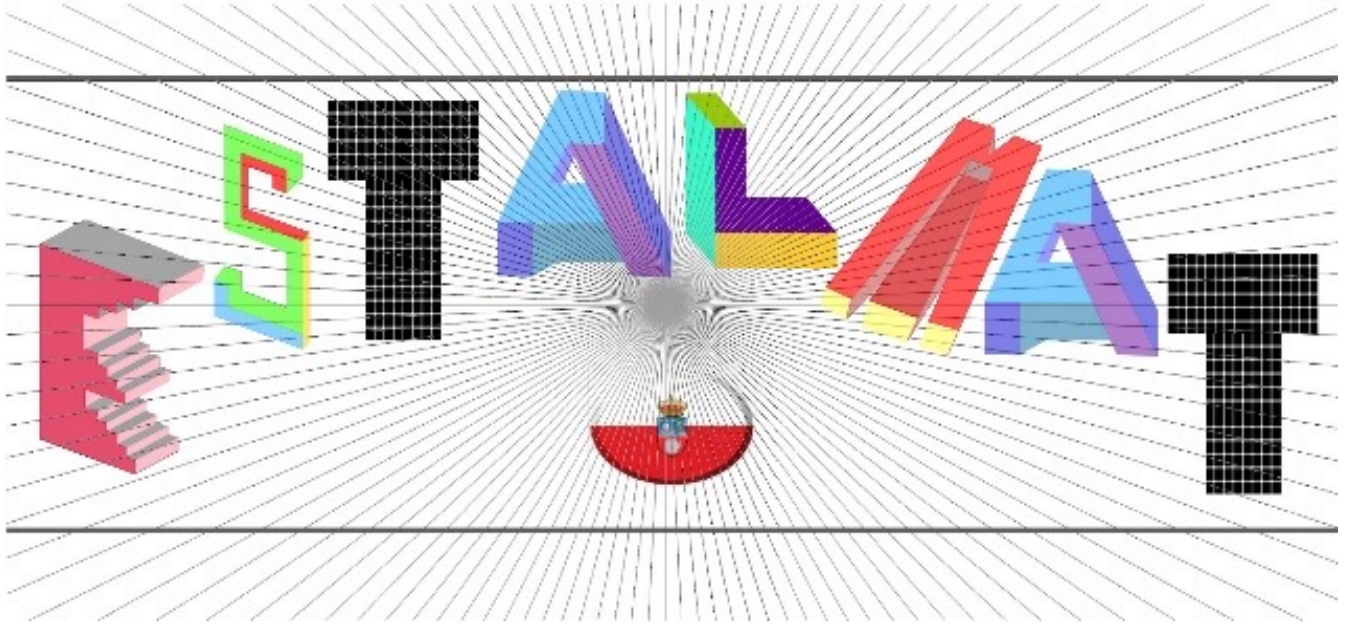


175 Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España
1847 - 2022 ANIVERSARIO

STALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

50 UC
Universidad de Cantabria

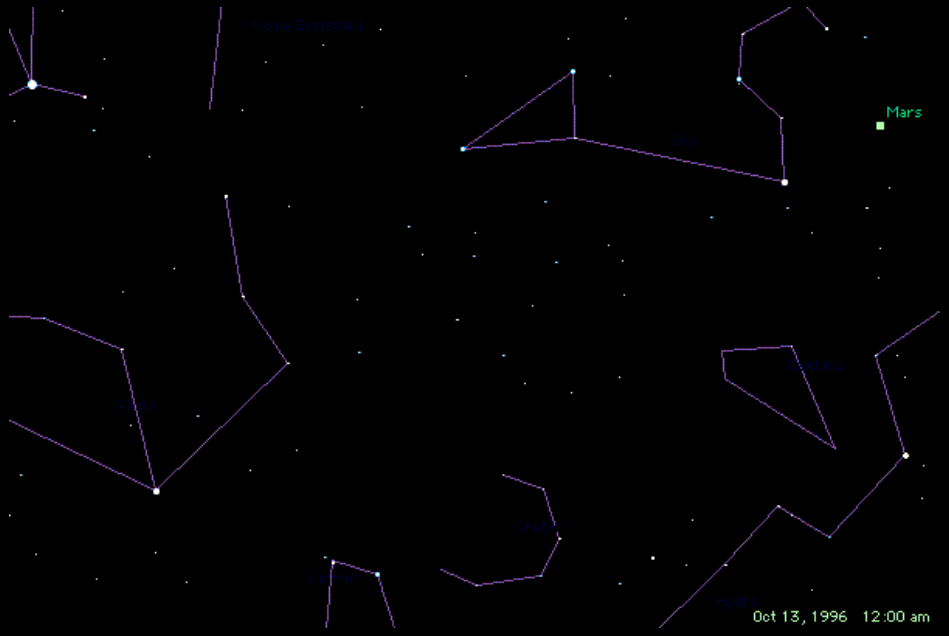
GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

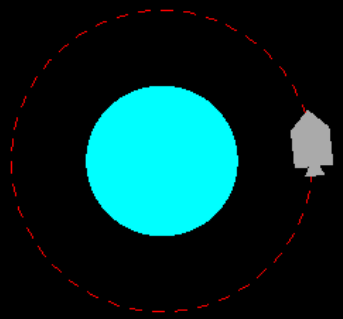
FECYT
INNOVACIÓN

GOBIERNO de CANTABRIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL

SMPC

Planetas y satélites
Viajando por el espacio





Francisco J. Carrera

Estalmat, 11 de febrero de 2023

IFCA Instituto de Física de Cantabria
EXCELENCIA MARÍA DE MAEZTU
50 UC Universidad de Cantabria
CSIC Consejo Superior de Investigaciones Científicas

¿Qué vamos a ver?

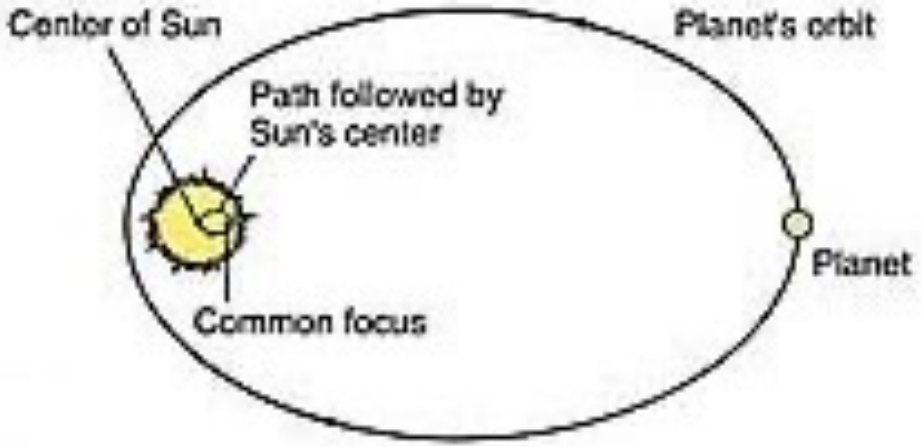
- Órbitas
- Aplicaciones
- Viajando por el espacio

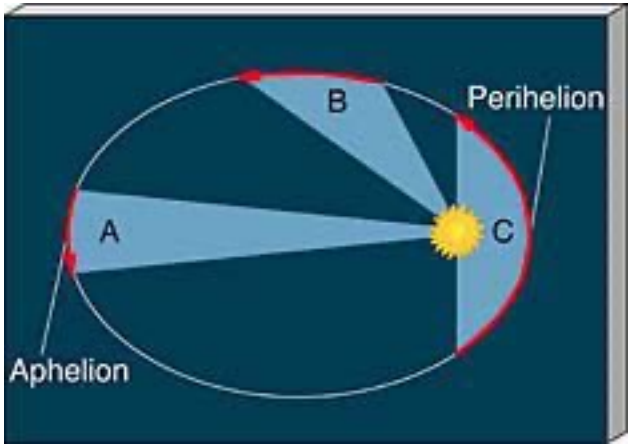
http://venus.ifca.unican.es/~carreraf/Orbits/

¿Qué vamos a ver?

- Órbitas
  - Leyes de Kepler
  - Leyes de Newton
  - Otro vistazo a las leyes de Kepler
- Aplicaciones
- Viajando por el espacio

Leyes de Kepler

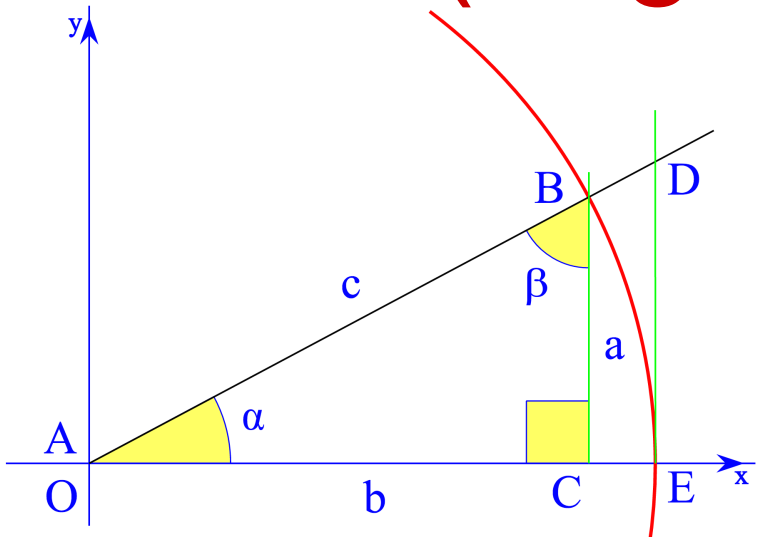


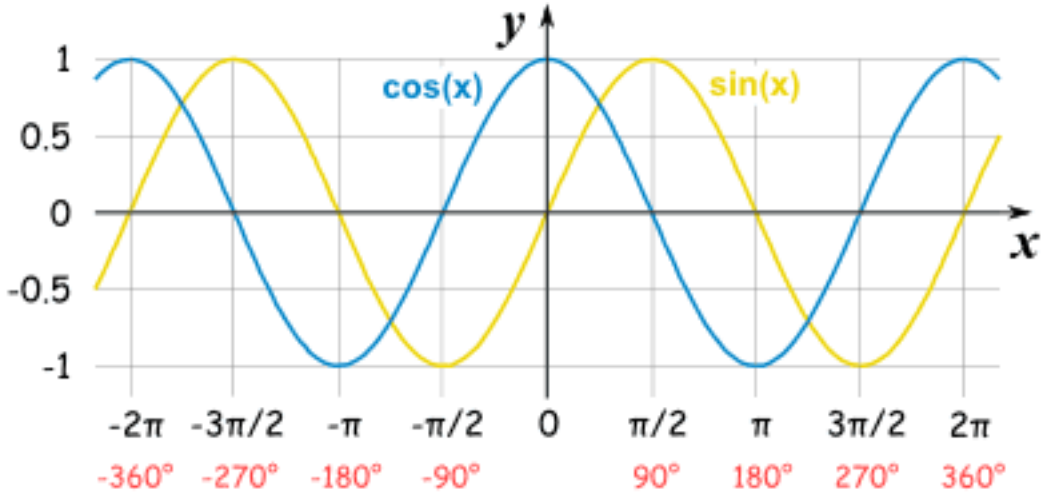


1. Los planetas siguen órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos (1609)
2. Las áreas barridas por los radios de los planetas son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer el perímetro de dichas áreas (1609)
3. El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol (1618)

http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html

(Trigonometría)

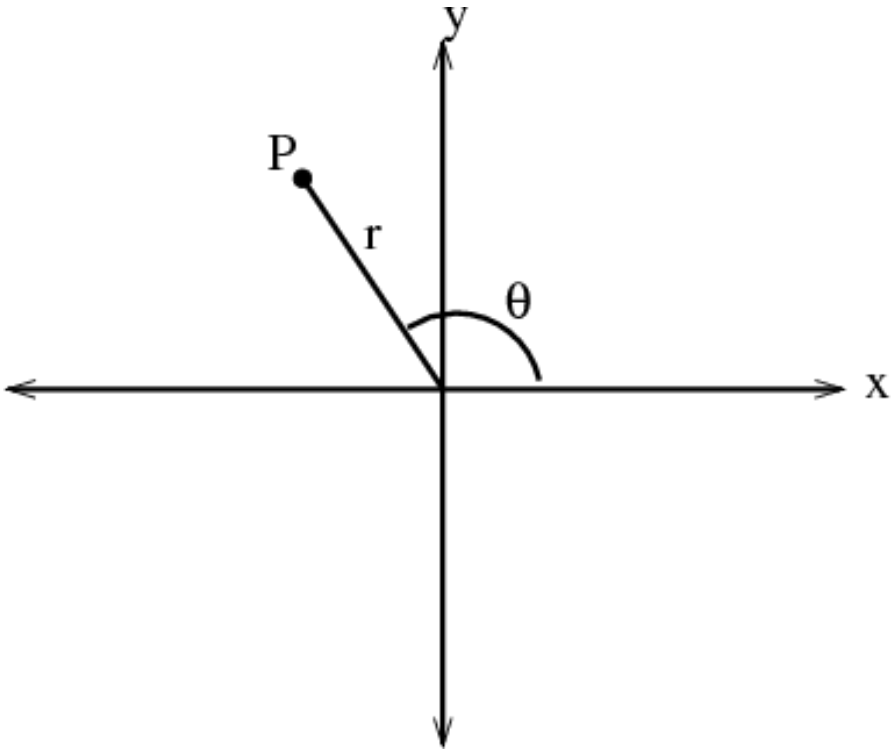


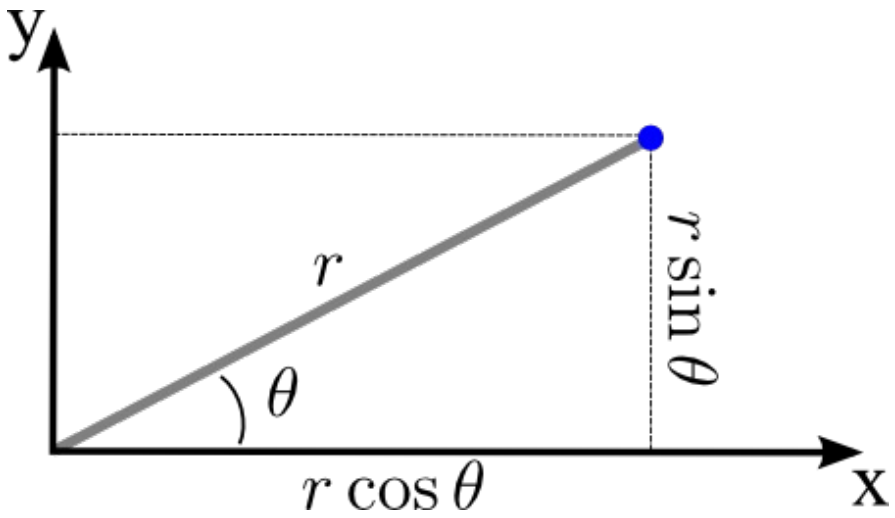


- Dado un triángulo rectángulo:
  - BC: lado opuesto a α
  - AC: lado comprendido por α
- seno: sen α=a/c lado opuesto partido por hipotenusa
- coseno: cos α=b/c lado comprendido partido por hipotenusa
  - Ambos entre -1 y 1: ¿por qué?
  - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=?$

https://www.mathsisfun.com/geometry/unit-circle.html

(Coordenadas polares)

