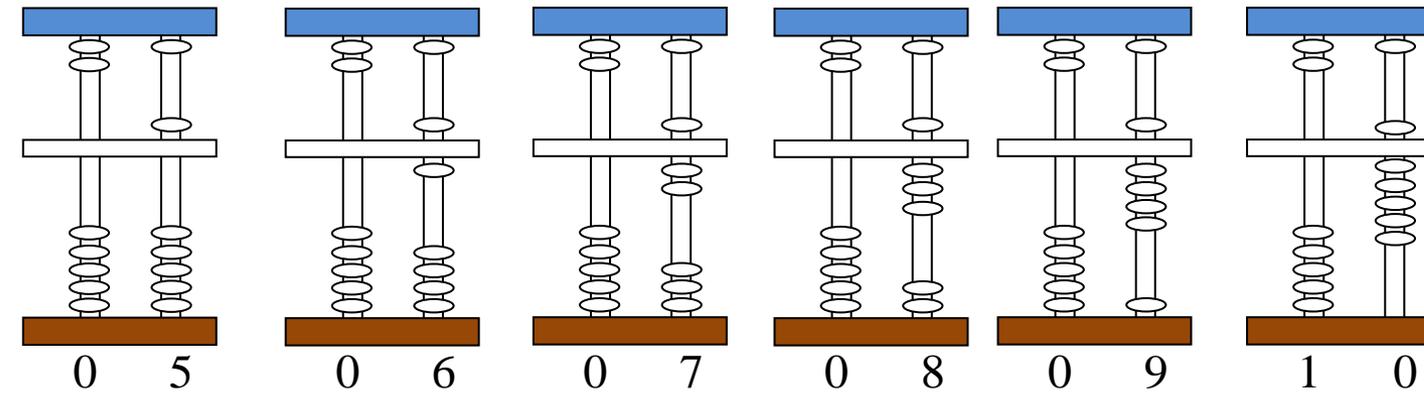
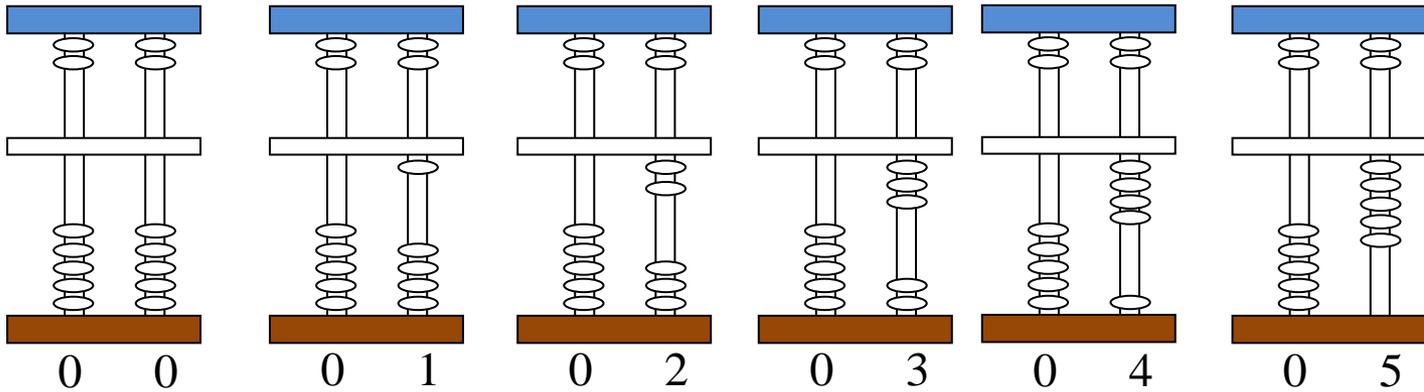
# El Ábaco Chino



# Representación en el ábaco chino

- ¿Qué números se pueden representar?
  - Máximo y mínimo número representables
- Ciertos números admiten dos representaciones, ¿Cuál es la normalizada?
  - Representaciones del 20

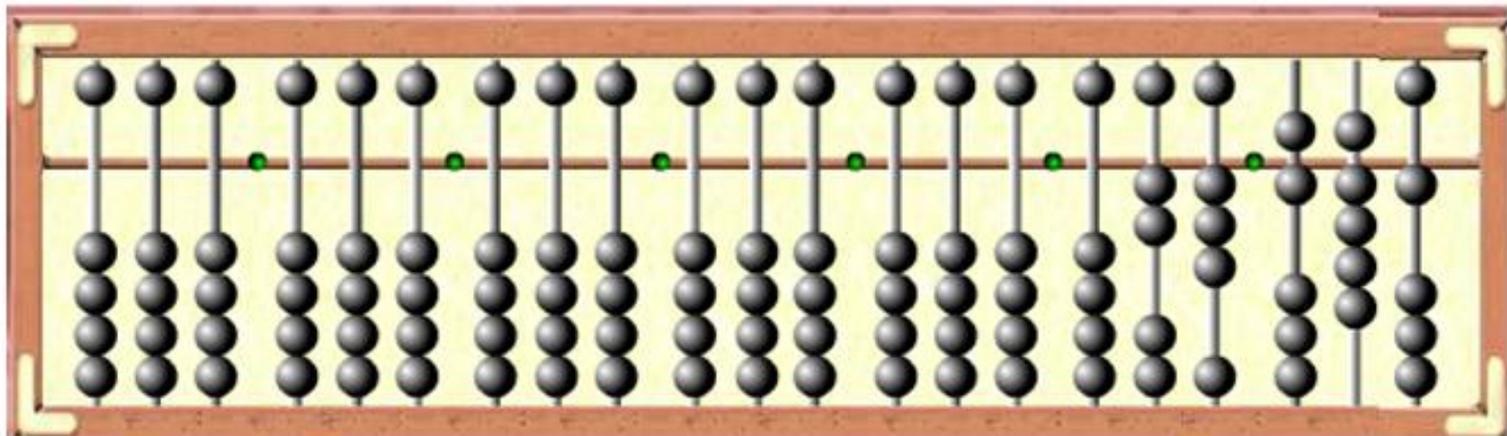
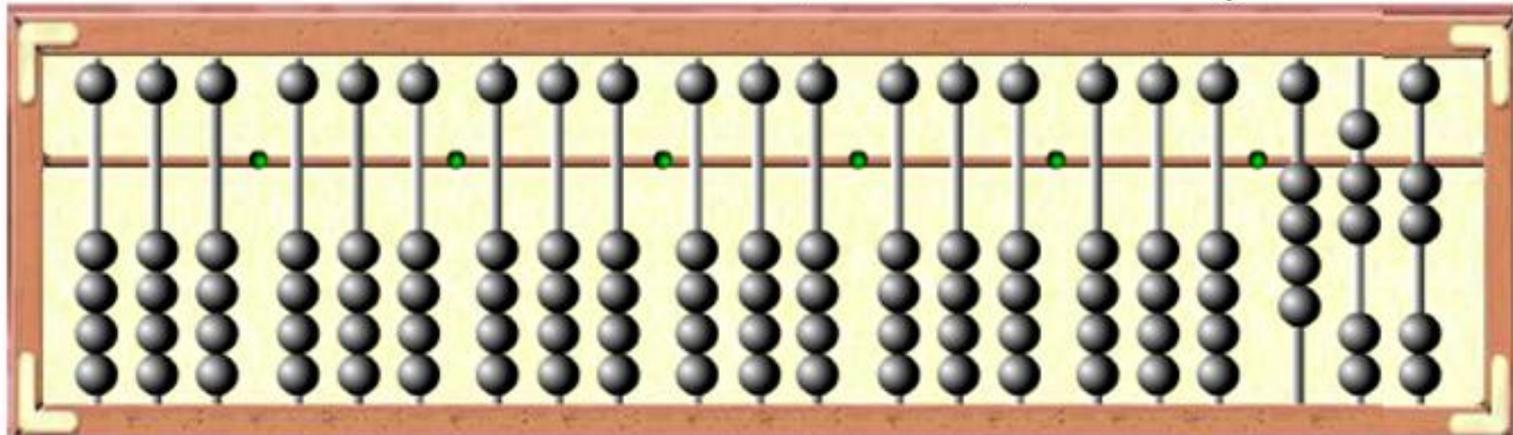




