MATEMÁTICAS DE LA LÓGICA
Y
LA LÓGICA DE LAS MATEMÁTICAS

Carmen Espeso, Ujué Rodríguez, Elena Alvarez , Daniel Sadornil

ESTALMAT CANTABRIA

A la memoria de Isabel Gómez Velarde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \\ -x \end{bmatrix}$$

Índice

Lógica proposicional

Proposiciones y operaciones lógicas.

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas.

p: La tierra es plana.
q: -17 + 38 = 21
r: x > y-9
s: El Racing será campeón de liga.
t: Hola ¿cómo estás?
w: Lava el coche por favor.

Conectivos lógicos y proposiciones compuestas.

Operador "y", $\wedge$

Conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero.

Operador "o", $\vee$

Se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera.

Operador "no", $\neg, -, ´$

Niega la proposición. Si una proposición es verdadera y se le aplica se obtendrá su complemento o negación (falso) y recíprocamente.

Operador "condicional", $\rightarrow$

Intenta ser la versión formal del condicional en el lenguaje natural, **Si ….. entonces…..** Es falsa cuando la primera proposición es verdadera pero la segunda es falsa.

Operador "bicondicional" (equivalencia), $\leftrightarrow$

Su función es conectar dos proposiciones, será verdadera únicamente cuando ambas sean verdaderas o ambas sean falsas.

TABLAS DE VERDAD

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Una proposición es una tautología cuando siempre toma el valor verdadero, contradicción si siempre es falsa.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$(p \wedge q) \wedge \left(\overline{p \vee q}\right)$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{p})$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{p}) \Leftrightarrow q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0

Una equivalencia lógica es una proposición bicondicional que es una tautología.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow \overline{q}$	$q \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \overline{p})$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Expresa simbólicamente las proposiciones siguientes:

a) Juan es estudiante o Pedro no es músico.
b) Si Pedro es músico, entonces Juan es estudiante.
d) Ni Juan es estudiante, ni Pedro es músico.
e) Tan cierto es que Pedro es músico, como que Juan es estudiante.

f) Cuando me deprimo, como níscalos y arenques.
g) Cuando como arenques, tengo sed y frío.
h) Tanto si tengo frío como si tengo sed, en ambos casos, como galletas.
i) Cuando como galletas, si tengo sed, no como arenques.

Simplificación de proposiciones compuestas

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$	$\overline{\left(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}\right)}$	$(p \wedge q)$	$\overline{\left(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}\right)} \vee (p \wedge q)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0

a) Aurora, Beatriz y Claudia van con frecuencia a la cafetería y cada una de ellas pide siempre café o té. Si Aurora pide café, entonces Beatriz pide lo mismo que Claudia. Si Beatriz pide café, Aurora pide lo contrario que Claudia. Si Claudia pide té, Aurora pide lo mismo que Beatriz. Simplificar lo más posible la expresión que permite al camarero servir a las tres alumnas.

b) En la ciudad de la ilusión hay dos bancos BCR y BAR propiedad de Crediticio y Ahorricio. Ahorricio sabe que si Crediticio desea retirarse del mundo de los negocios nombrará presidente del banco a su hijo o venderá el banco. También sabe que si Crediticio necesita dinero vende el banco o le pide prestado. A Ahorricio le consta que Crediticio no vendió el banco ni nombró presidente del banco a su hijo ni pidió dinero prestado. Por tanto sacó la conclusión de que Crediticio no desea retirarse del mundo de los negocios ni necesita dinero. ¿Es cierta la conclusión sacada por Ahorricio?

DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Ley de no contradicción : $-(A \wedge -A)$

Ley del tercio excluso : $A \vee -A$

Método de demostración por contraposición:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

Método de demostración por reducción al absurdo:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \left[(A \wedge \overline{B}) \Rightarrow (P \wedge \overline{P})\right]$$

1. Sea n un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces n es par.
2. Si p es primo, entonces p=2 o es de la forma p=4k+1 para algún k, o es de la forma p=4k+3 para algún k.
3. Si $\sqrt{2}$ es un número, entonces es irracional.
4. Si n es múltiplo de 10, entonces el resto de dividir n entre 6 es distinto de 3.