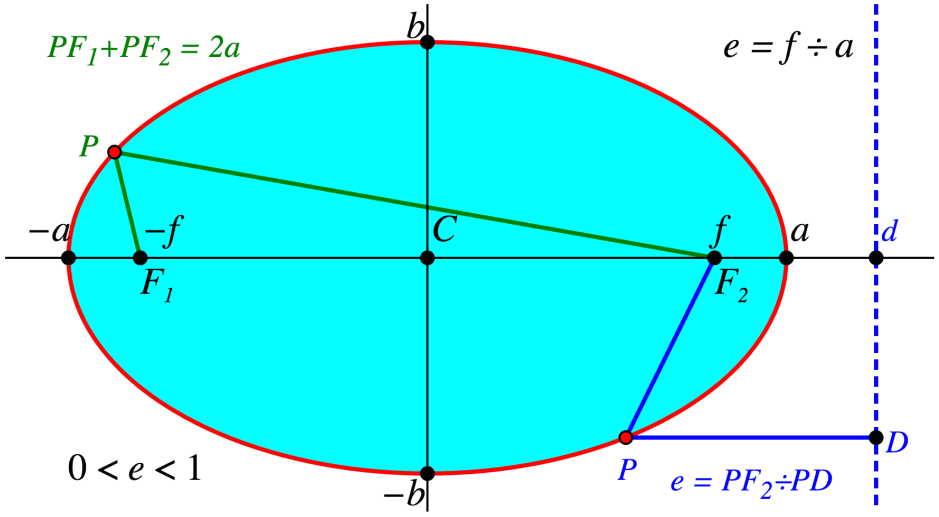


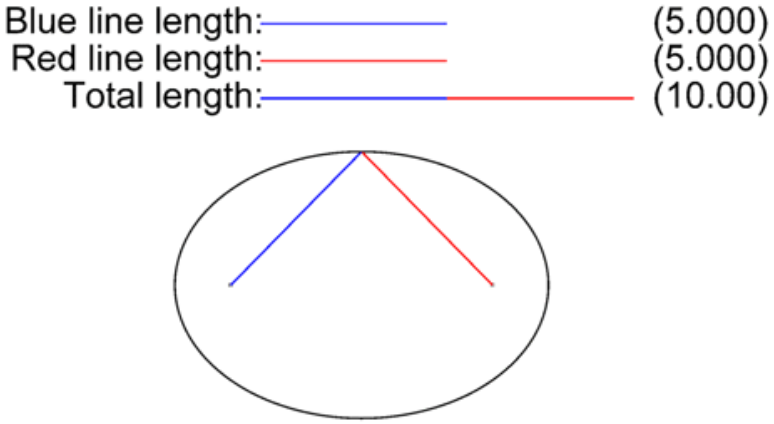


- Representación de un punto P en el plano:
  - Conocéis “cartesianas”: x,y
  - Pero también polares: un ángulo θ y una distancia r
  - Relación entre ellas

http://mathinsight.org/polar_coordinates

(Elipse)



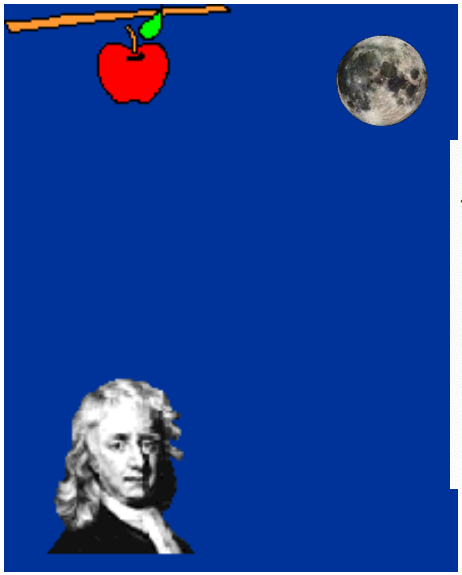


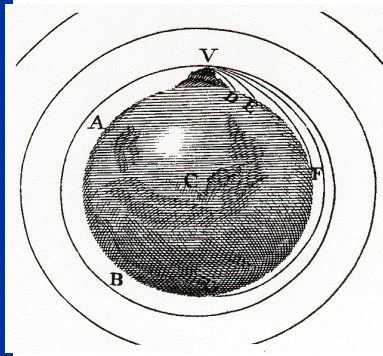
- Elipse: lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos PF_1+PF_2 (focos) es constante
- En coordenadas polares: $r(\theta)=a(1-e^2)/(1+e\cos\theta)$
  - a semieje mayor: $PF_1+PF_2=2a$
  - f distancia focal
  - e excentricidad: f/a
  - r entre $a-f \equiv q$ y $a+f$: $r(\theta)=q(1+e)/(1+e\cos\theta)$

  http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html

Isaac Newton (1643-1727)

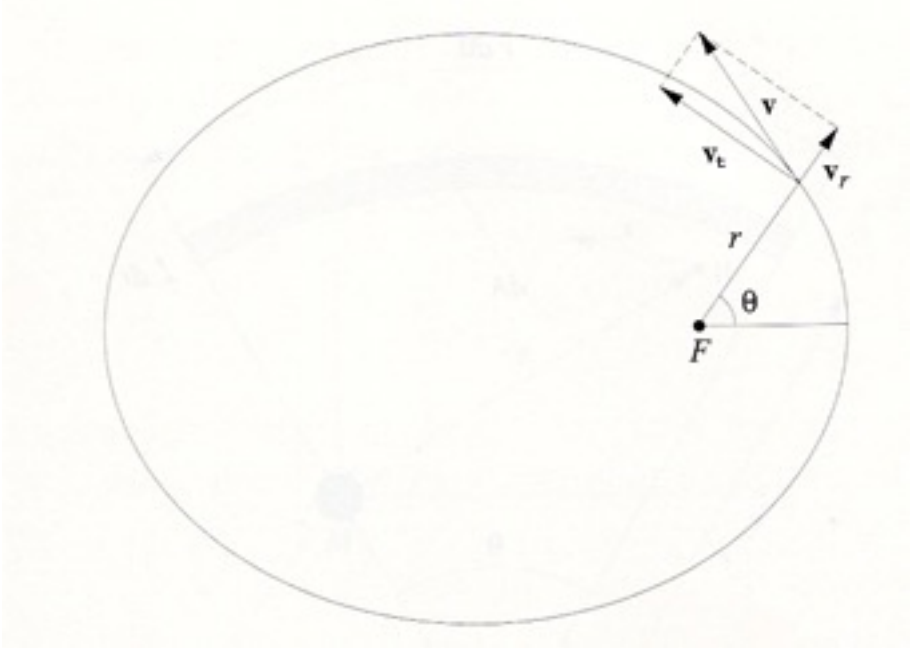
- Uno de los mayores genios de la Física y las Matemáticas
- *Philosophia naturalis principia mathematica* (1687)
- Ley de la gravitación Universal:
  - $F=GMm/r^2$
  - Mismos principios físicos en la Tierra y en los cuerpos celestes
  - Explicación física de las leyes de Kepler
- El cañón de Newton





http://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/more_stuff/flashlets/NewtMtn/home.html

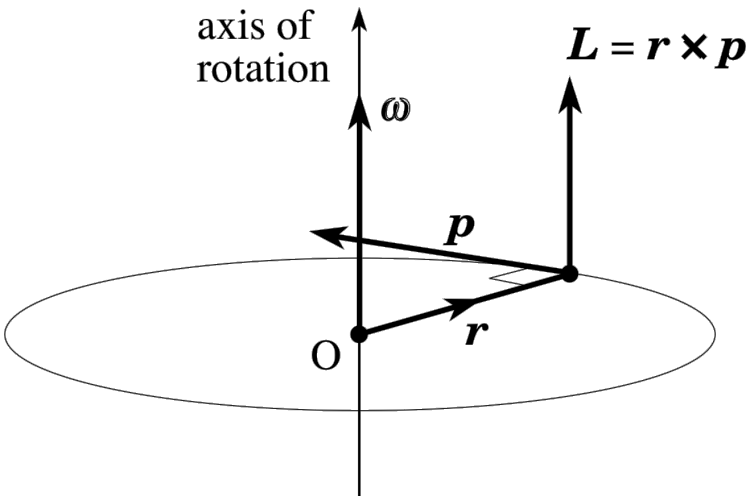
(Componentes de la velocidad)

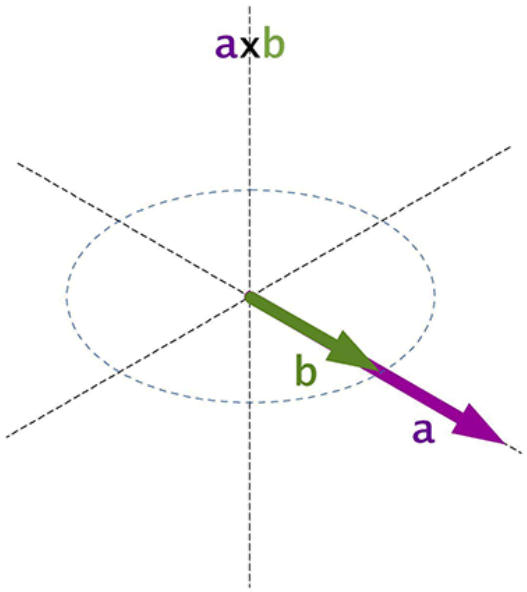


- La velocidad total es tangente a la trayectoria en todo momento
- La velocidad es un vector que se puede descomponer en dos componentes mutuamente perpendiculares:
  - Velocidad radial v_r
  - Velocidad transversal v_T
  - $v^2 = v_r^2 + v_T^2$ (Pitágoras)

http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html

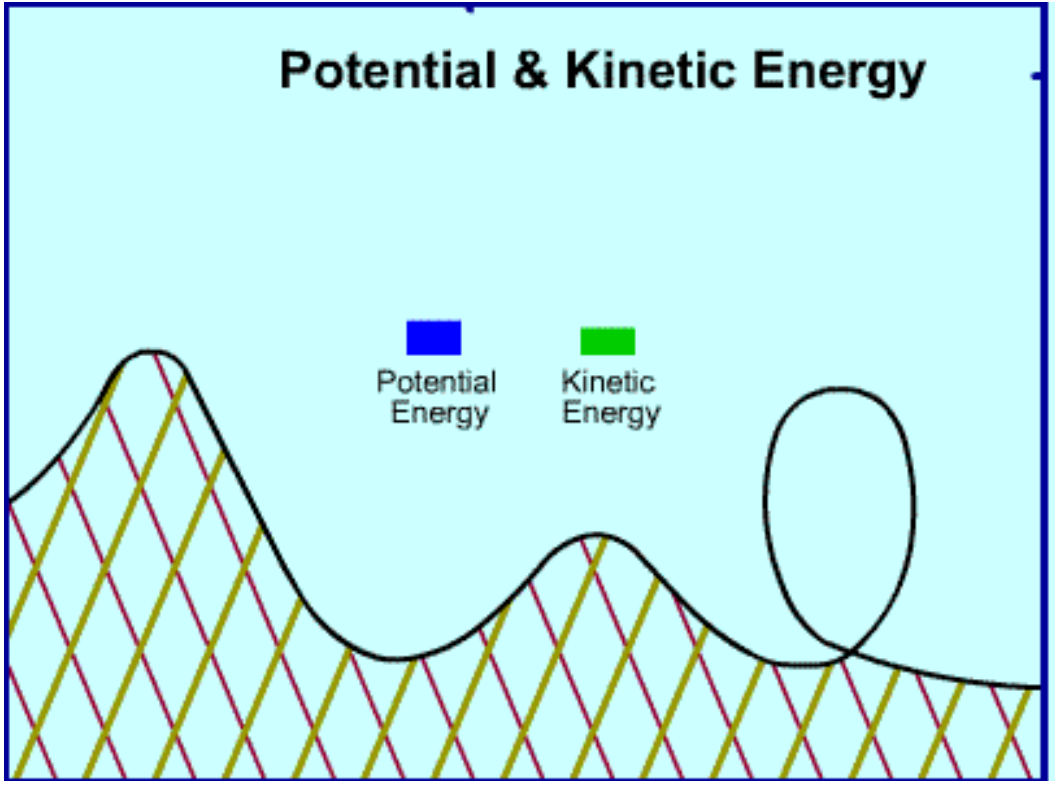
(Momento angular)





- El momento angular es el producto vectorial × del radio vector y el momento lineal (masa por velocidad)
  - Su dirección es perpendicular al radio y a la velocidad
  - Su módulo $L=mrv_T$

(Energía)

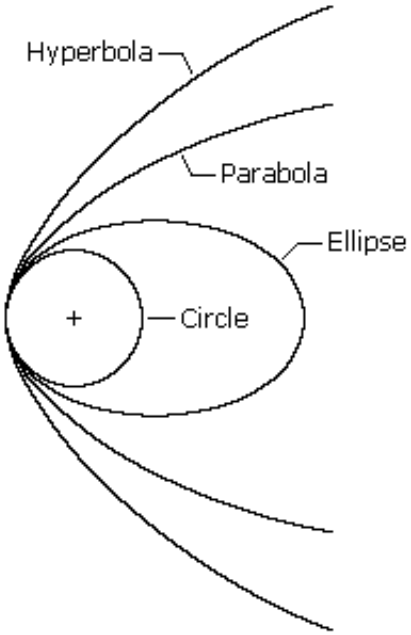


- La energía es la capacidad de producir un trabajo
- En una órbita hay dos clases de energía (trasvase):
  - Energía potencial: asociada a la presencia del Sol $V=-GMm/r$
    - Se considera negativa porque hay que invertir energía para alejar masa
  - Energía cinética: asociada a la velocidad $K=mv^2/2$
- La energía total es entonces $E=K+V=mv^2/2-GMm/r$

https://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park-basics/latest/energy-skate-park-basics_en.html

Cónicas (geométrico)

- Cónicas: intersección de cono y plano
  - circunferencia: plano ⊥ eje
  - elipse: plano inclinado < generatriz
  - parábola: plano || generatriz
  - hipérbola: plano inclinado > generatriz
    - dos ramas!