El ábaco chino:  
representación

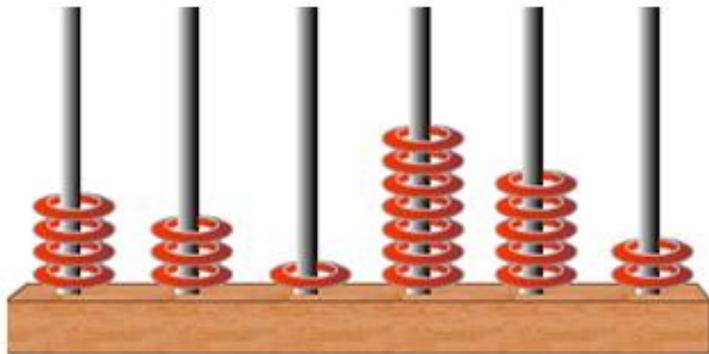
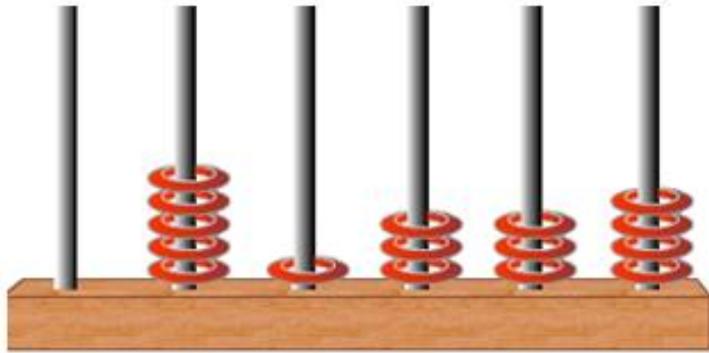
# Ábaco Japonés

EL ÁBACO JAPONÉS. Escribir el número que está representado|

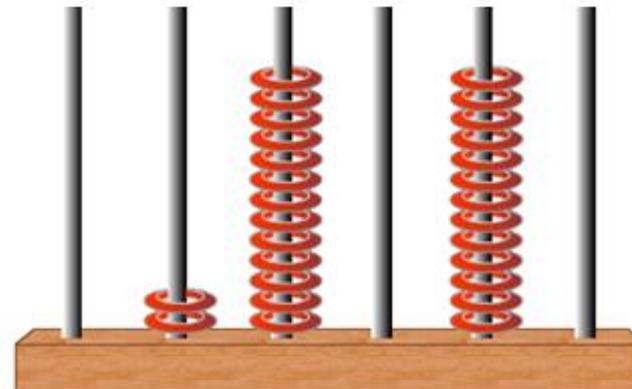
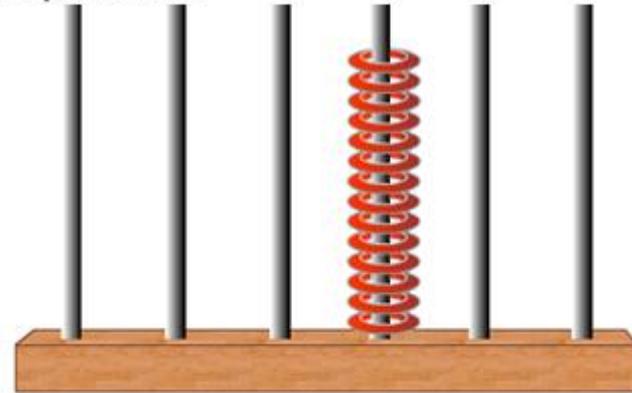


# Ábaco abierto: representación de números base 10

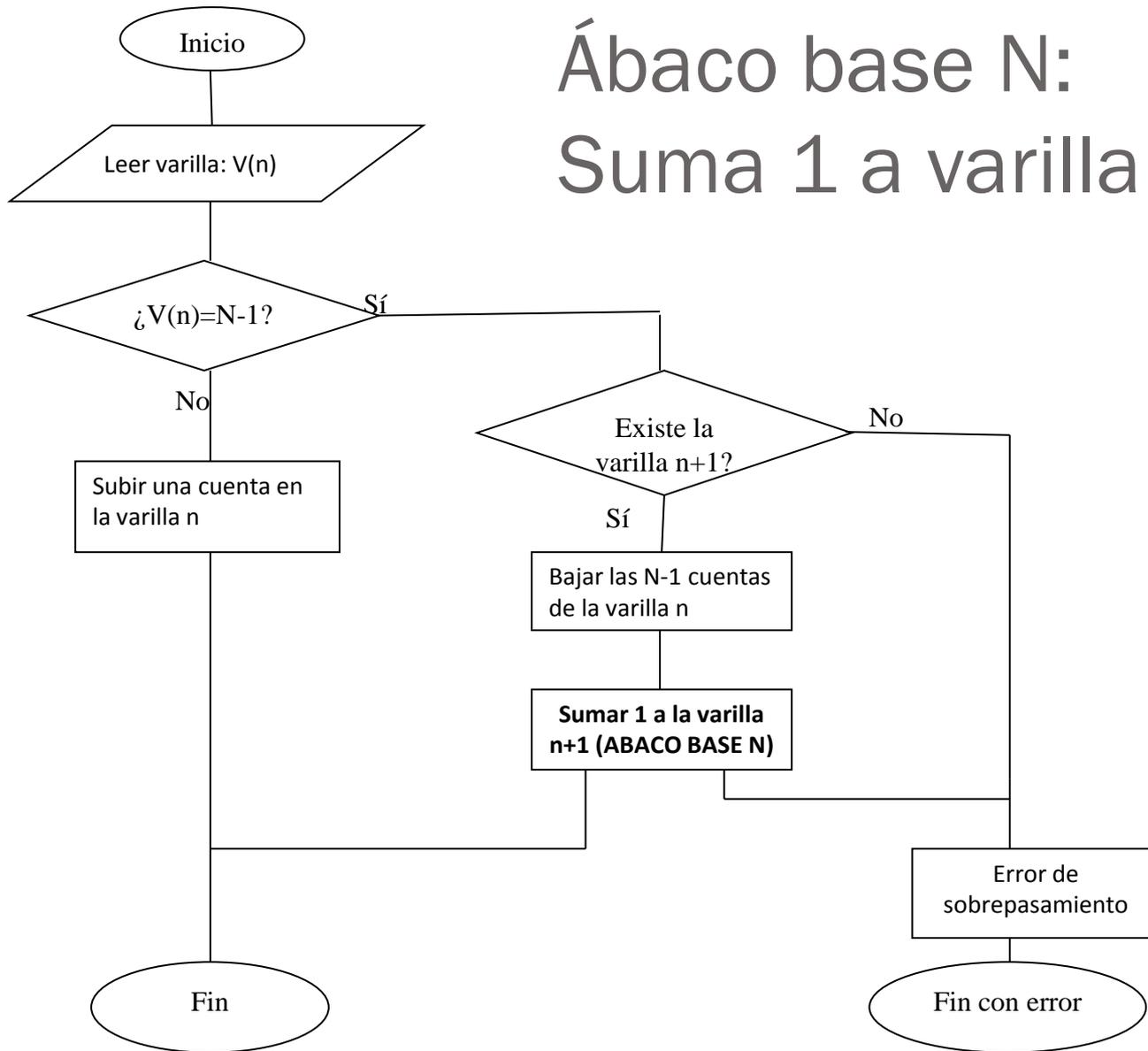
¿Qué número está representado?



Normalizar el número base 10 que se quiso representar

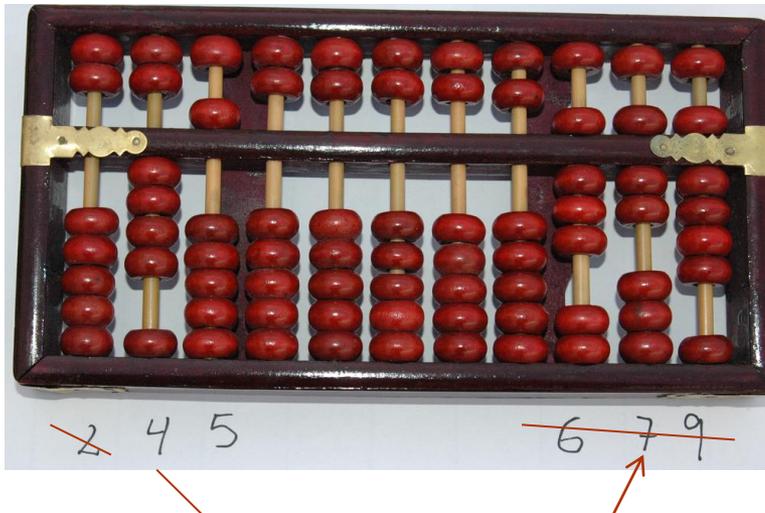
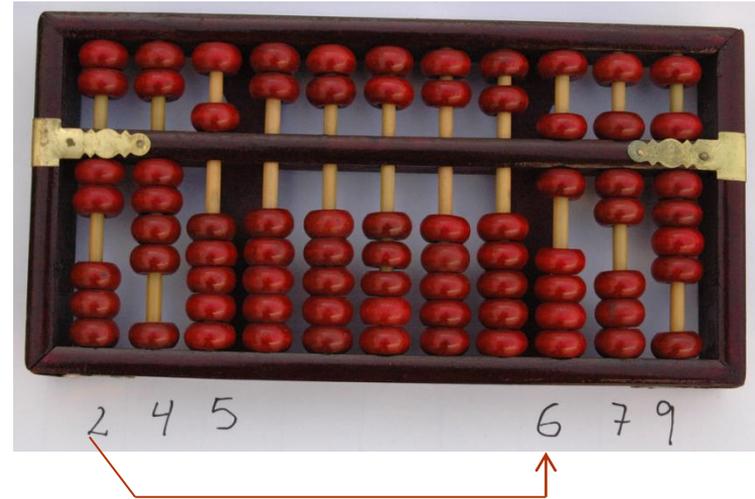
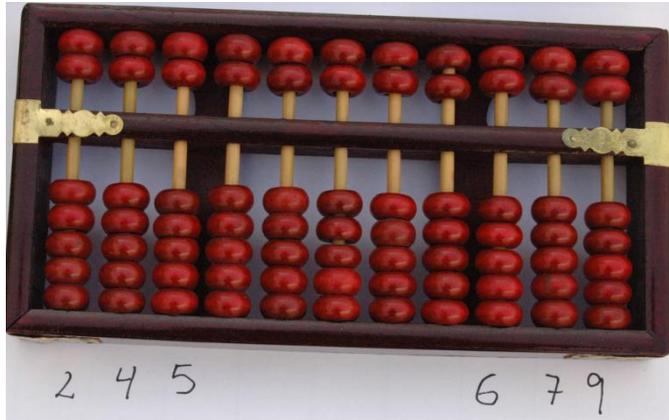