Lógica aristotélica y silogismos

- El silogismo, tal como lo define Aristóteles, se compone de dos enunciados, llamados ***premisas*** y otro enunciado llamado ***conclusión***.

$$P \text{ y } P \longrightarrow C$$

- La primera premisa es la *premisa mayor* y la segunda premisa es la *premisa menor*.
- Cada uno de los enunciados puede variar según la **cantidad** y la **cualidad**; esto es, puede ser *universal* o *particular* y *afirmativo* o *negativo.*

	Universal	Particular
Afirmativo	A	I
Negativo	E	O

Ejemplos de enunciados

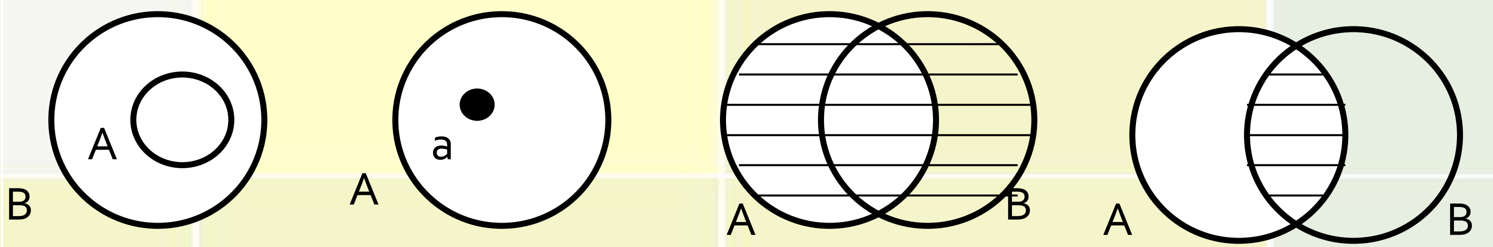
- Todos los pájaros tienen alas (A)
- Ningún pájaro tiene tres patas (E)
- Algún pájaro es verde (I)
- Algún pájaro no vuela (O)

Nota: El predicado de una afirmación siempre tiene extensión particular, y el predicado de una negación está tomado en su extensión universal.

En la primera tener alas es particular y en la segunda tener tres patas es universal

Teoría de Conjuntos

- Nociones de conjunto, subconjunto, conjunto vacío, elemento de un conjunto, unión e intersección de conjuntos, complementario de un conjunto, así como los diagramas de Venn y los símbolos $\varnothing$, $\subset$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\in$ y $\notin$



$A \subset B$ $a \in A$ $A \cup B$ $A \cap B$

¿Es correcto? (Si/No, ¿Por qué?)

Todo año bisiesto es múltiplo de cuatro
2100 es múltiplo de 4,
luego 2100 es bisiesto.

Los mexicanos hablan español,
algunos europeos hablan español,
luego algunos europeos
no son mexicanos.

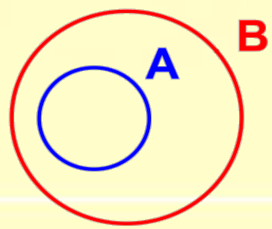
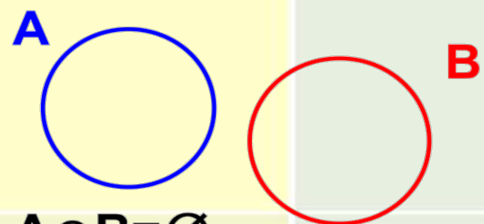
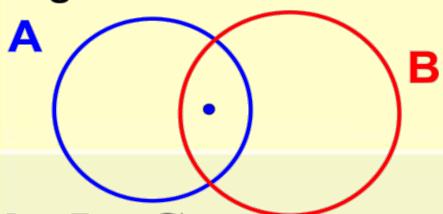
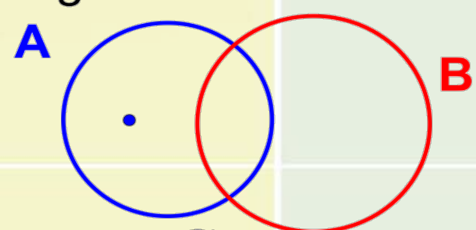
Algunos animales son aves,
todos los animales se reproducen,
luego todas las aves se reproducen.

Algún zoológico no es parque,
ningún hospital es zoológico,
luego algún hospital no es parque.

Las arañas tienen ocho patas
mi gato araña
luego mi gato tiene ocho patas

Algunos ratones son objetos inalámbricos
algunos objetos inalámbricos son auriculares
luego algunos ratones son auriculares.