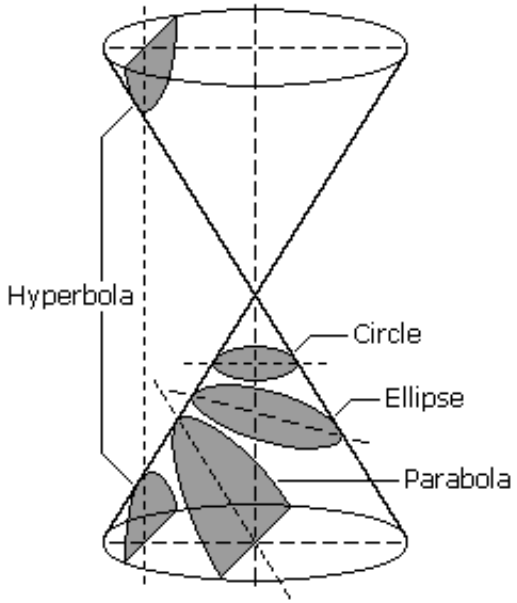
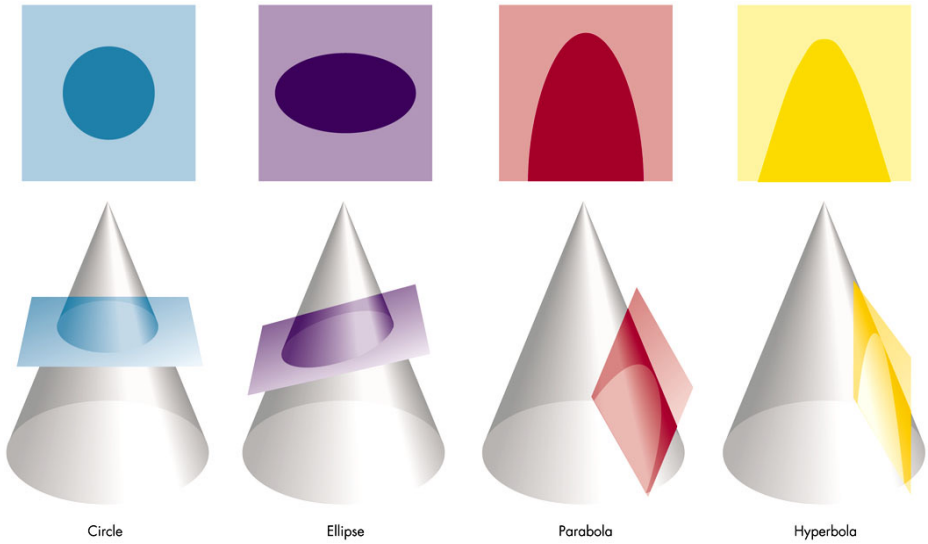


Figure 4.1



https://www.geogebra.org/m/vwUxZJPR

Cónicas (analítico)

- Coordenadas polares
  $r(\theta)=q(1+e)/[1+e\cos(\theta-\theta_0)]$
  - $(GMm)^2 m(e^2-1)=2EL^2$
  - q Periastro
    $q=r(\theta=\theta_0)=(1+e)L^2/GMm^2$
  - e excentricidad
    - $E<0$: $e<1$ órbitas cerradas
    - $E\geq 0$: $e\geq 1$ órbitas abiertas

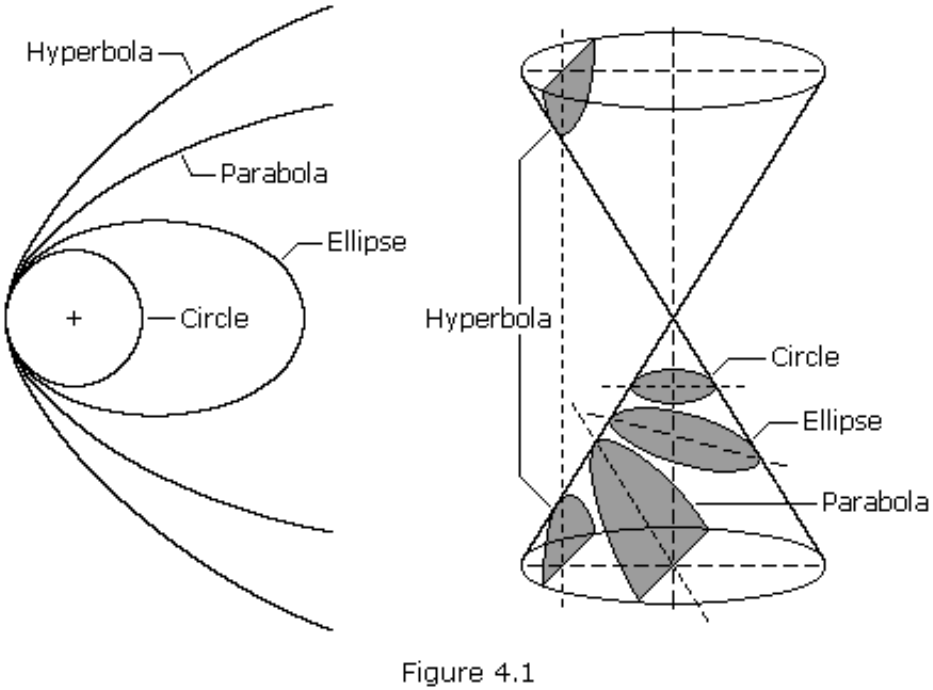


Figure 4.1

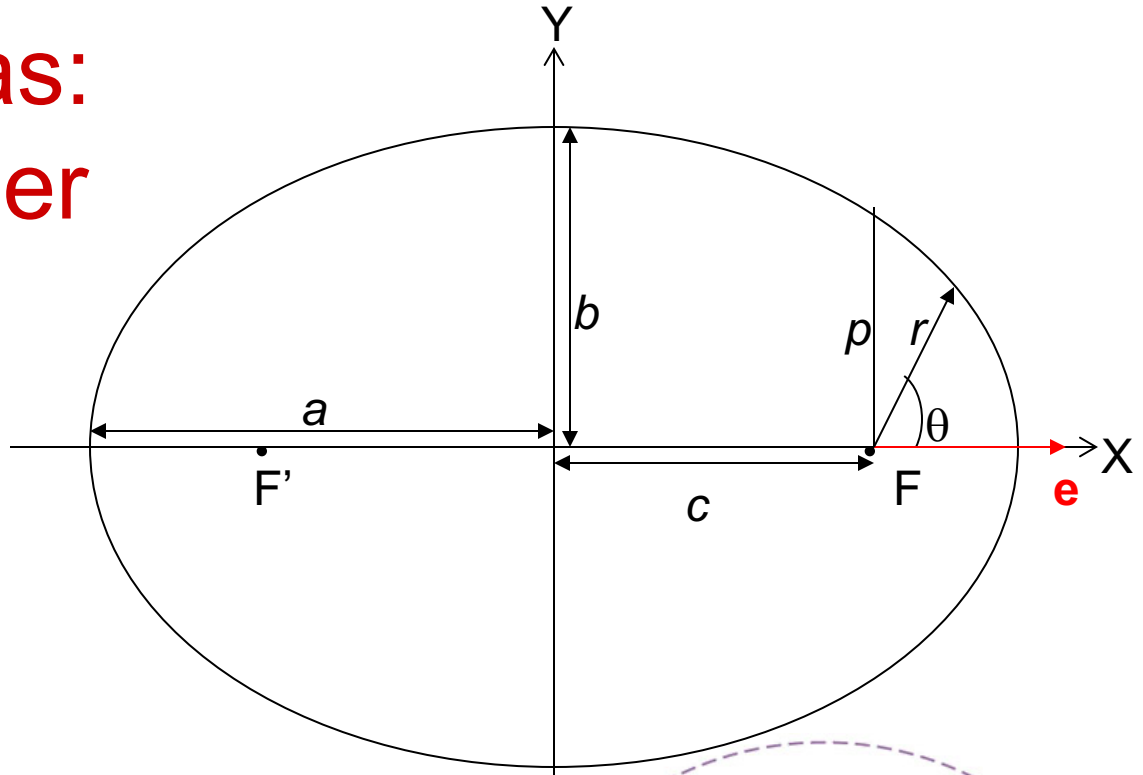
- Tipos de órbitas:
  - $e=0$ circunferencia: $r(\theta)=q$ cte
  - $0<e<1$ elipse: $r_{min}=q$, $r_{max}=r(\theta=\theta_0+\pi)=q(1+e)$ apastro
  - $e=1$ parábola: $r_{min}=q$, $r(\theta\rightarrow\theta_0+\pi)\rightarrow\infty$, $v(\theta\rightarrow\theta_0+\pi)\rightarrow 0$
  - $e>1$ hipérbola: $r_{min}=q$, asíntotas para $\theta'=\theta_0 \pm a\cos(-1/e)$, $v(\theta\rightarrow\theta')>0$

Órbitas elípticas: 1ª Ley de Kepler

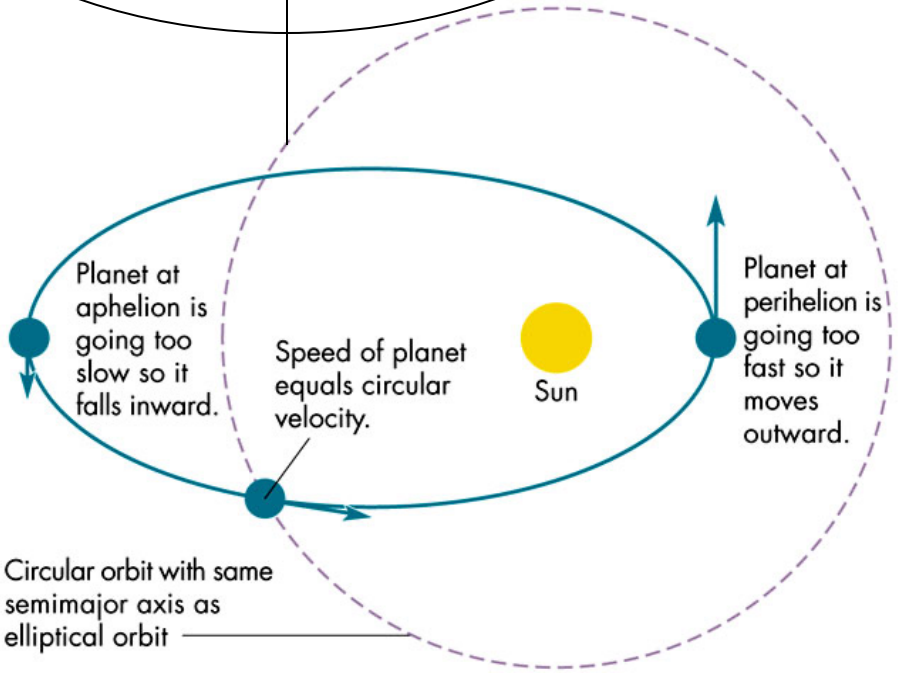
$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + e\cos\theta}$$

$$p = L^2/m\alpha\,,\ \alpha = GMm$$

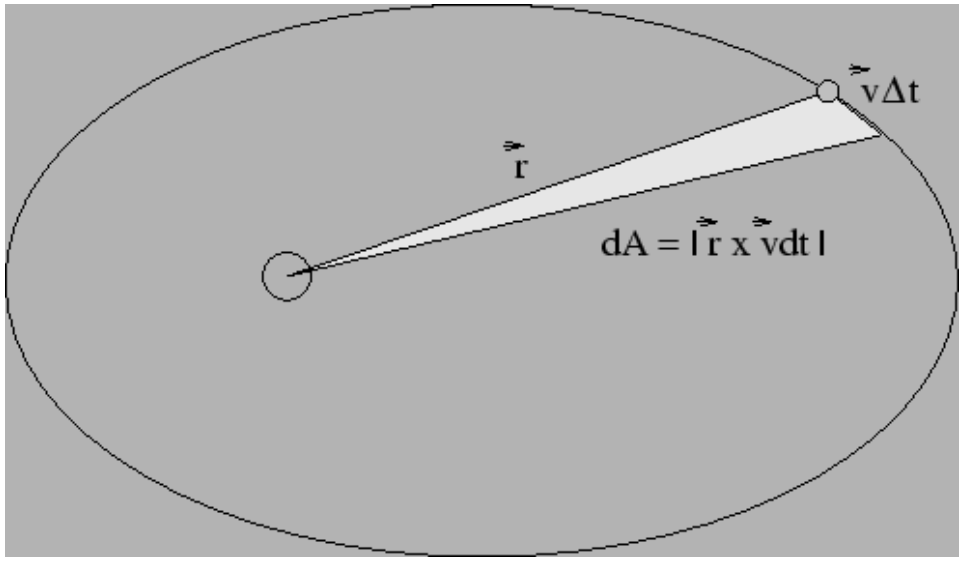
$$a = p/|1-e^2| = \alpha/2|E|$$

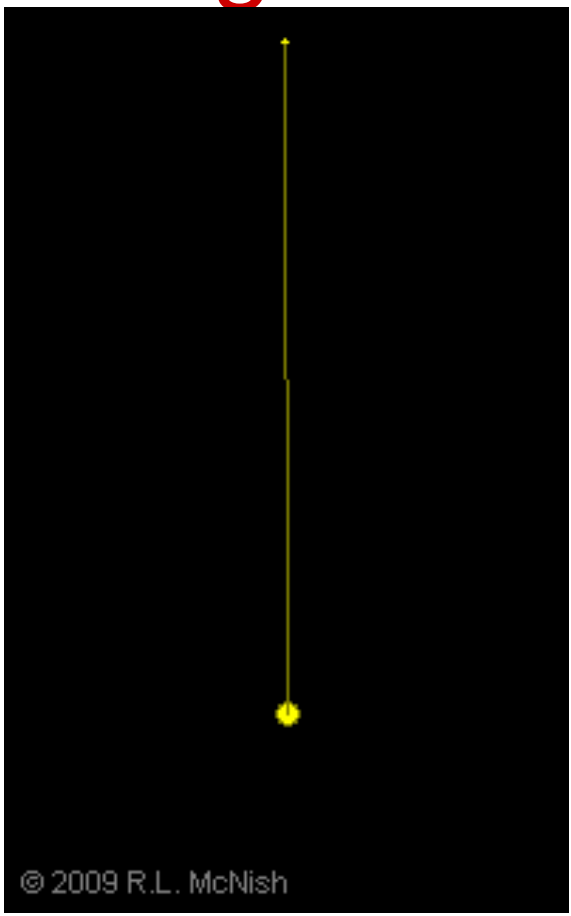


- Periastro $\theta = 0^o$ (perigeo, perihelio):
  - $r = a(1-e) = q$ distancia mínima
  - Tb. se conserva dir. perihelio **e**
- Apastro $\theta = 180^o$ (apogeo, afelio):
  - $r = a(1+e)$ distancia máxima
- $\theta = 90^o$: $r = p$



Conservación del momento angular: 2ª ley de Kepler

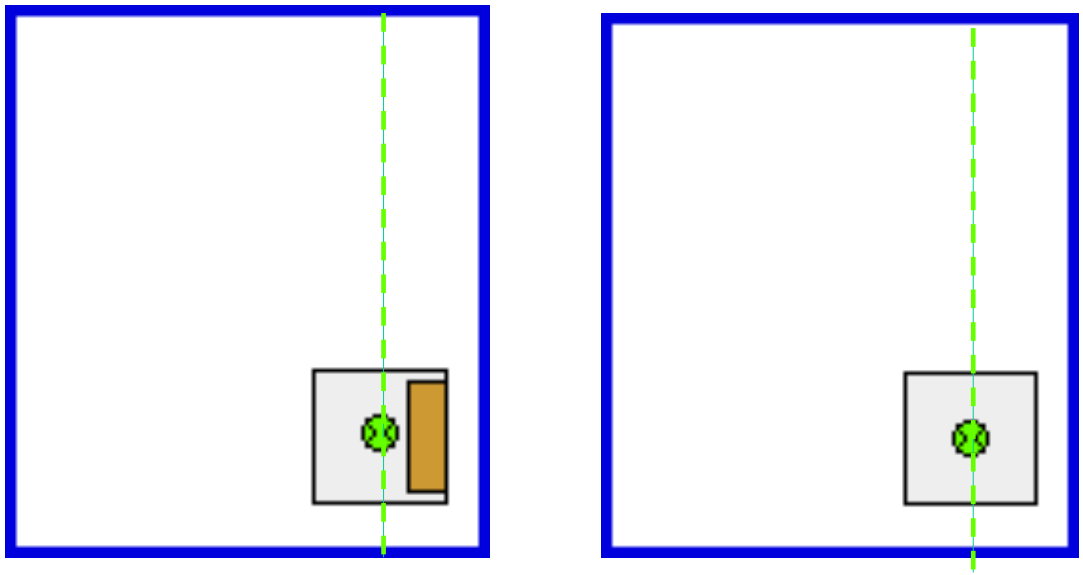




- $L=mrv_T$ constante ⇒ rv_T constante
- Área del triángulo barrido en un tiempo pequeño Δt :
  - $r\, v_T \Delta t /2$ constante
  - 2ª ley de Kepler

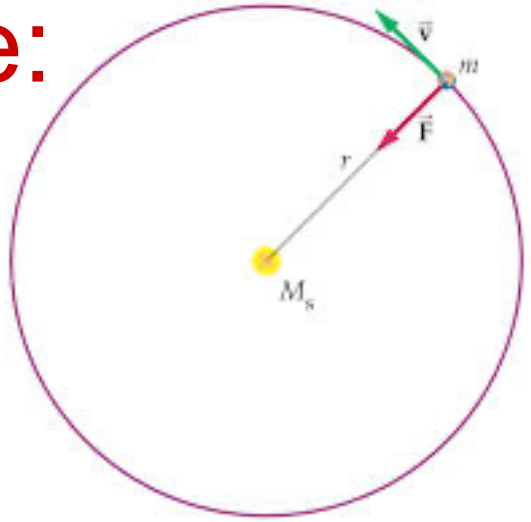
http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html

(“Fuerza centrífuga/centrípeta”)