# Ábaco base N: Suma 1 a varilla n



# Ábaco Chino: suma

Ejemplo  $245+679$



Colocación:

245 a la izquierda

679 a la derecha (acumulador)

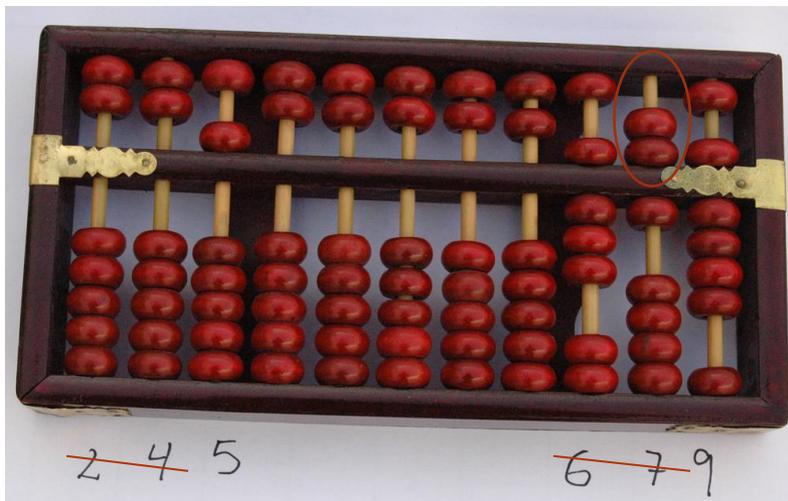
Proceso: se añaden al acumulador:

+200 (se borran 200 de la izquierda y se añaden a la derecha)

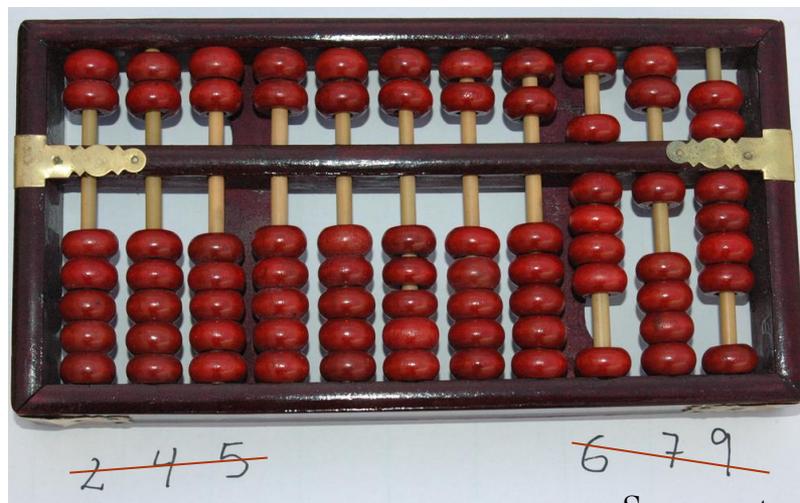
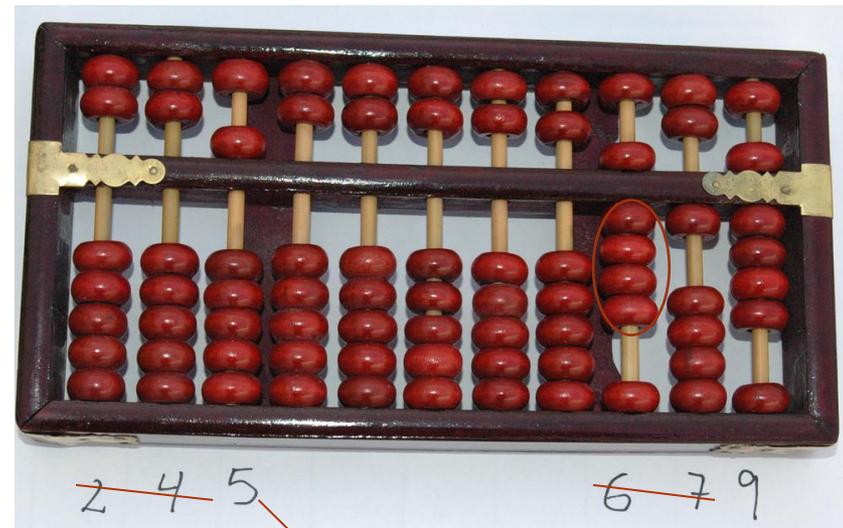
+40 ..

+5..

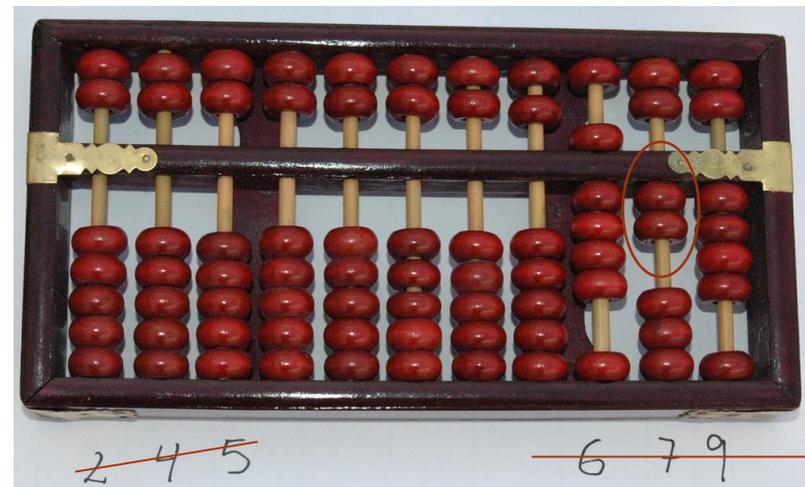
# Ábaco Chino: Suma



Se arrastra 1



Se arrastra 1

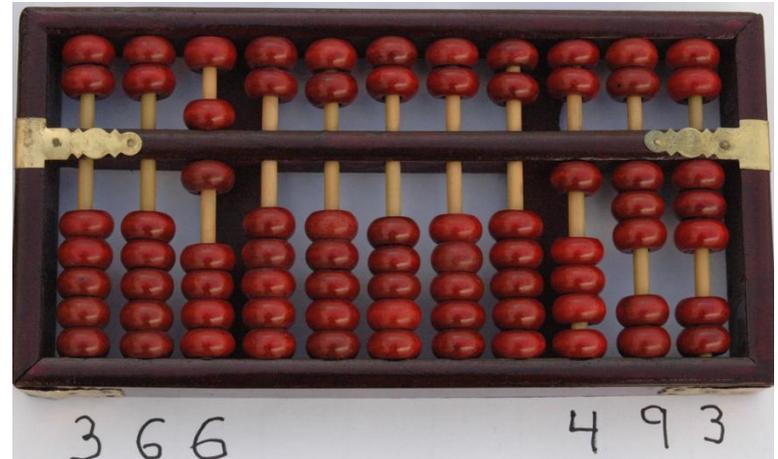
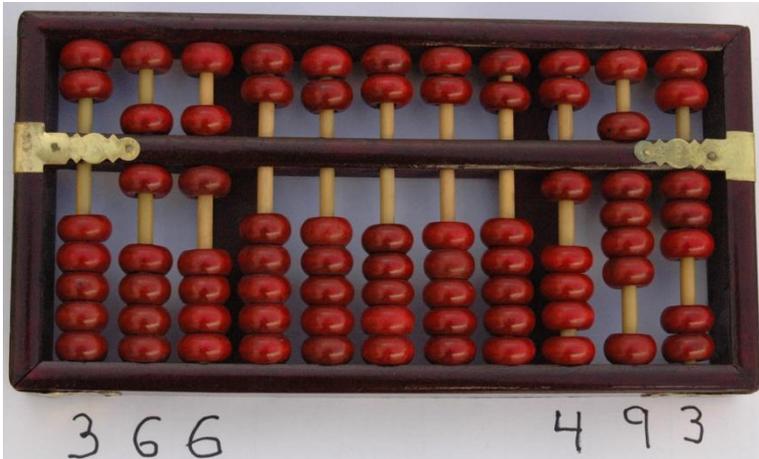
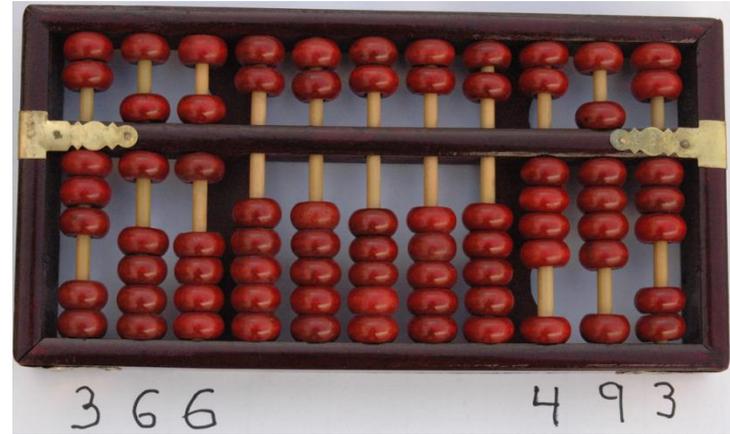
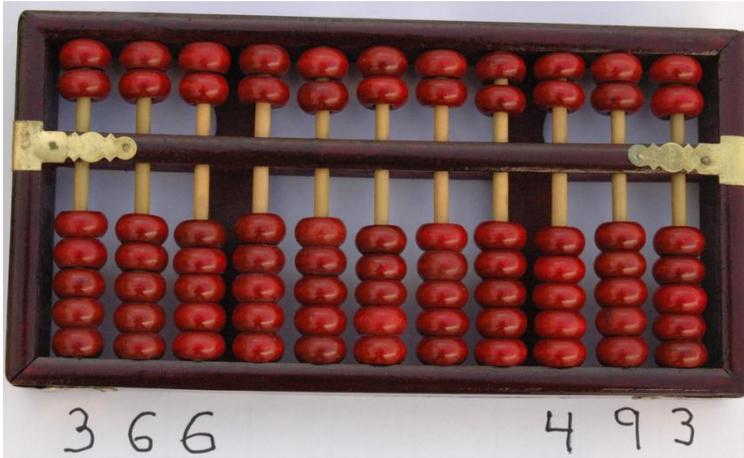


9 2 4

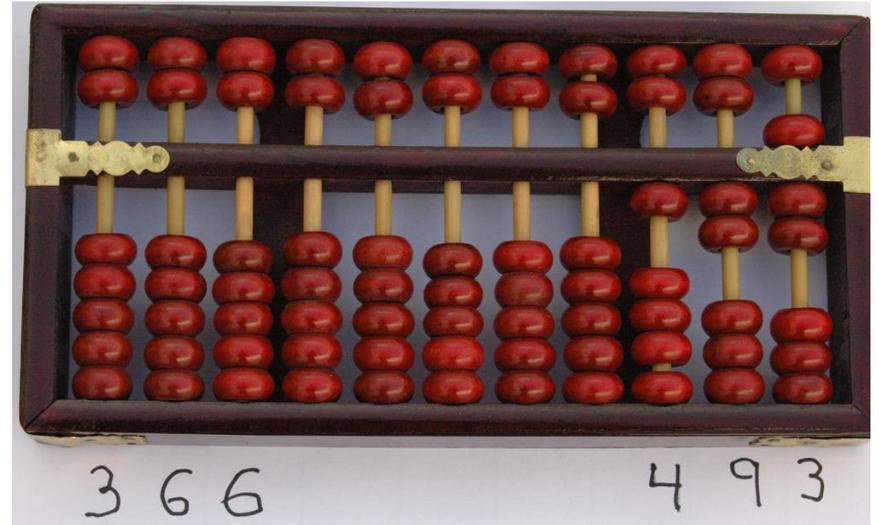
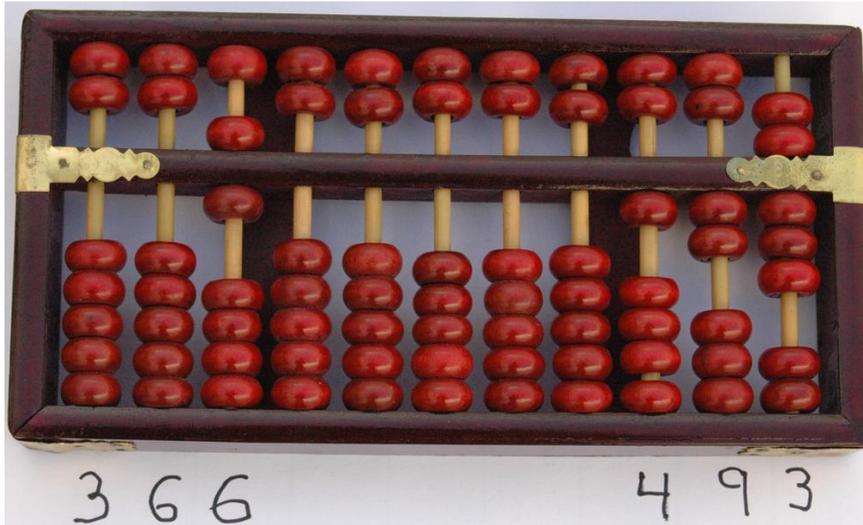


# Ábaco Chino: Resta

Ejemplo: 493-366



# Ábaco Chino: Resta





# Sistemas de Numeración: Base

- Babilonios: base 60
- Mayas: base 20
- Incas: base 10
- Egipcios: base 12 (meses), base 10
- Romanos, griegos: base 10
- Mayoría de tribus africanas: base 10
- Chinos: base 10
- Mundo de los ordenadores:
  - base 2, base 16 ó base 8