- 1ª ley de Newton: en ausencia de fuerza, un objeto o se mantiene en reposo o se mantiene en movimiento rectilíneo uniforme
- Cuando hay un giro, el objeto experimenta una fuerza radial aparente (debida a la inercia) de valor $F=mv_T^2/r$
  - “Fuerza centrífuga”

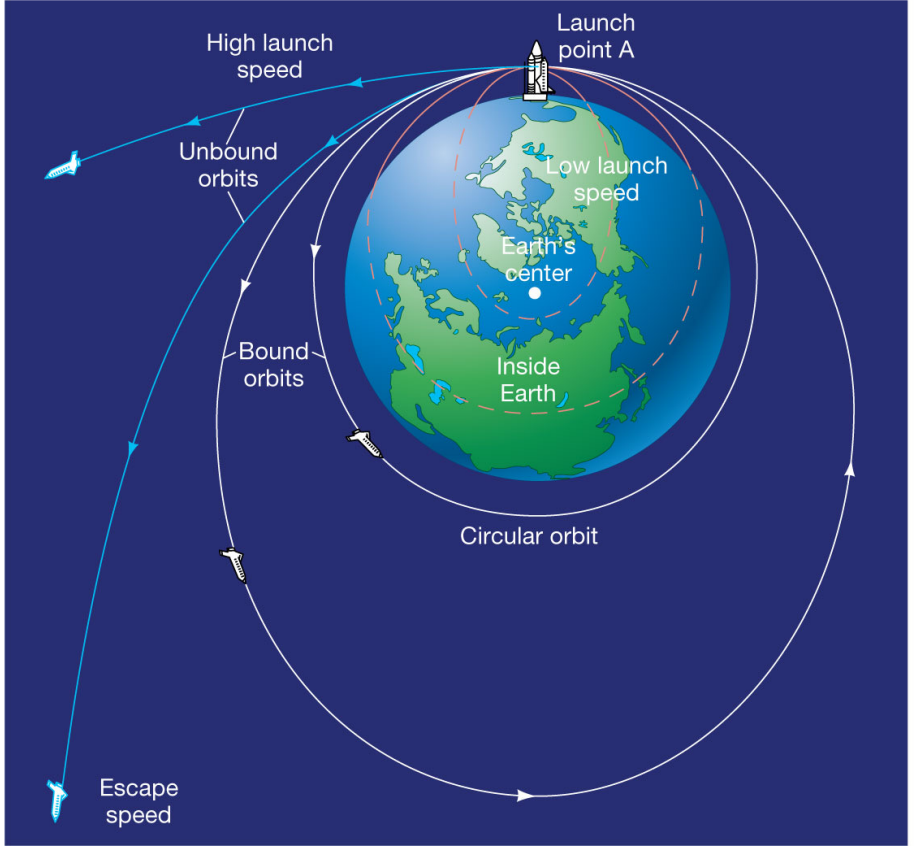
Movimiento circular uniforme: 3ª Ley de Kepler



- Un astro en una órbita circular de radio a y periodo T:
  - Distancia recorrida en un periodo: $2\pi a$
  - Tiempo que tarda en recorrerla: T
  - Velocidad orbital: $v_T = 2\pi a/T$
- Fuerza centrífuga=Fuerza gravedad
  - $GMm/a^2 = mv_T^2/a \Rightarrow GM/a = 4\pi^2 a^2/T^2 \Rightarrow a^3/T^2 = GM/4\pi^2$ constante
  - 3ª ley de Kepler: se puede demostrar para órbitas elípticas también
- Si escribimos a en U.A. (distancia Tierra-Sol), T en años y M en masas solares $M_\odot$
  - $a^3/T^2 = M$

http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html

(Velocidad de escape)



- Velocidad mínima necesaria para que un objeto escape del potencial gravitatorio de otro (órbita parabólica):
  - Energía total nula: $E=0=mv^2/2-GMm/r \Rightarrow v_e=\sqrt{2GM/r}$
    - Tierra desde su superficie: 11.2km/s
    - Sol desde su "superficie": ~600km/s
      - Desde la órbita de la Tierra: 42.1km/s (¡ojo! que ya velocidad orb. de la Tierra)
  - Si $v>v_e$: $E>0$ órbita hiperbólica

http://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/more_stuff/flashlets/NewtMtn/home.html

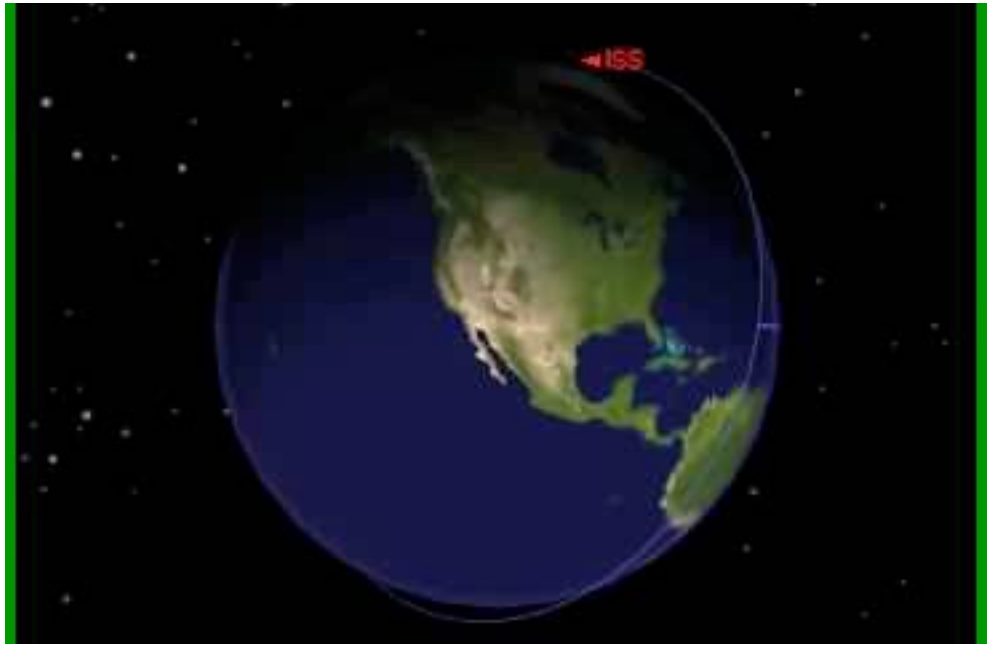
¿Qué vamos a ver?

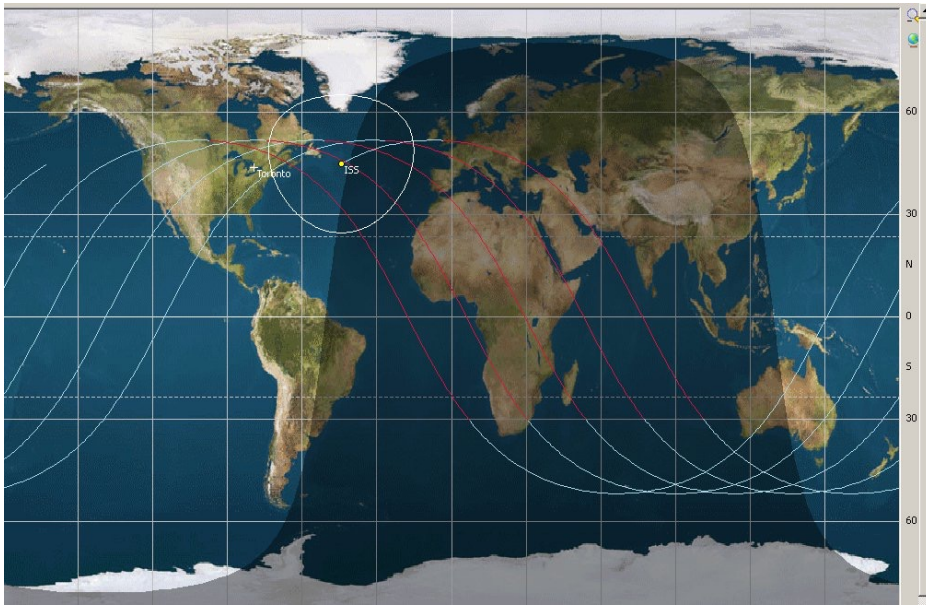
- Órbitas
- Aplicaciones:
  - Satélites artificiales
  - El Centro Galáctico
  - Encontrando y midiendo exoplanetas
- Viajando por el espacio

Satélites artificiales

- Cada satélite se coloca en la órbita en la que mejor cumpla su misión:
  - Cuanto más lejos, más combustible es necesario para llevarlo allí
  - El plano de la órbita es fijo, la Tierra gira “por debajo”

Satélites artificiales



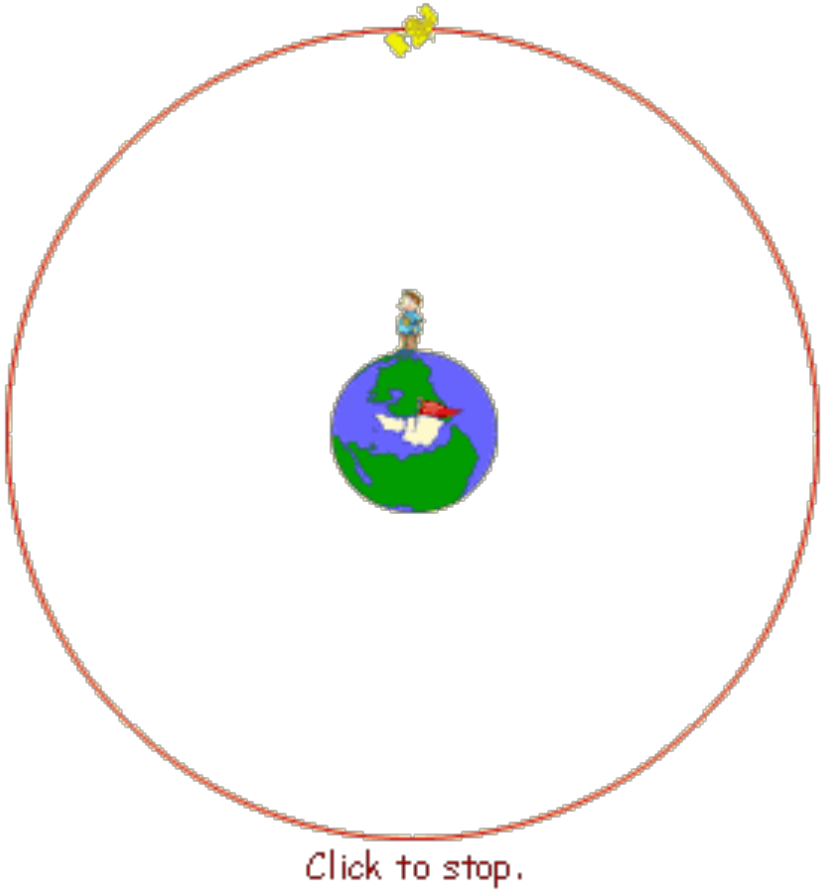


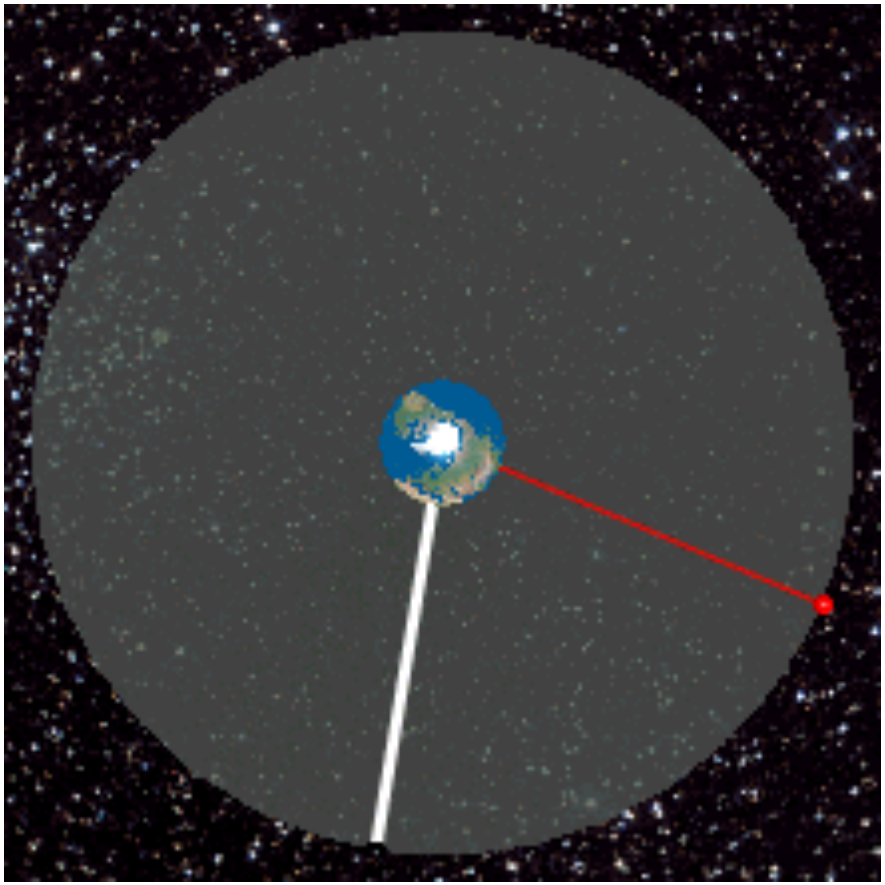
- Estación espacial: órbita baja LEO
  - h=330-410km sobre la superficie
  - T=93 minutos
  - Inclinación 51.3º

Satélites artificiales

- Satélites de TV:
  - Antenas fijas: ¿cómo es posible?

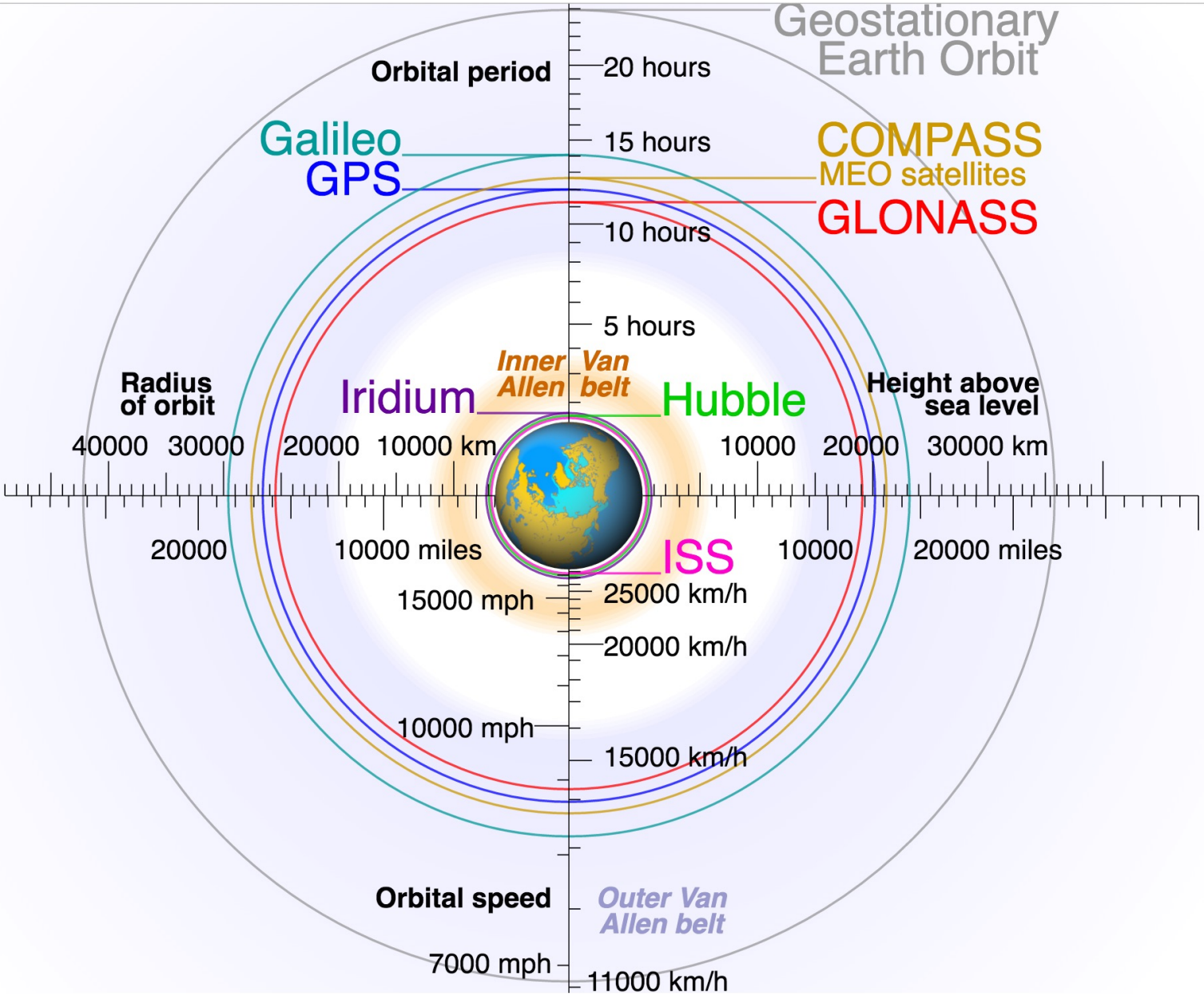
Satélites artificiales





- Satélites de TV:
  - Órbitas con T=24h ⇒ h=35786km Geosíncronas
  - Si en plano del Ecuador: Geoestacionario GEO
    - Estacionario en el cielo visto desde la superficie terrestre

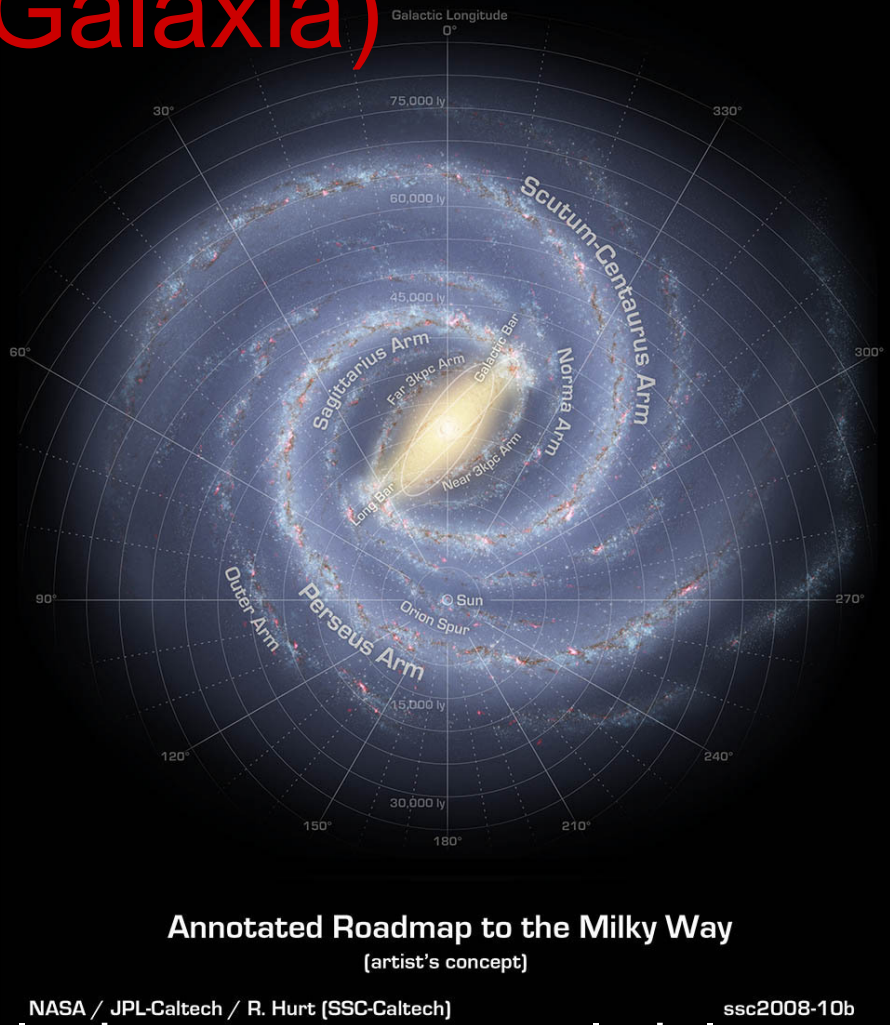
Satélites artificiales



(Nuestra Galaxia)

- Vía Láctea aparece como banda lechosa que cruza el cielo
- En realidad, vivimos en el borde de una galaxia aplanada
- El centro en dirección a Sagitario:
  - Muy oscurecido, sólo visible en infrarrojo y radio

(Nuestra Galaxia)

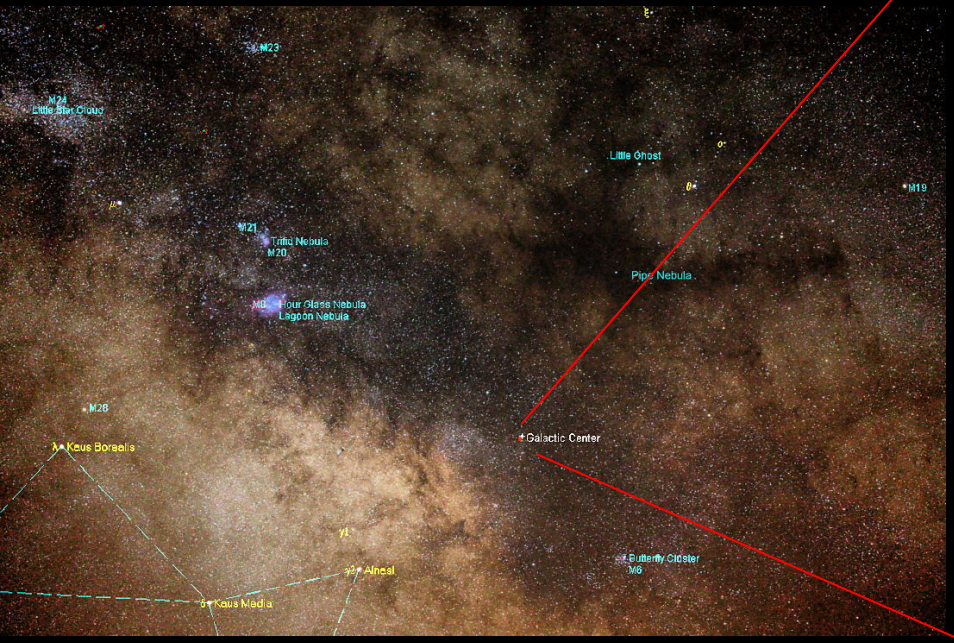


Annotated Roadmap to the Milky Way
(artist's concept)

NASA / JPL-Caltech / R. Hurt (SSC-Caltech) ssc2008-10b

- Vía Láctea aparece como banda lechosa que cruza el cielo
- En realidad, vivimos en el borde de una galaxia aplanada
- El centro en dirección a Sagitario:
  - Muy oscurecido, sólo visible en infrarrojo y radio

(Nuestra Galaxia)



- Vía Láctea aparece como banda lechosa que cruza el cielo
- En realidad, vivimos en el borde de una galaxia aplanada
- El centro en dirección a Sagitario:
  - Muy oscurecido, sólo visible en infrarrojo y radio

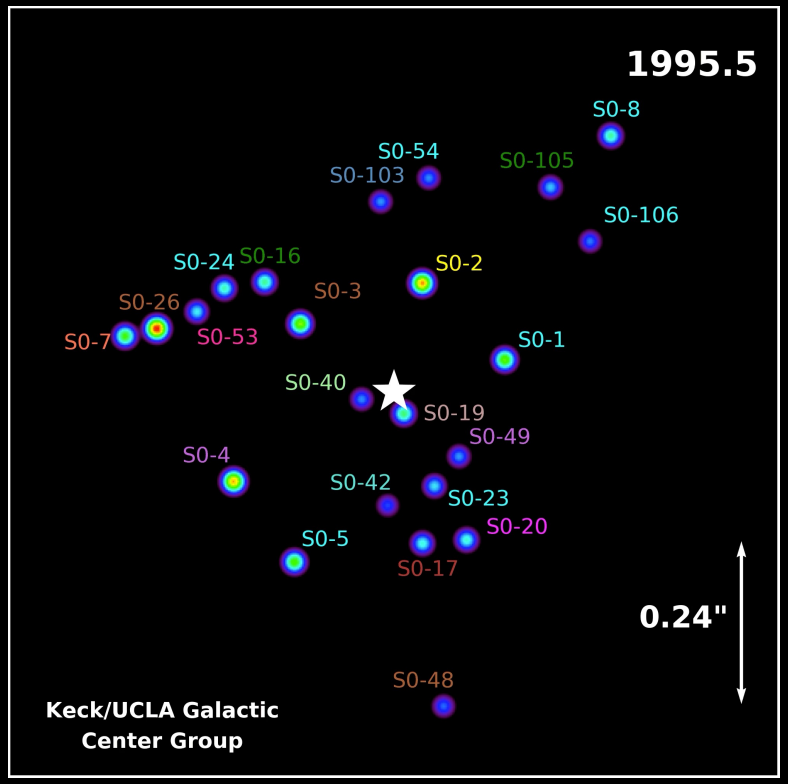
El Centro Galáctico

Premio Nobel Física 2020

© Nobel Media. Ill. Niklas Elmehed.
Roger Penrose

© Nobel Media. Ill. Niklas Elmehed.
Reinhard Genzel

© Nobel Media. Ill. Niklas Elmehed.
Andrea Ghez

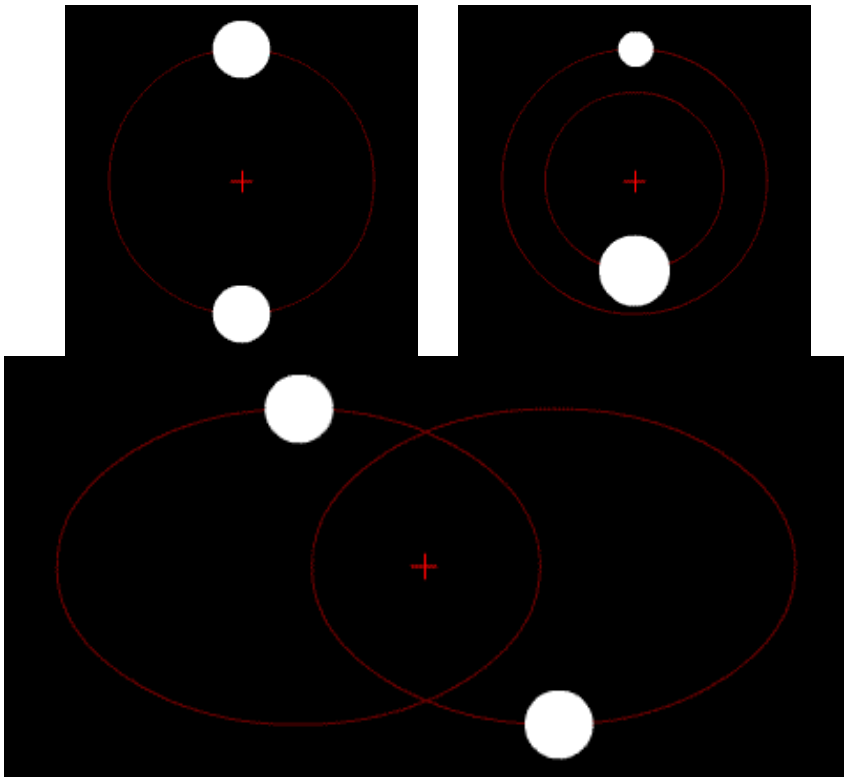


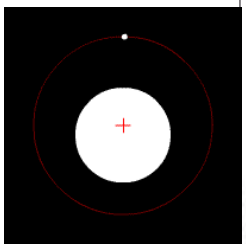
- Cerca del Centro Galáctico las estrellas se mueven a gran velocidad:
  - 3ª ley de Kepler: $GM/a = v_T^2 \Rightarrow M = a v_T^2 / G$
  - P.ej. S2 $a = 1008$ U.A., $T = 15.56$ años: $M = a^3/T^2 = 4 \times 10^6 M_\odot$

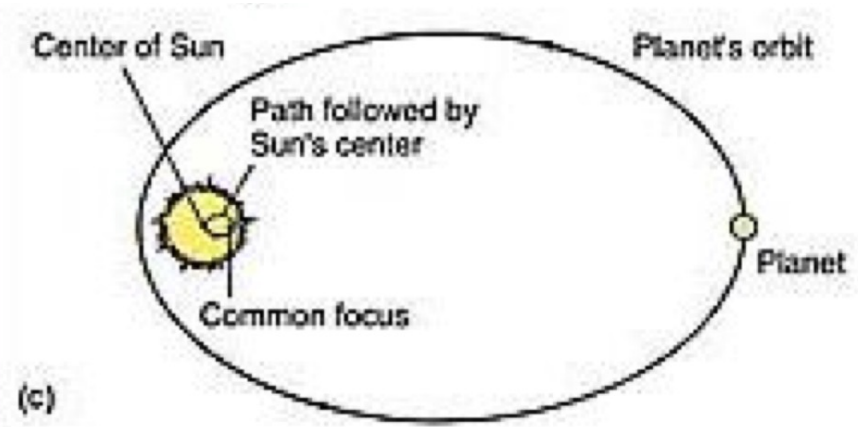
https://galacticcenter.astro.ucla.edu/animations.html

(El problema de dos cuerpos)

- En ausencia de fuerzas externas, el centro de masas (CM) tiene movimiento rectilíneo y uniforme
- $\mu\, a = -\, G\, Mm/r^2$
  - $\mu = Mm\,/(M+m)$ masa reducida
- Las expresiones anteriores son válidas *mutatis mutandis*
- Los mov. respecto CM son también cónicas
- 3ª Ley de Kepler:
  - $a^3/T^2 = GMm/4\pi^2\mu = G(M+m)/4\pi^2$
  - Se puede obtener $M+m$ si a,T







(Efecto Doppler)

- Cambio de la frecuencia de una onda por efecto del movimiento relativo del emisor y el observador

- Si definimos ν_e emisor, ν_r receptor, v vel. rel., c vel. onda:

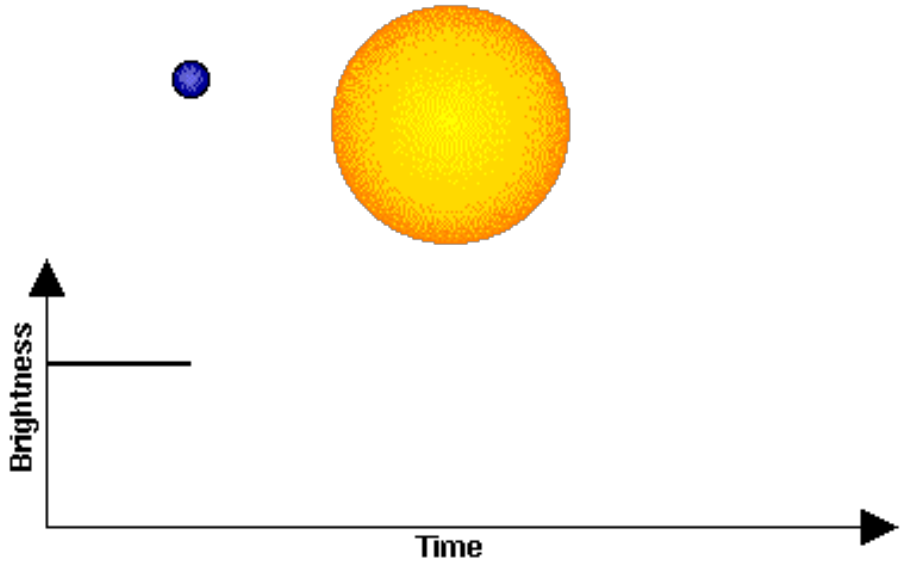
  $\nu_e = \nu_r\,(1+ v/c)$ ó $\lambda_r = \lambda_e\,(1+ v/c) = \lambda_e\,(1+ z)$, $z=v/c$ (v<<)