# Sistemas de numeración: base

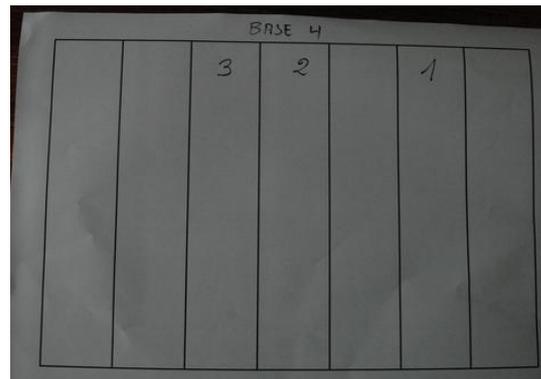
1ª abstracción



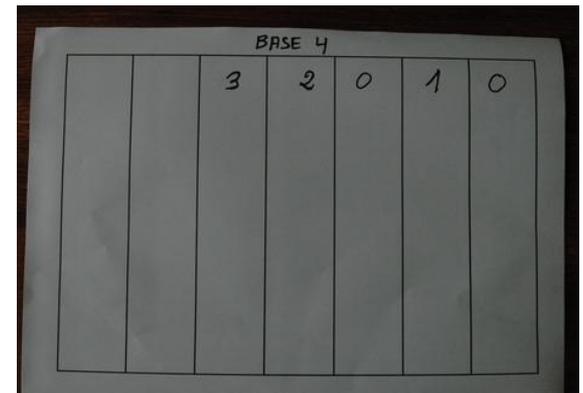
2ª abstracción



3ª abstracción



4ª abstracción

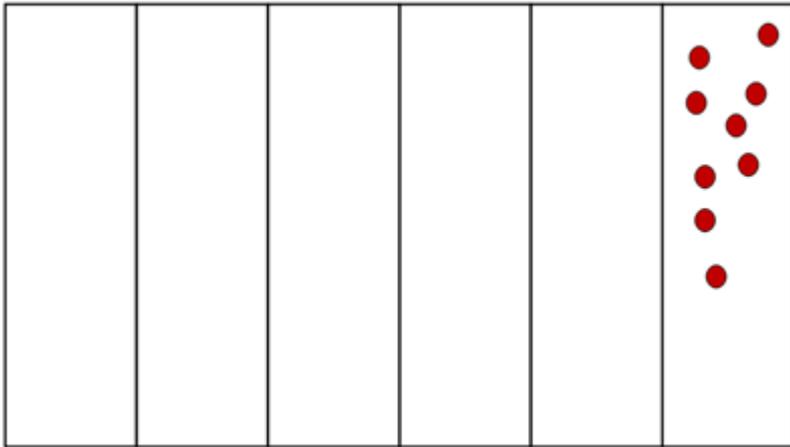


Ábacos en distintas bases

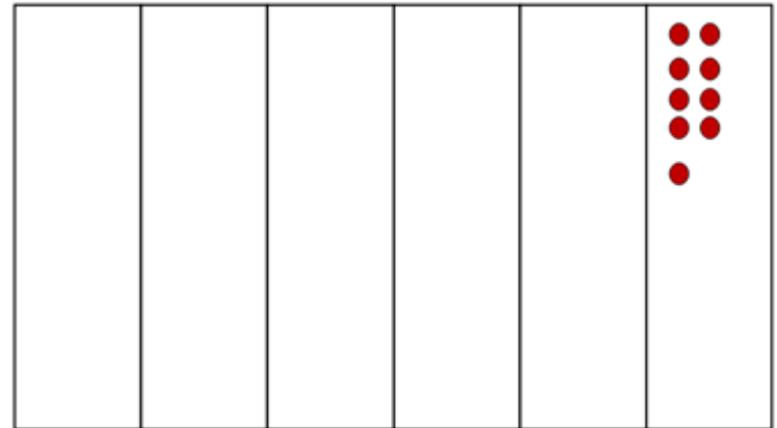


# Ábaco abierto: Cambio de Base

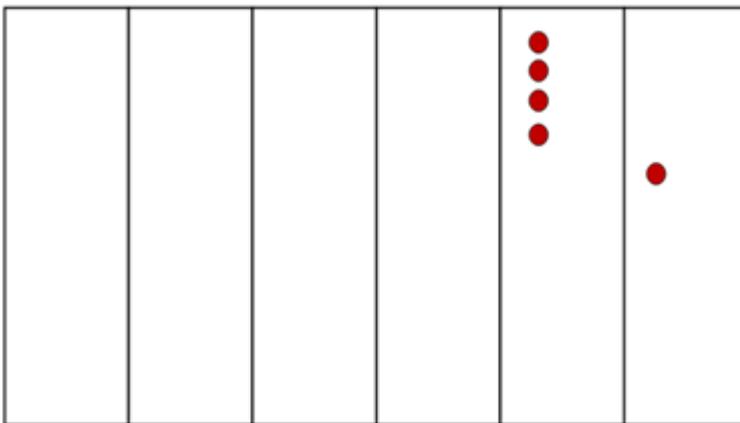
Pasar una cantidad a base 2



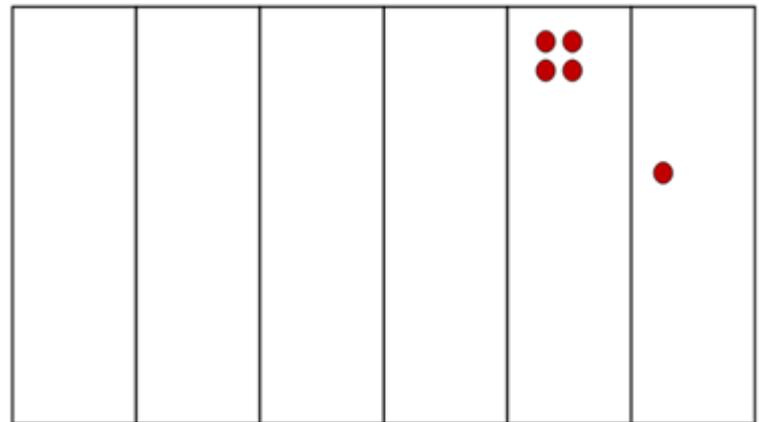
Agrupamos de dos en dos



Pasamos a la varilla siguiente

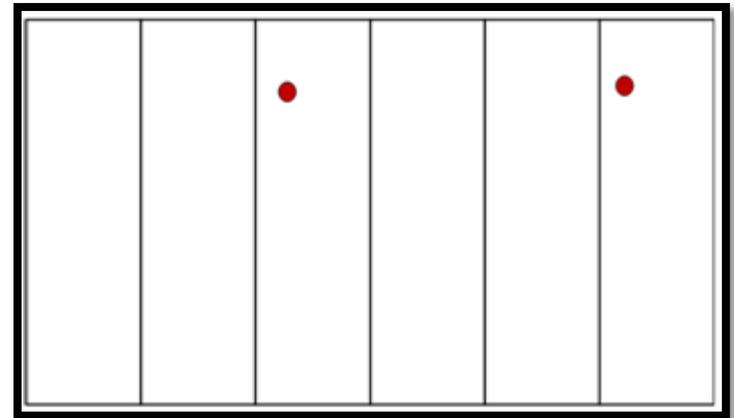
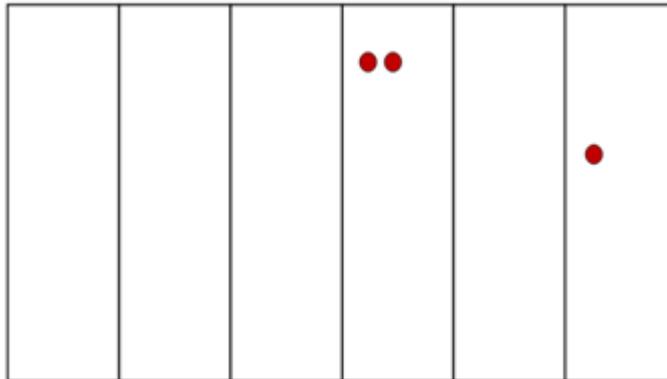
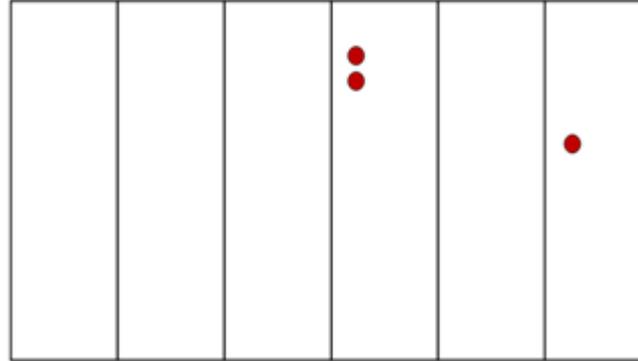


Agrupamos de dos en dos



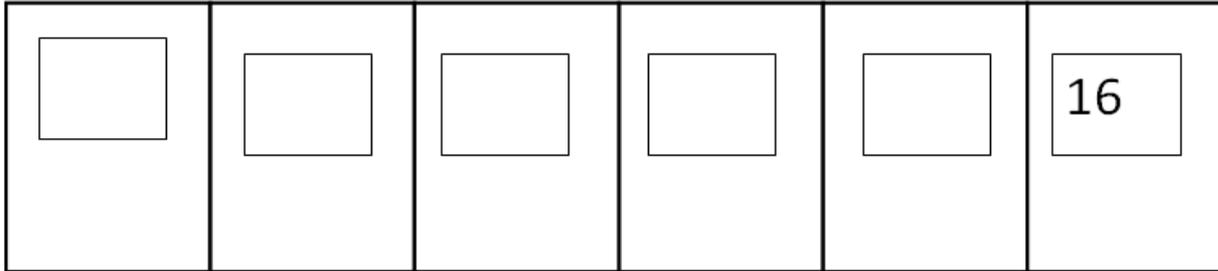
# Ábaco abierto: Cambio de Base

Seguimos agrupando de dos en dos, cada dos de una varilla equivalen a 1 de la varilla siguiente