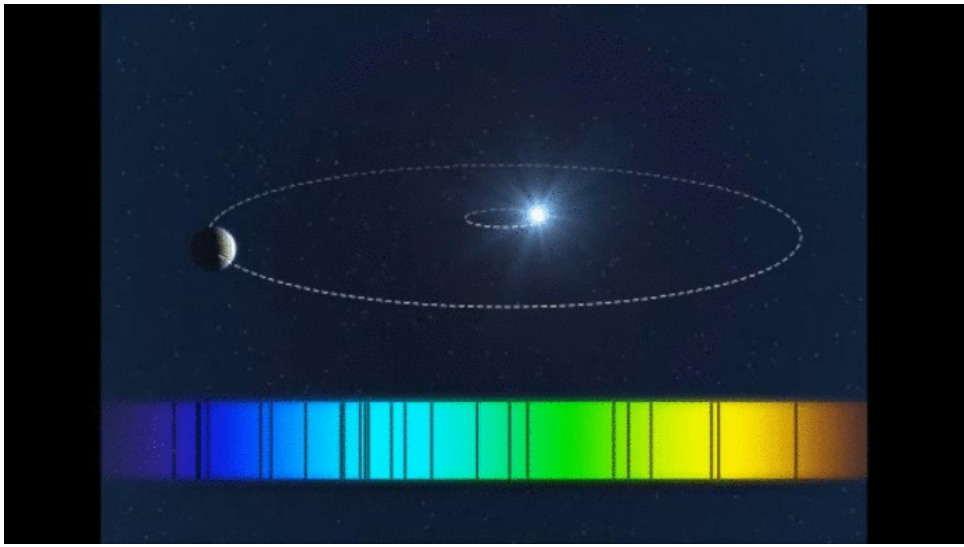
- z corrimiento hacia el rojo (*redshift*):
  - $v>0$ la fuente se aleja: $z>0$ $\lambda_r>\lambda_e$ espectro más “rojo”
  - $v=0$ fuente estacionaria: $z=0$ $\lambda_r=\lambda_e$ no hay cambios
  - $v<0$ la fuente se acerca: $z<0$ $\lambda_r<\lambda_e$ espectro más “azul”
- Presente muy frecuentemente en Astronomía

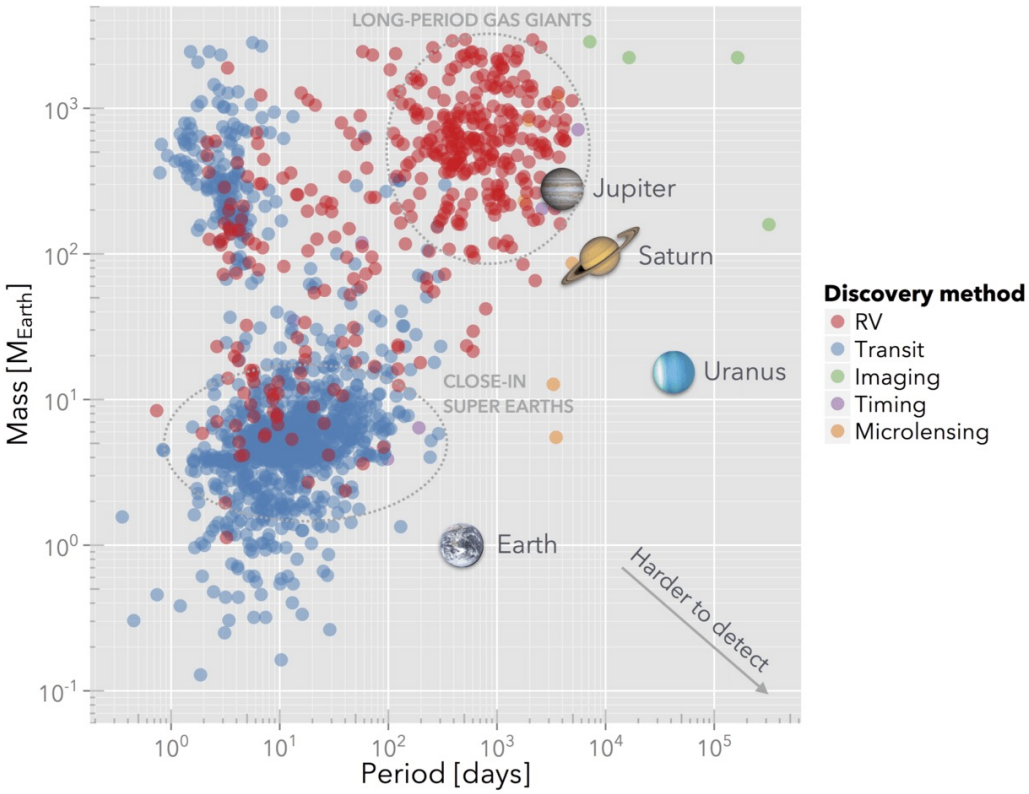
http://ophysics.com/waves11.html

Detección de sistemas planetarios

- Los planetas no emiten luz propia ⇒ Hay que detectarlos indirectamente
- Detectados con tres técnicas:
  - Ocultación parcial estrella
  - Desplazamiento Doppler líneas estrella
  - Emisión IR reflejada de la estrella/calor <<



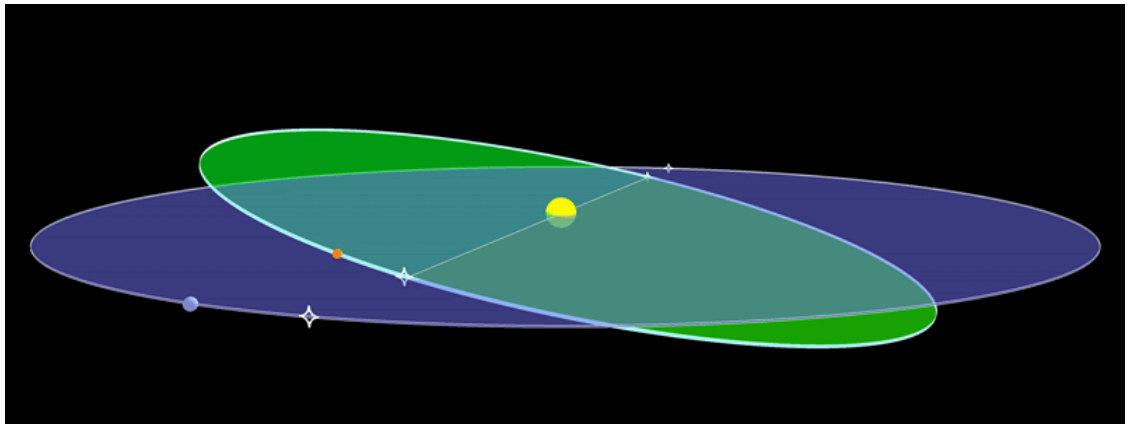


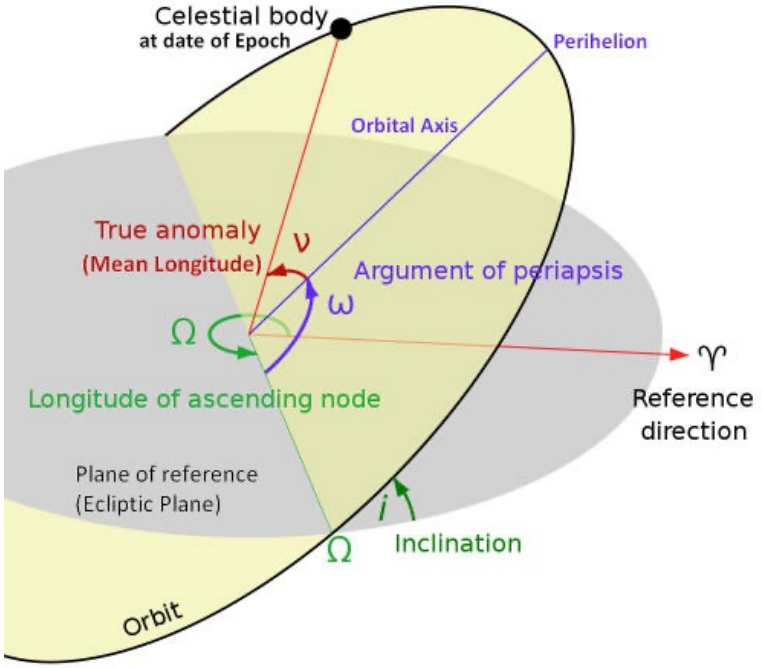


- ~5200 conocidos, >9000 candidatos más
- Muy distintos al Sistema Solar:
  - ¿por qué?

https://exoplanets.nasa.gov/eyes-on-exoplanets/#/

Elementos orbitales



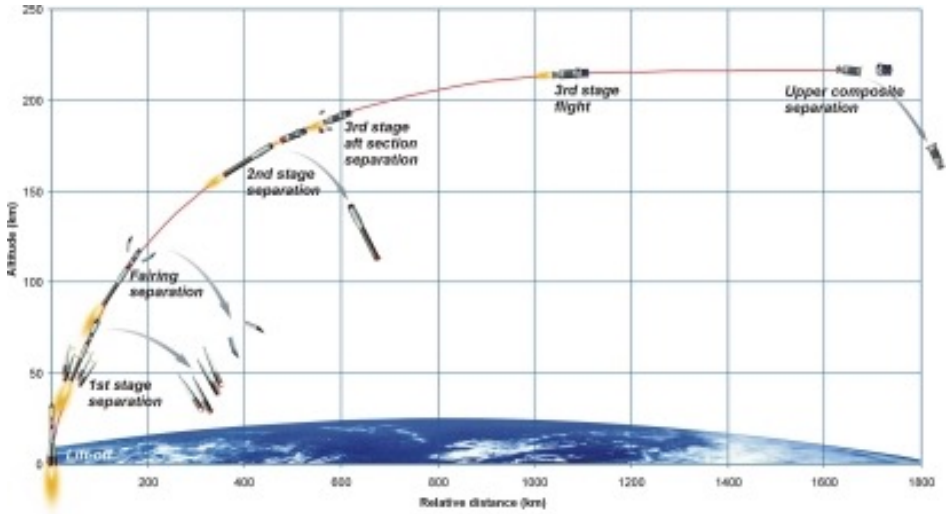


- Es necesario definir la órbita en el espacio 3D: 6 elementos orbitales
  - Excentricidad e
  - Semieje mayor a
  - Inclinación i: con respecto a la eclíptica en el Sistema Solar
  - Longitud del nodo ascendente Ω: ángulo de la línea de nodos
  - Argumento del perihelio ω
  - Anomalía verdadera v: posición del astro en un momento determinado

¿Qué vamos a ver?

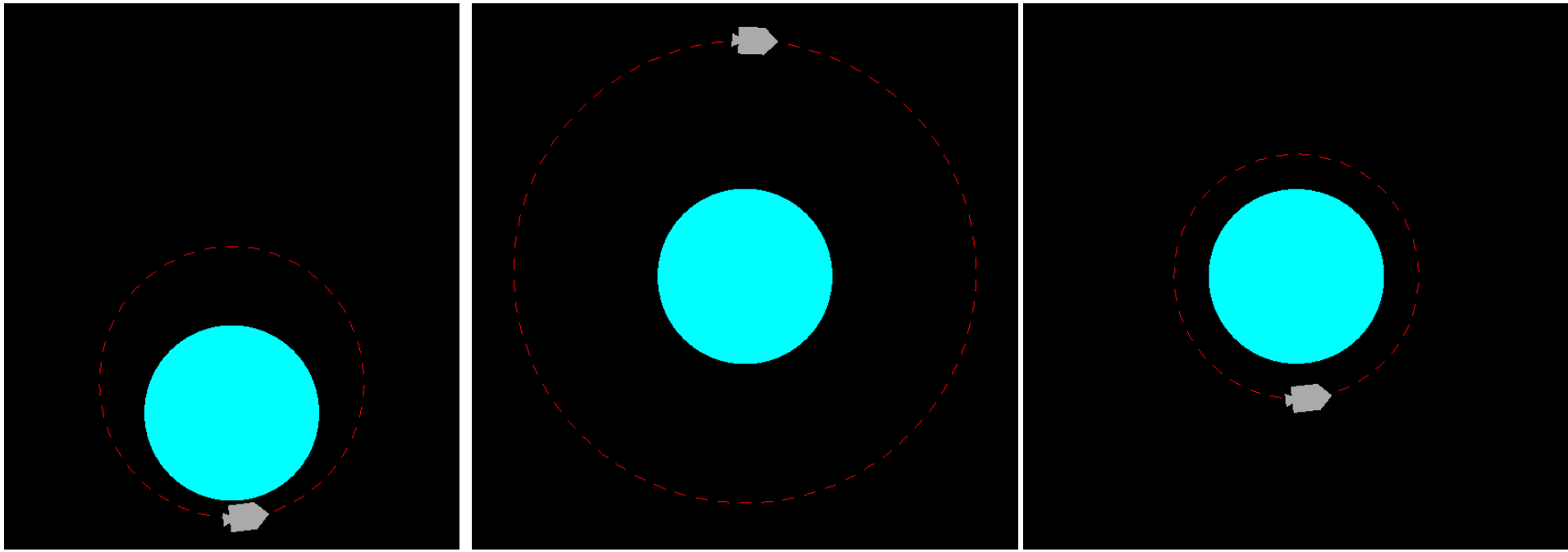
- Órbitas
- Aplicaciones
- Viajando por el espacio
  - Lanzamiento de satélites
  - Maniobras orbitales
  - Órbitas de Hohmann
  - Viajando entre planetas

Lanzamiento de un satélite



- Normalmente primero a una órbita circular de “aparcamiento”
- Al principio vertical y al final horizontal: $v_{final}=v_T$
  - Si altura h: $v_T^2/(R+h)=GM/(R+h)^2 \Rightarrow v_T=\sqrt{GM/(R+h)} < v_e$
- ¿Por qué se desprenden de las etapas?