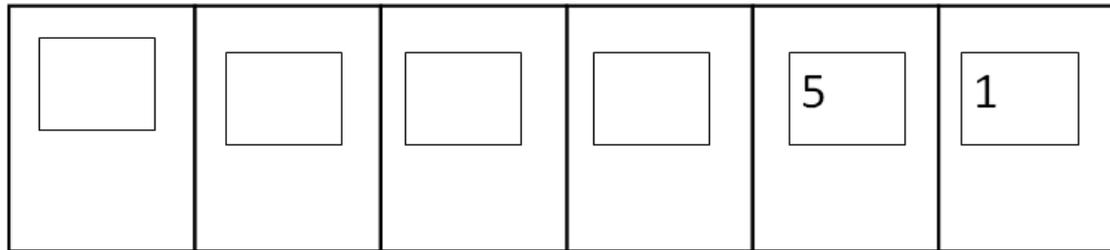
# Cambio de base

Pasar a base 3

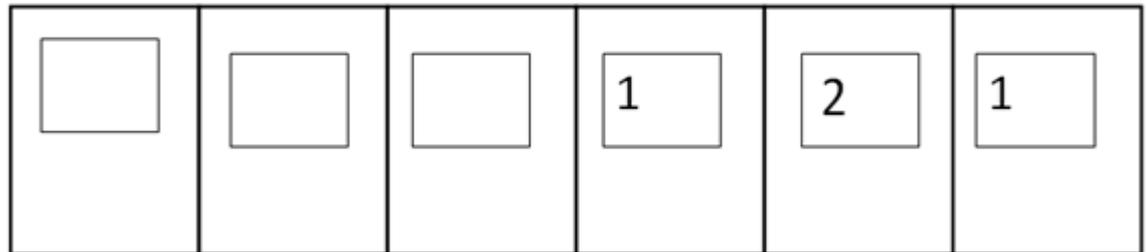


Tres unidades de una varilla equivalen a una unidad de la varilla superior

Pasar a base 3



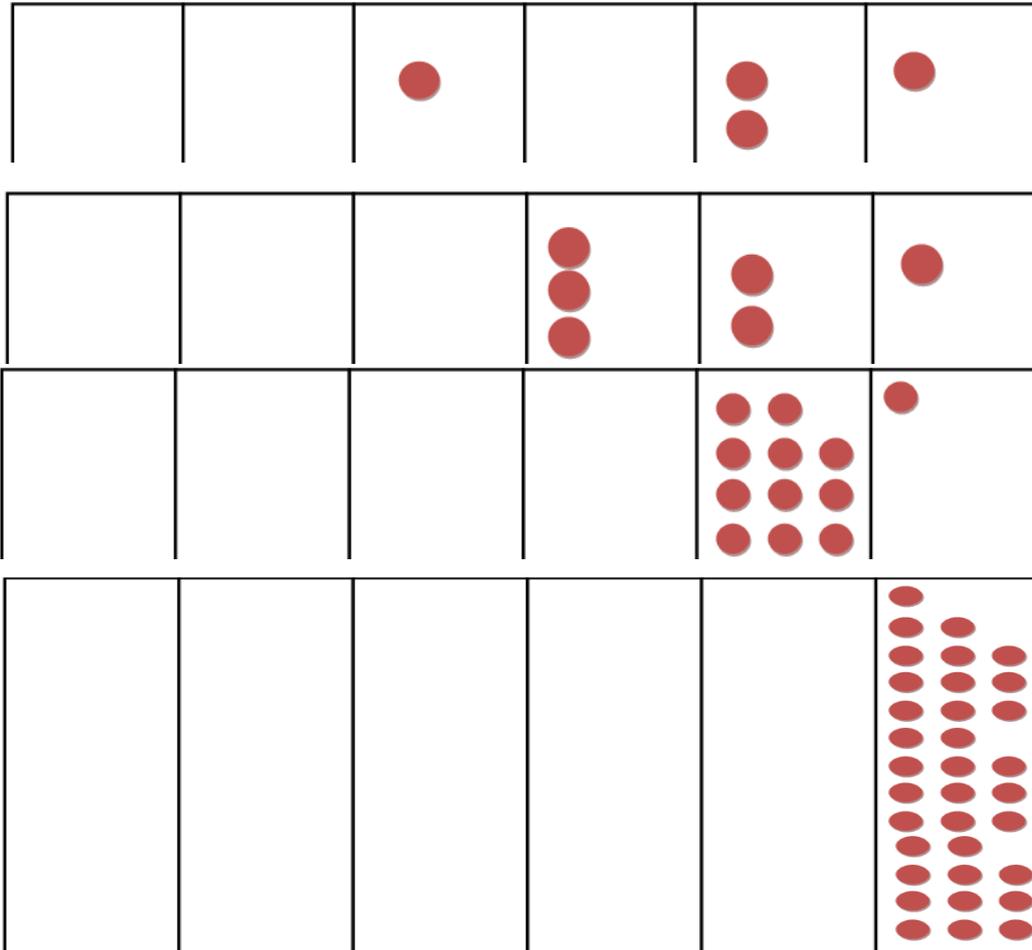
Pasar a base 3



$$\begin{array}{r} 16 \quad | \quad 3 \\ 1 \quad 5 \quad | \quad 3 \\ \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

# Pasar a base 10

Pasar de base 3 a base 10



Algoritmo de Ruffini

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ 3) \quad \quad 3 \quad 9 \quad 33 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 11 \quad 34 \end{array}$$

# Pasar a base 10

Pasar de base 4 a base 10

<input type="text"/>	1	2	3	0	1
<input type="text"/>	<input type="text"/>	2 4	3	0	1
<input type="text"/>	<input type="text"/>	6	3	0	1
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	3 24	0	1
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	27	0	1



# Números en Babilonia

Base: 60

𐎶 1	𐎵𐎶 11	𐎶𐎵 21	𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎵 41	𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎶𐎶 2	𐎵𐎶𐎶 12	𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎶 32	𐎶𐎶𐎶𐎵 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎵𐎶𐎶𐎶 13	𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59
𐎵 10	𐎶𐎵 20	𐎶𐎶𐎵 30	𐎶𐎶𐎶𐎵 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 50	

Ejemplos:


  
 $1 \times 60 + 2 \times 10 + 3 = 83$

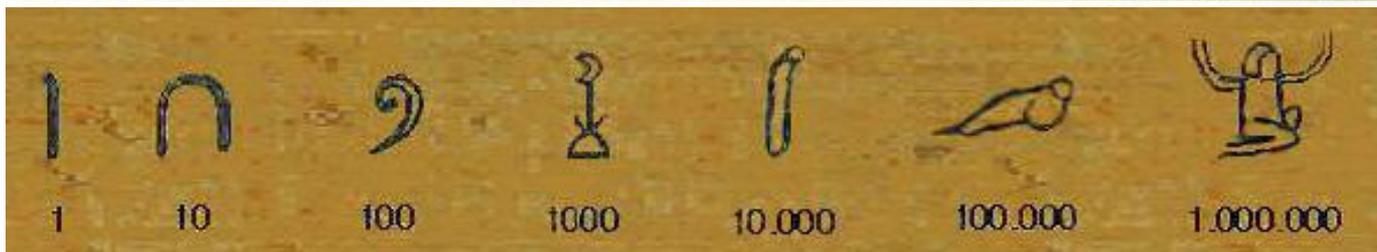

  
 $12 \times 60 + 3 \times 10 + 5 = 755$


  
 $32 \times 3600 + 21 \times 60 + 43 = 116503$

# Sistema de Numeración Egipcio

Base: 10

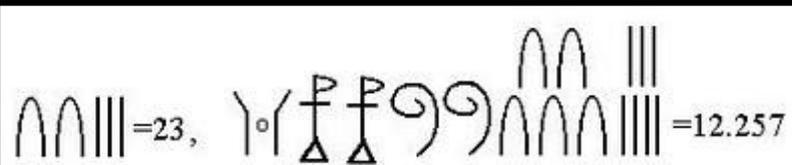
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
						
Un trazo	Un arco	Un rollo	Una flor	Un dedo	Un pez	Un hombre



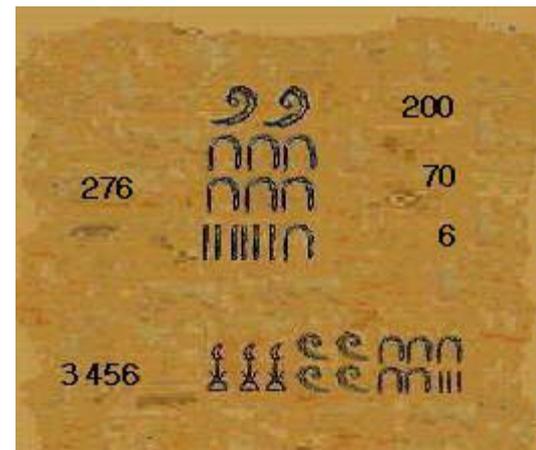
Ejemplos:



$$100\ 000 + 2 (10\ 000) + 4 (1\ 000) + 100 = 124\ 100$$



$$\text{Three arches and three strokes} = 23, \quad \text{Complex symbols} = 12.257$$



# Numeración Griego

Base: 10

Sistema Ático

Ι	Ϟ	Δ	Ϟ <sup>Δ</sup>	Η	Ϟ <sup>Η</sup>	Χ	Ϟ <sup>Χ</sup>	Μ
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000

ΧΧΧ	Ϟ <sup>Η</sup>	ΗΗ	ΔΔΔ	ϞϞ
3000	+ 500	+200	+ 30	+ 5+2 = 3737

Sistema Jónico

α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'
1	2	3	4	5	6	7	8	9

ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	ρ'
10	20	30	40	50	60	70	80	90

ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϰ'
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Algunos ejemplos:

24: κδ'

538: φλη'

1425: ,αυκε

2007: ,βζ

# Sistema de Numeración Chino

Base: 10

Numeración en Chino									
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		百	千	万	十	万	百	万	
		100	1.000	10.000	100.000		1.000.000		

Ejemplos:

五千七百八十九

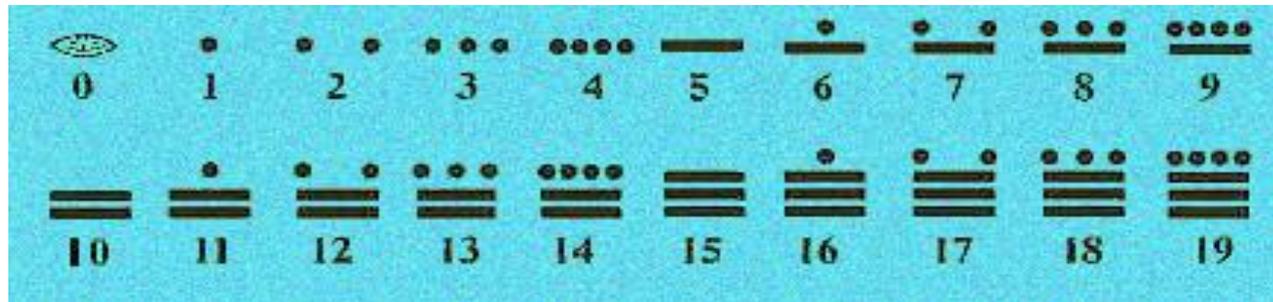
$$5 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 9 = 5789$$

五千七百八十九

$$5 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 9 = 5789$$

# Sistema de Numeración Maya

Base: 20



Ejemplos:

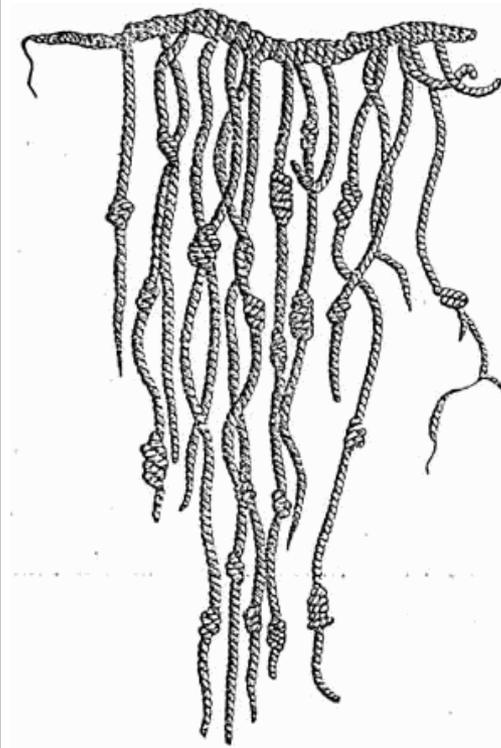
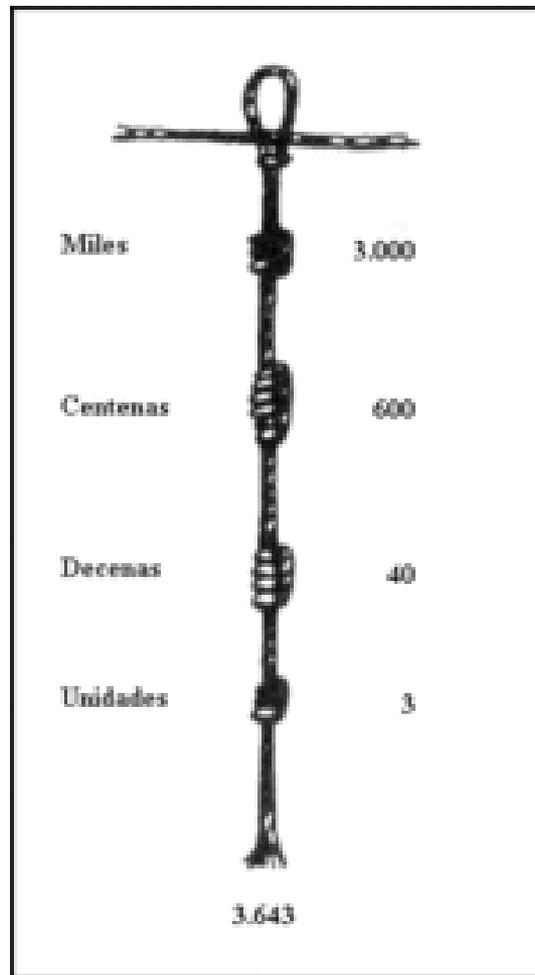
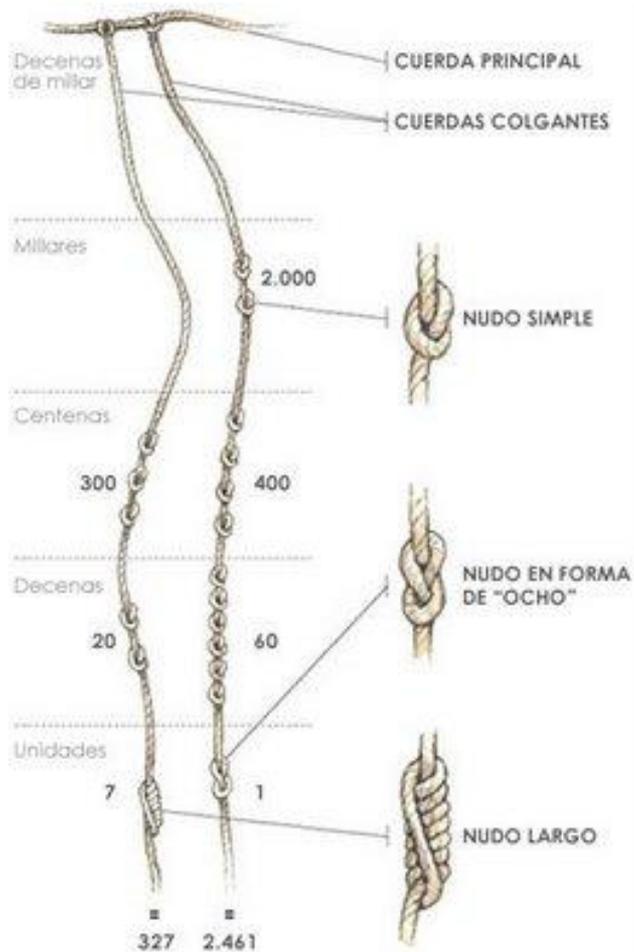
Numeración comercial

							
20	21	41	61	122	400	401	8000

$21 = 1 \times 20 + 1$	$122 = 6 \times 20 + 2$
$41 = 2 \times 20 + 1$	$401 = 1 \times 20^2 + 0 \times 20 + 1$
$61 = 3 \times 20 + 1$	$8000 = 1 \times 20^3 + 0 \times 20^2 + 0 \times 20 + 0$

# Quipu Inca



# Sistema Romano

		●	
●	● ● ●	● ●	● ●



MCCCLXXII

	●	●	
● ●	● ● ● ●	● ● ●	●



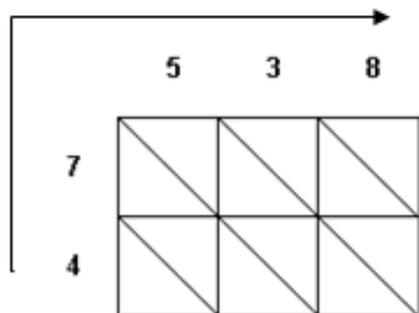
MMDCCCCLXXXI

# Algoritmos de multiplicación

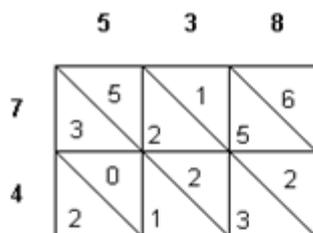
## MULTIPLICACIÓN ÁRABE-HINDÚ

Veamos como realizaban las multiplicaciones los hindúes en el siglo V  
Supongamos que tenemos que multiplicar **538 x 47**.

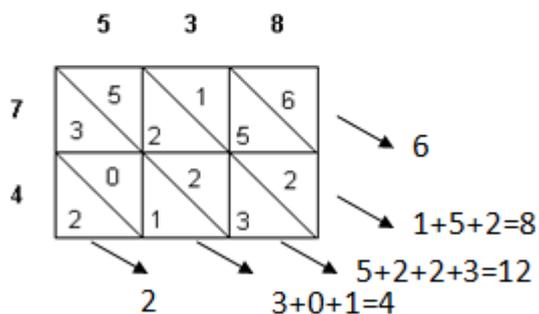
Al tener el multiplicando 3 cifras y el multiplicador 2, dibujamos un cuadro rectangular con 3 columnas y 2 filas.  
Se coloca 47 y 538 en sentido horario, ubicando cada cifra encabezando filas y columnas.



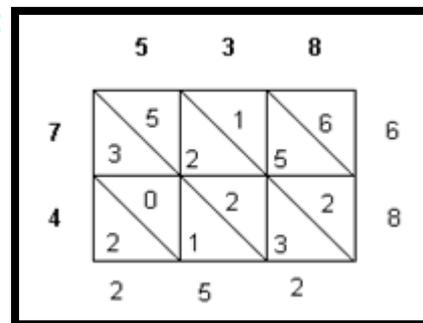
Se completa las casillas interiores multiplicando los dígitos que encabezan fila y columna.