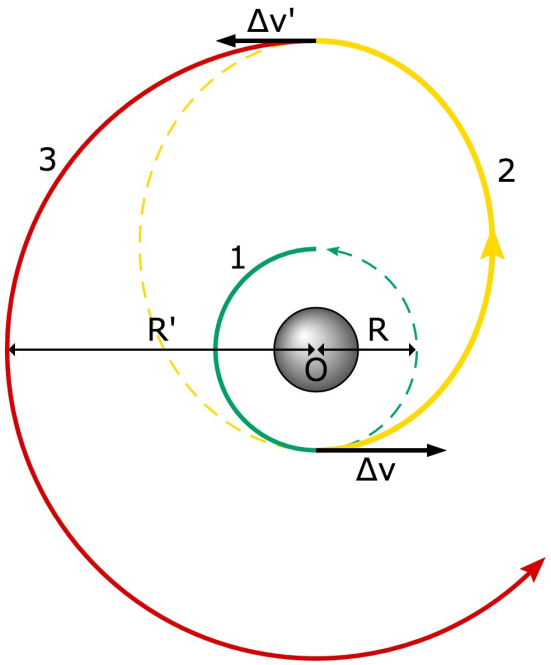
Maniobras orbitales

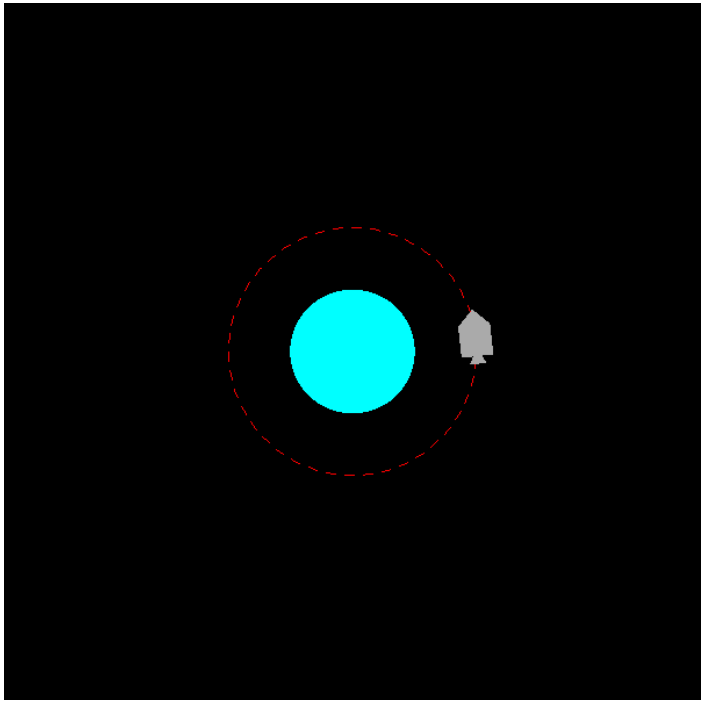


- Desde una órbita ¿cómo se va a otra? Cambio velocidad Δv
  - Si se aumenta velocidad: se cambia a órbita con mayor a
  - Si se disminuye velocidad: se cambia a órbita con menor a
  - Si se hace tangencialmente en apo/perigeo: se mantiene orientación
  - Si se hace en otra dirección: también se cambia orientación

http://www.physics.usyd.edu.au/~helenj/Planets/orbits.html

Órbitas de Hohmann





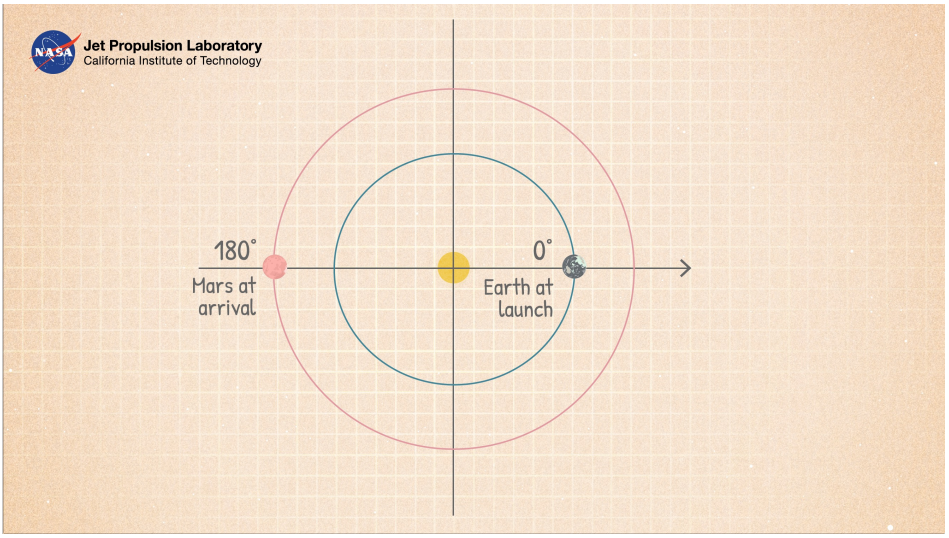
- Desde una órbita circular ¿cómo se va a otra más alta?
  - Uso de una elipse tangente a las órbitas inicial y final
  - Primera fase: en perigeo, encendido directo para entrar en elipse
  - Segunda fase: en apogeo, encendido directo para entrar en círculo
  - Órbita de Hohmann: la más eficiente

http://www.physics.usyd.edu.au/~helenj/Planets/orbits.html

Viajando entre planetas

- Usando órbita de Hohmann
  - Pero planeta tiene que estar allí cuando llegues:
    - Tardarás la mitad del periodo de la órbita elíptica en llegar
    - Tienes que estimar el tiempo de salida teniendo en cuenta este retraso
- Aproximación de cónicas:
  - Hohmann sólo buena aproximación entre planetas (Sol domina)
  - En esfera de influencia de planeta $r=a(m/M)^{2/5}$: hiperbólica
- En la práctica métodos numéricos precisos

Ejercicio: Misión a Marte



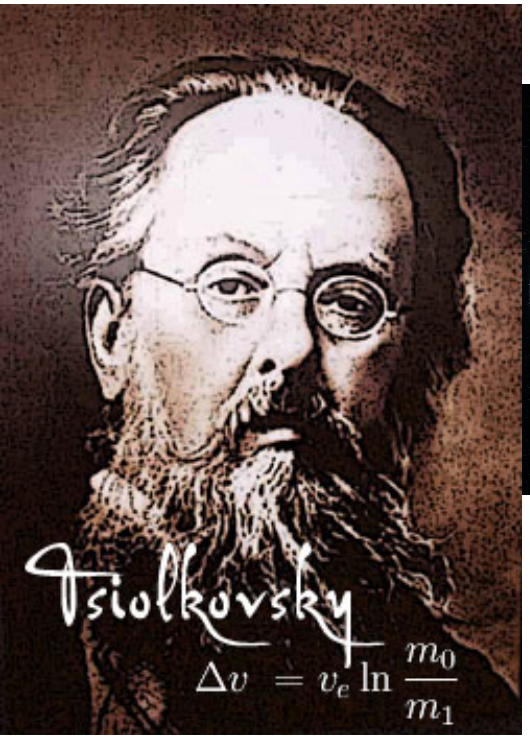
- Aproximaciones:
  - Tierra y Marte órbitas circulares (a=1 y 1.52UA, respectivamente)
  - Mismo plano orbital
- Usando órbita de Hohmann:
  - ¿Cómo estimas el semieje mayor a y el periodo T?
- Marte tiene que estar allí cuando llegues:
  - Tardarás la mitad del periodo de la órbita elíptica en llegar
  - Tienes que estimar la fecha de salida teniendo en cuenta este retraso

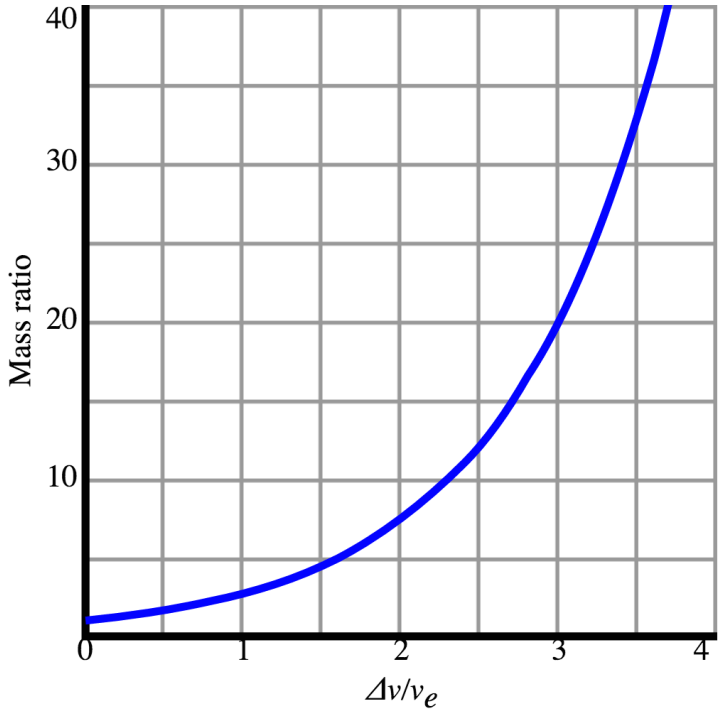
https://www.geogebra.org/m/p6gnnq5t
https://www.geogebra.org/m/ezhqjvmu
https://www.geogebra.org/m/vxct4y7u

¿Qué vamos a ver?

- Órbitas
- Aplicaciones
- Viajando por el espacio
  - Lanzamiento de satélites
  - Maniobras orbitales
  - Órbitas de Hohmann
  - Viajando entre planetas
  - Haciendo “trampas”
- El problema de tres cuerpos

(Ecuación del cohete)



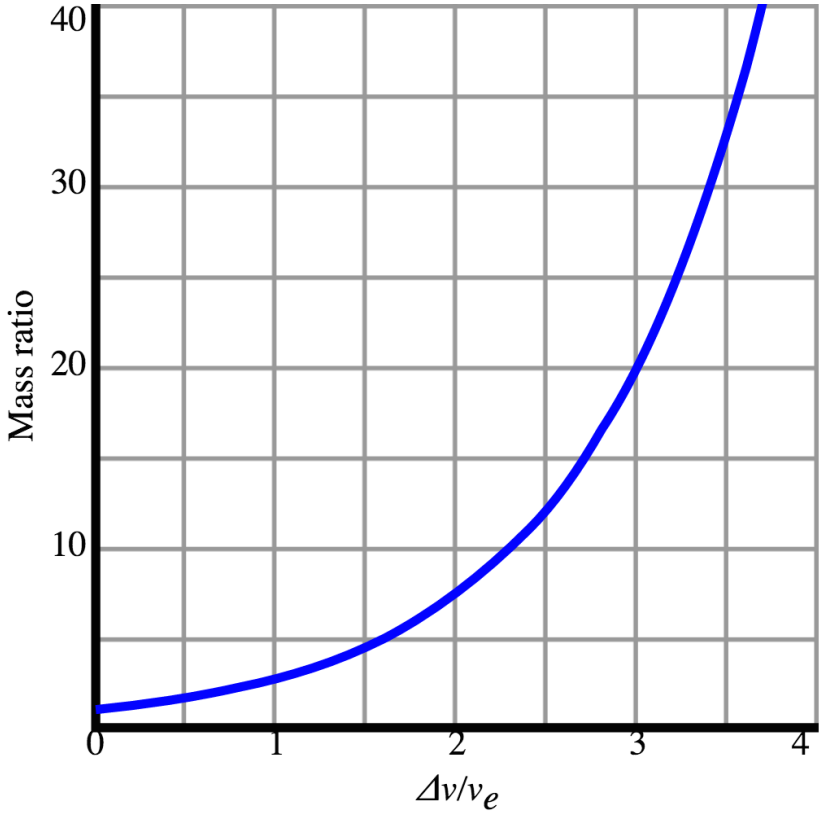


- Ecuación del cohete de Tsiolkowsky (1857-1935):

$$\Delta v = v_e \mathrm{Ln}(m_{ini}/m_{fin})$$

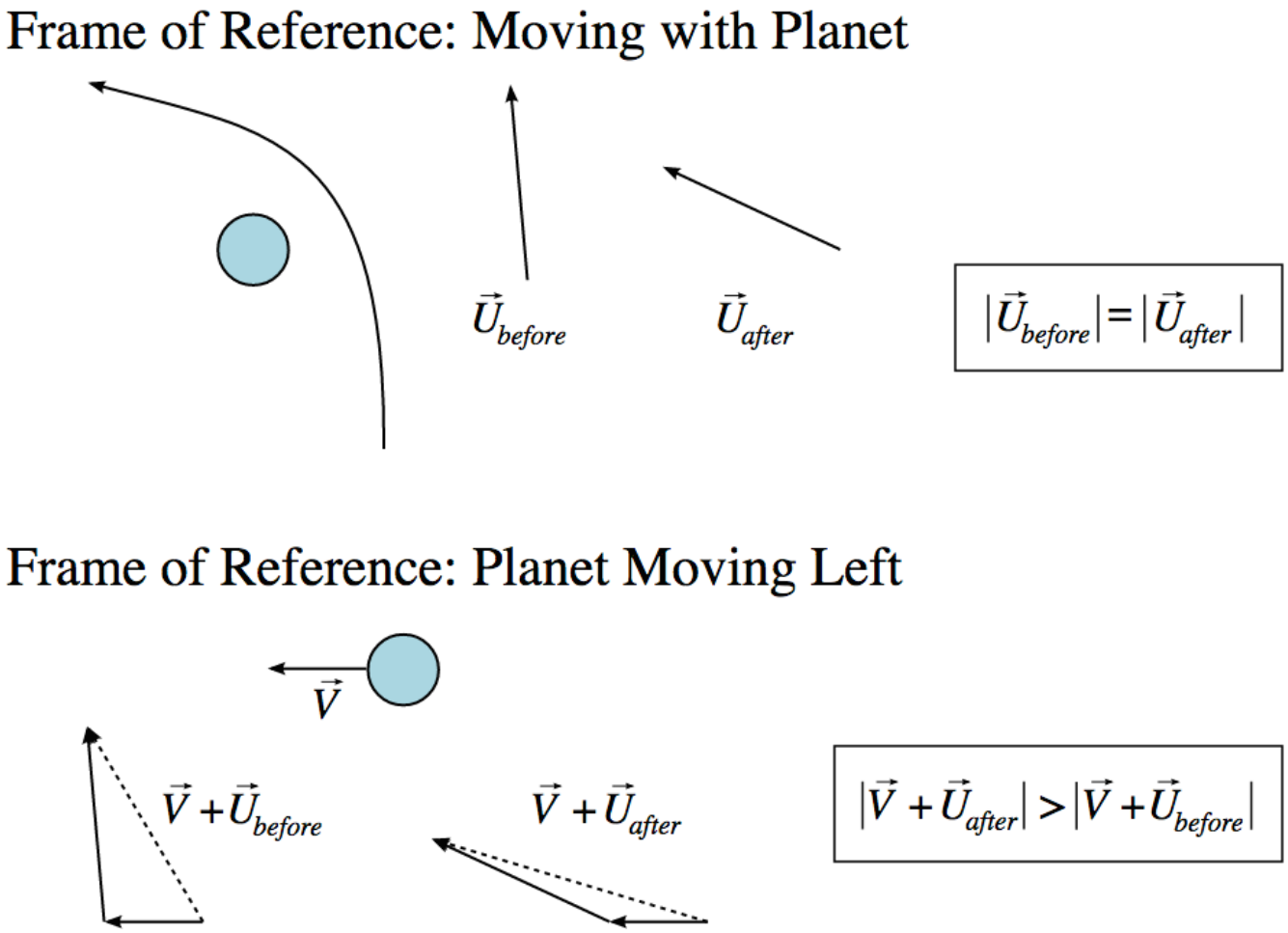
  - v_e: velocidad de salida efectiva de la tobera (conviene grande)
  - m_{ini} y m_{fin} masas inicial y final de la nave (m_{ini}-m_{fin} masa combustible)

Gasto de combustible



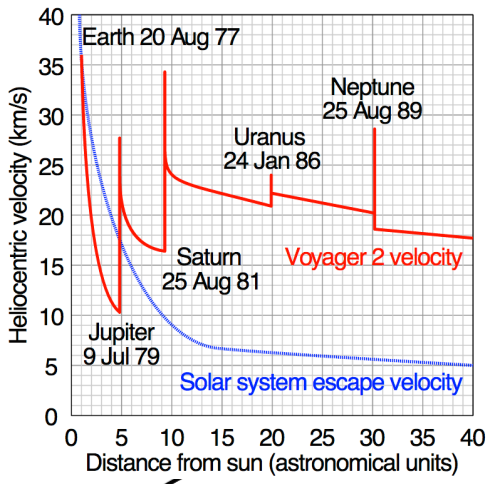
- Cada cambio de velocidad Δv hay que gastar combustible
  - Que hay que llevar hasta allí, gastando combustible...
  - Como es logarítmica: $\Delta v_1 + ... + \Delta v_N = v_e \mathrm{Ln}(m_{ini}/m_{fin})$
- Órbita de Hohmann: mínimos Δv tangenciales
  - Pero largos tiempos de vuelo (oxígeno, agua, alimentos...)
- Órbitas hiperbólicas: mínimos tiempos de vuelo
  - Pero grandes Δv radiales y tangenciales

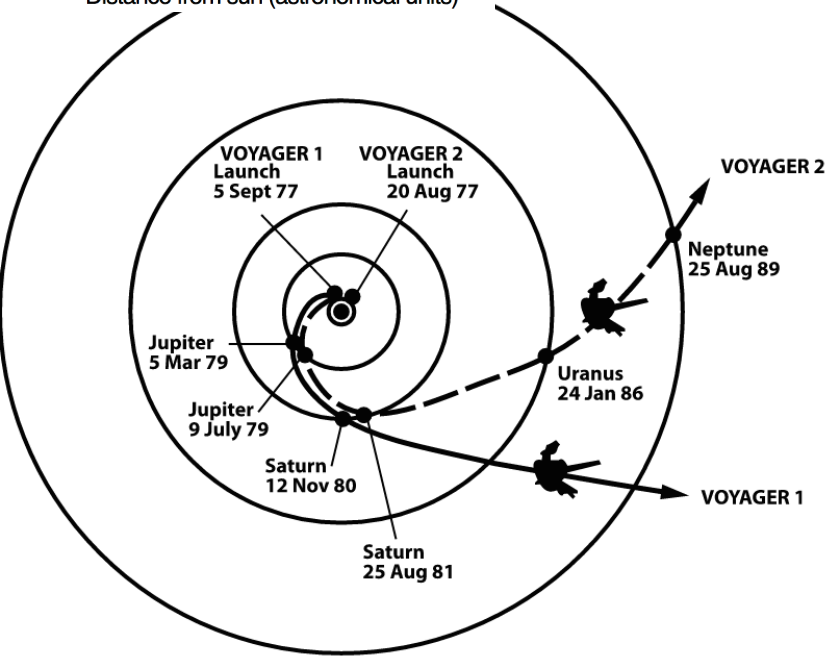
Asistencia gravitatoria I

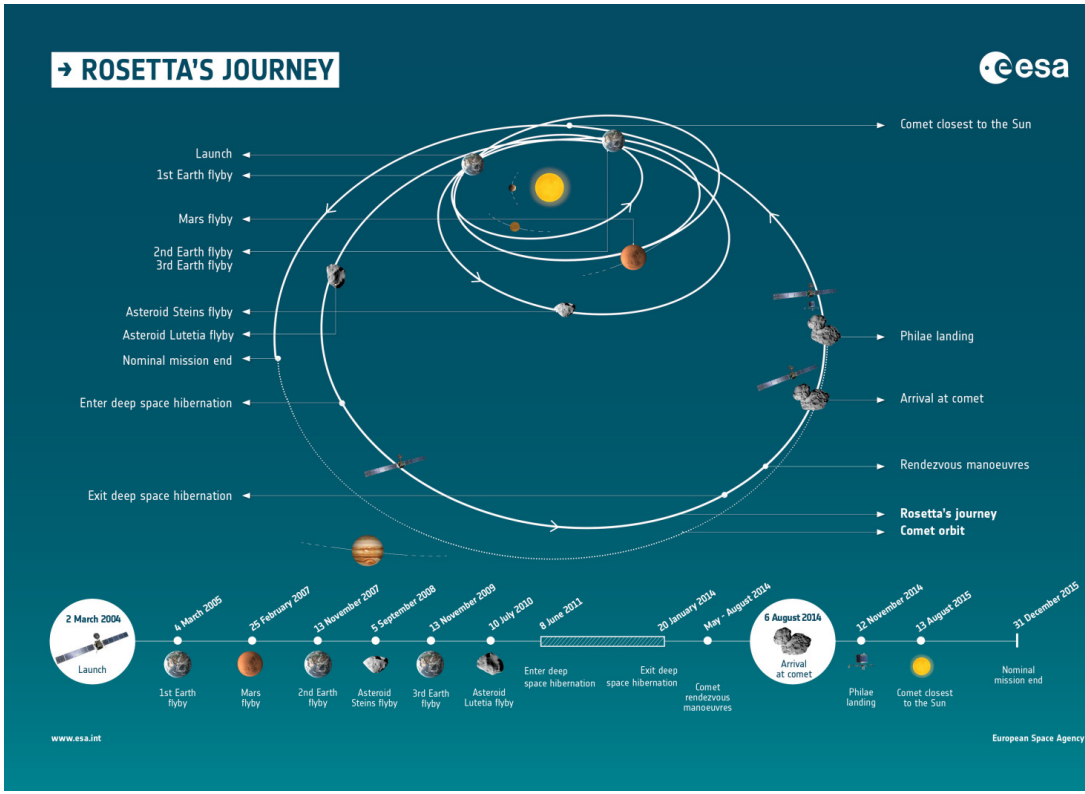


- Se pasa cerca de otro planeta en el camino: *fly-by*
  - Se “usa” parte de su momento lineal
  - Permite acelerar, frenar, cambiar dirección e incluso plano órbita

Asistencia gravitatoria II

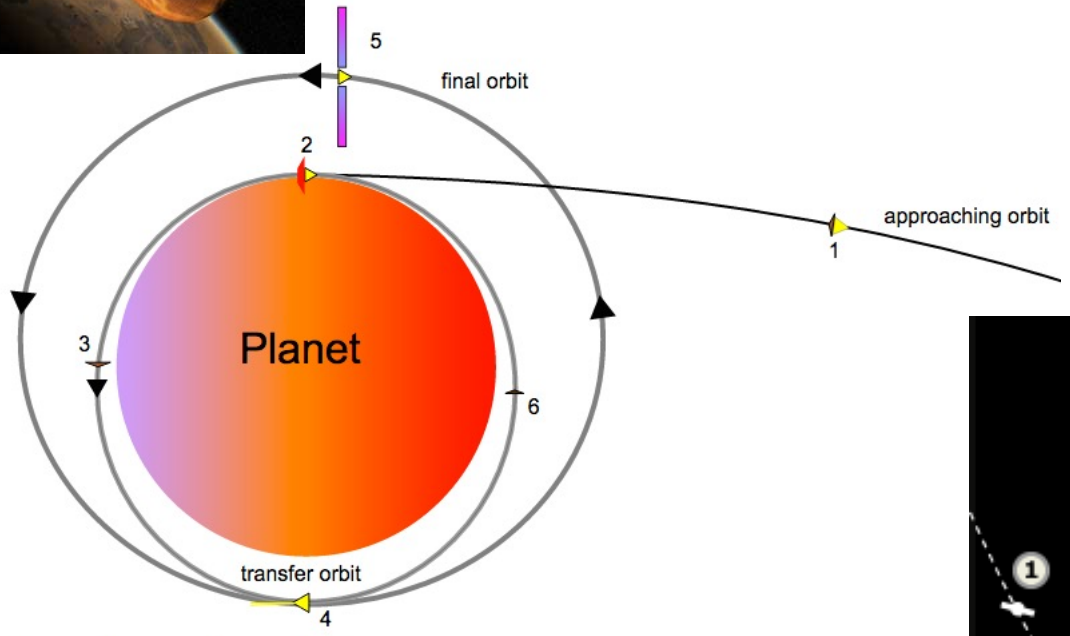




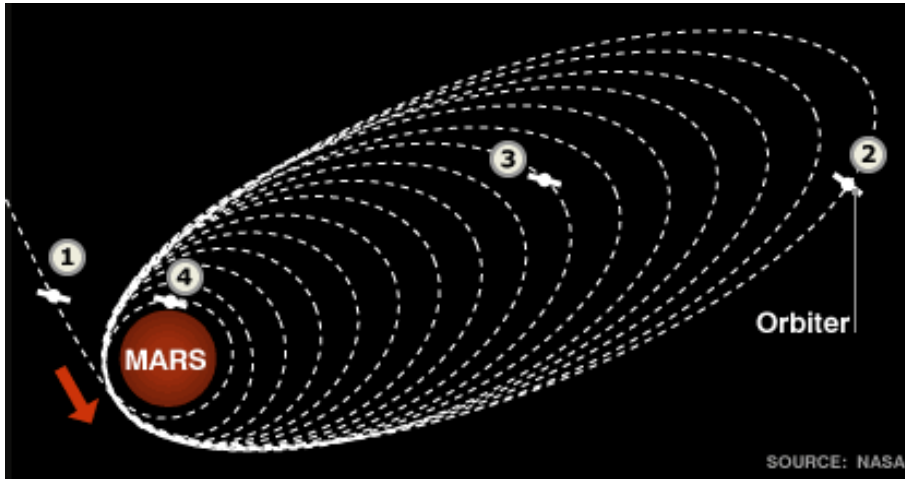


- Pero requiere:
  - Alineación: “grand tour” de las Voyager
  - Mucho tiempo: repetidos *fly-bys* con ganancias sucesivas de velocidad

Aerocaptura y aerofrenado



1. Space probe approaches the planet
2. Aerocapture
3. Space probe throw off (on transfer orbit) the heat shield
4. Orbit rise
5. Space probe is in final orbit
6. Heat shield remains in transfer orbit and falls



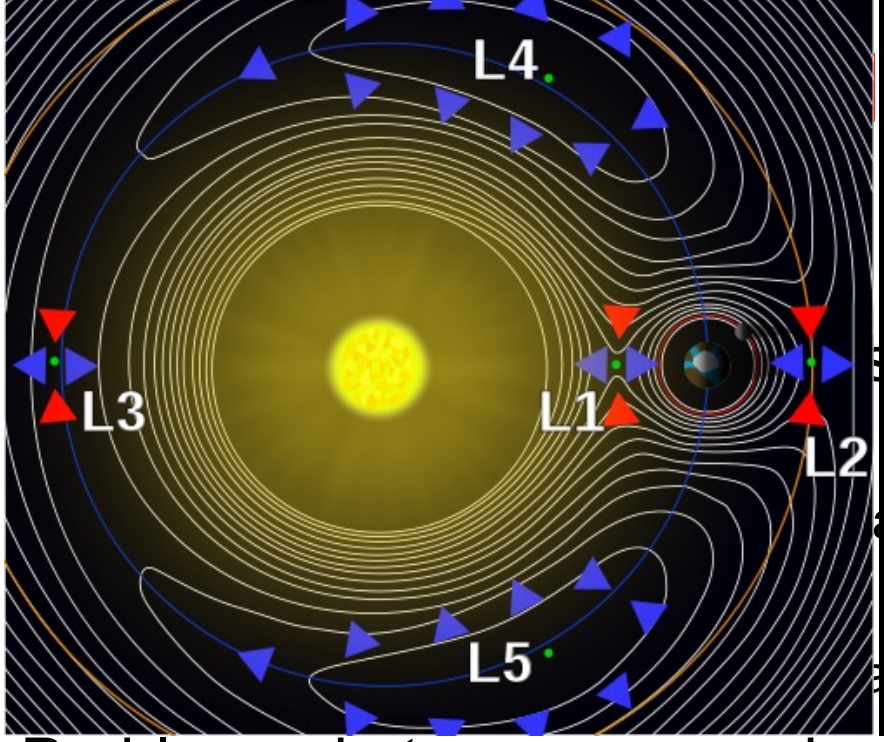
- Uso de las atmósferas planetarias para ser capturado:
  - Requiere un escudo térmico que también representa masa
  - Y un cálculo muy preciso para no quemarse o salir rebotado (no usado)
- También usado para reducir apogeo: aerofrenado
  - Requiere pasos sucesivos: lento pero seguro

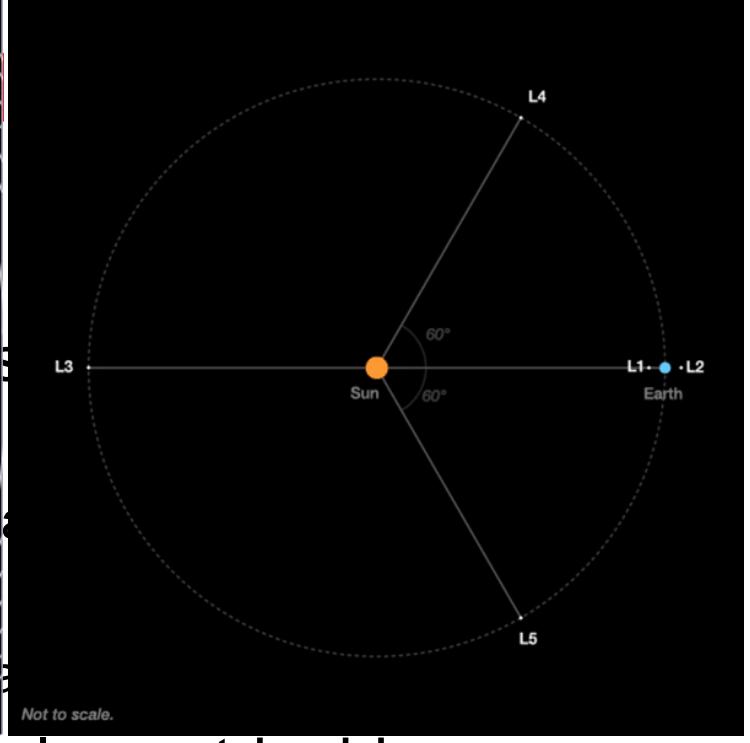
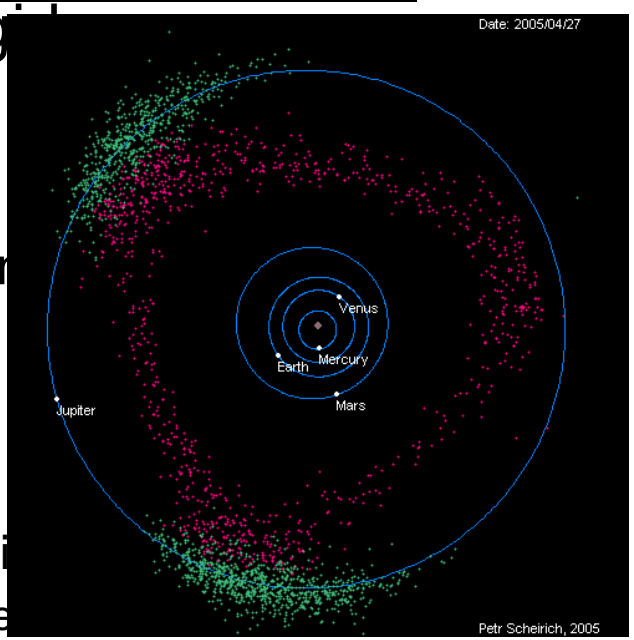
¿Qué vamos a ver?

- Órbitas
- Aplicaciones
- Viajando por el espacio
- El problema de tres cuerpos

El problema de tres cuerpos

- Tres cuerpos moviéndose en su potencial gravitatorio común:
  - Cantidades conservadas: energía, momento angular
  - CM movimiento linear uniforme
  - NO hay solución analítica general
- Problema de tres cuerpos circular restringido:
  - Dos cuerpos moviéndose en órbitas circulares en torno a su CM
  - Tercero en potencial de estos dos
  - Sistema de referencia en rotación uniforme con eje a lo largo línea cuerpos
  - Puntos de Lagrange:
    - Equilibrio de fuerza gravitatoria y “centrífuga”
    - Posición “constante” en este sistema de referencia
      - De importancia para satélites, observatorios, estrellas binarias...





- Problema de tres cuerpos circular restring
  - Dos cuerpos moviéndose en órbitas circulares
  - Tercero en potencial de estos dos
  - Sistema de referencia en rotación uniforme co cuerpos
  - Puntos de Lagrange:
    - Equilibrio de fuerza gravitatoria y “centrífuga”
    - Posición “constante” en este sistema de referenci
      - De importancia para satélites, observatorios, estre