Sumamos los dígitos en diagonal y sentido horario



Cuando el resultado sea mayor que 9 arrastramos las decenas al siguiente:



# Algoritmos de la multiplicación

## MULTIPLICACIÓN RUSA

Calcular: 23x45

Mitades	Dobles
23	45
11	90
5	180
<del>2</del>	<del>360</del>
1	720
	<hr/> 1035

- Se tachan las filas de mitad par
- Se suman los dobles no tachados

## MULTIPLICACIÓN EGIPCIA

Calcular: 28x45

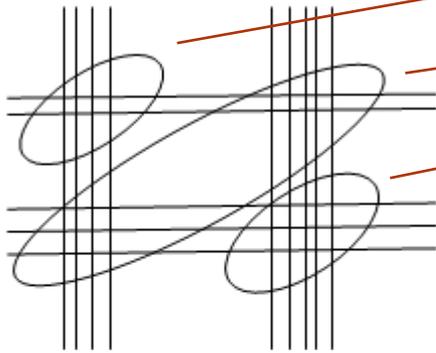
Dobles	Dobles
28	1
<del>56</del>	<del>2</del>
112	4
224	8
<del>448</del>	<del>16</del>
896	32
<hr/> 1260	

- Se escogen las filas cuyos segundos dobles que sumen 45  
 $45=32+8+4+1$
- Se tachan el resto de filas y se suman los primeros dobles que quedan sin tachar

# Algoritmos de la multiplicación

## MULTIPLICACIÓN GRÁFICA

Calcular: 23X45



**Centenas: 8**

**Decenas: 22**

**Unidades: 15**

**Se normalizan:**

**Millares: 1**

**Centenas: 0**

**Decenas: 3**

**Unidades: 5**

**Para 23**

- Se dibujan dos líneas horizontales
- Más abajo 3 líneas horizontales

**Para 45**

- Se dibujan 4 líneas verticales
- Más a la derecha 5 líneas verticales

**Se cuentan las intersecciones de las zonas marcadas:**

# Multiplicación con el Ábaco Chino

Multiplicación:  $356 \times 6$

	3	5	6				6			
$+6 \times 6$									+3	+6
$+50 \times 6$								+3		
							Se borra -6			
$+300 \times 6$							+1	+8		

Colocación: multiplicando a la izquierda, multiplicador a la derecha dejando tanto espacios como cifras tienen el primero

# Multiplicación con el Ábaco Chino

Multiplicación:  $356 \times 62$

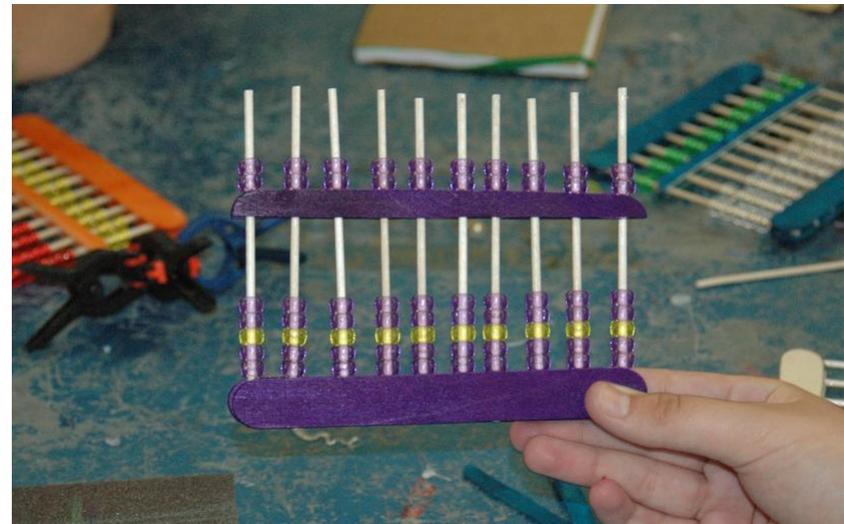
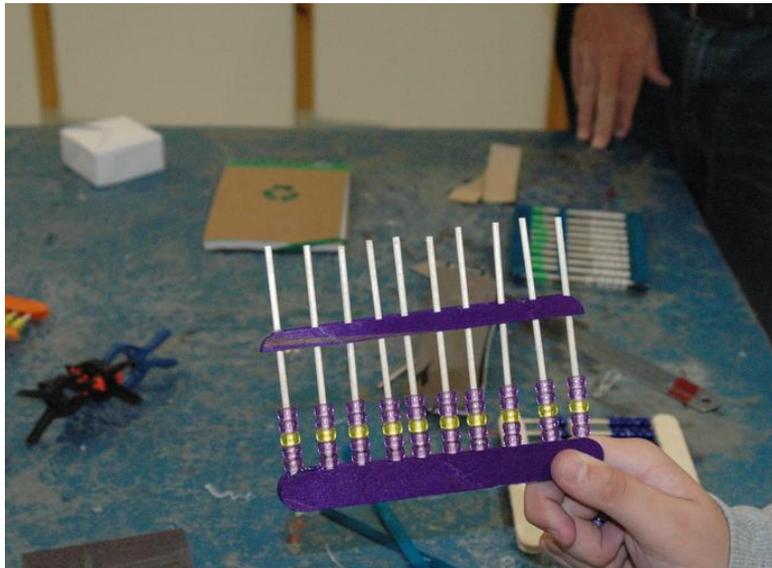
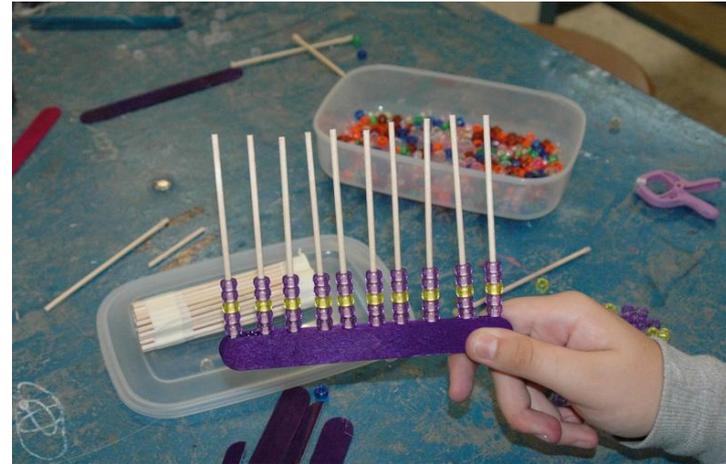
	3	5	6			6	2			
<b>+6x2</b>									+1	+2
<b>+50x2</b>								+1		
							Se borra -2			
<b>+300x2</b>								+6		
<b>+6x60</b>								+3	+6	
<b>+50x60</b>							+3			
						Se borra - 6				
<b>+300x60</b>						+1	+8			

# Construcción del Ábaco Chino

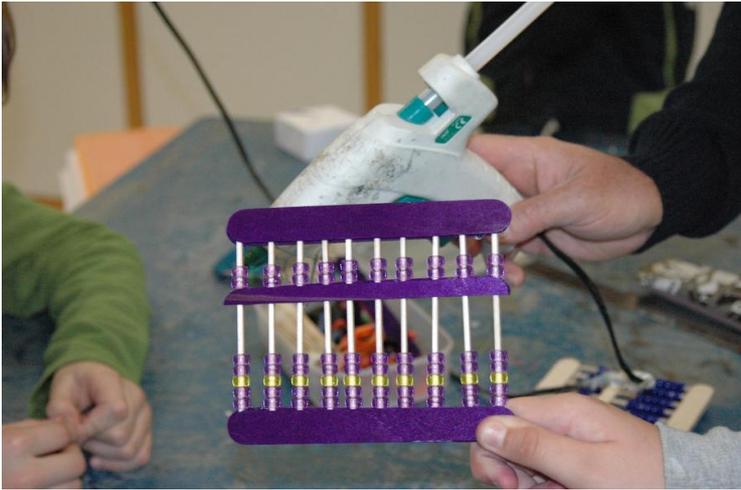
Materiales:



# Construcción del Ábaco Chino



# Construcción del Ábaco Chino



# Fuentes

- [www.librosmaravillosos.com/swanpan/index.html](http://www.librosmaravillosos.com/swanpan/index.html)
- *Ábacos Escolares 1820-1860*
- EL TABLERO MEDIEVAL DE CÁLCULO Y LAS OPERACIONES CON NÚMEROS ROMANOS: ESTUDIO HISTÓRICO Y PEDAGÓGICO. JOSÉ MARÍA NÚÑEZ
- La aritmética con arena y guijarros. Guillermo Searle Hernández
- Manual de uso del ábaco japonés
- Operaciones fundamentales en la aritmética del ábaco chino.