Enunciados y conjuntos

Universal afirmativo	Todo A es B $A \subset B$ 	Universal negativo	Ningún A es B  $A \cap B = \emptyset$
Particular afirmativo	Algún A es B  $A \cap B \neq \emptyset$	Particular negativo	Algún A no es B  $A \cap B^c \neq \emptyset$

Silogismos: las cuatro figuras

- Cada uno de los tres enunciados consta de **dos *términos***.
- Las premisas contienen un **término común a ambas**, llamado ***término medio***.
- La **conclusión** se compone del **término no común** de la segunda de ellas (como ***sujeto***) y del término no común de la primera (como ***predicado***), desapareciendo el término medio.
- Según el lugar que ocupa el término medio, se distinguen **cuatro figuras** posibles de silogismo.

1ª FIGURA	2ª FIGURA	3ª FIGURA	4ª FIGURA	
M P	P M	M P	P M	Premisa mayor
S M	S M	M S	M S	Premisa menor
S P	S P	S P	S P	Conclusión

- 3 enunciados
- 4 tipos de para cada uno. TOTAL: $4 \cdot 4^3 = 256$
- 4 figuras

REGLAS

1. De dos premisas negativas no puede obtenerse conclusión.
2. De dos premisas afirmativas no puede sacarse una conclusión negativa.
3. La conclusión siempre sigue la peor parte. Entendiendo por peor parte, la negativa respecto a la afirmativa y lo particular respecto a lo universal.
4. De dos premisas particulares no se saca conclusión.
5. Los términos no deben tener mayor extensión en la conclusión que en las premisas.
6. El término medio ha de tomarse en su extensión por lo menos en una de las premisas.

TALLER

- Se distribuyen los alumnos en grupos de entre tres y cinco personas
- A cada grupo se le proporcionan tres cordeles y tres fichas de tres colores
- Se les proporciona una tabla con los 19 silogismos posibles en los que se ve de qué figura es cada uno y qué cantidad y calidad tiene cada una de las premisas
- Se les pide determinar, aplicando lo aprendido en la sesión, la cantidad y calidad de cada una de las conclusiones.

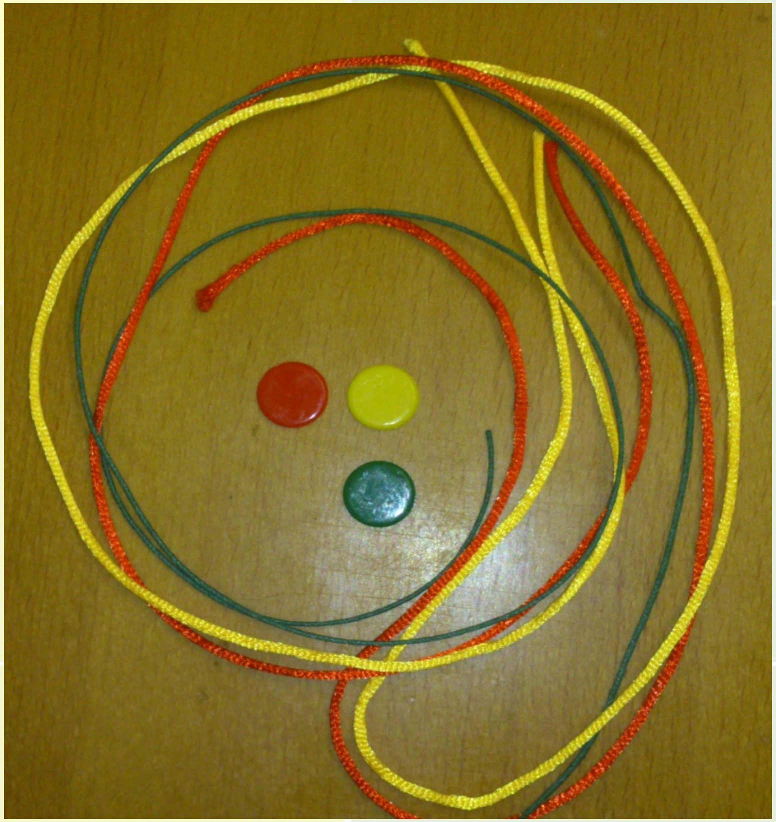
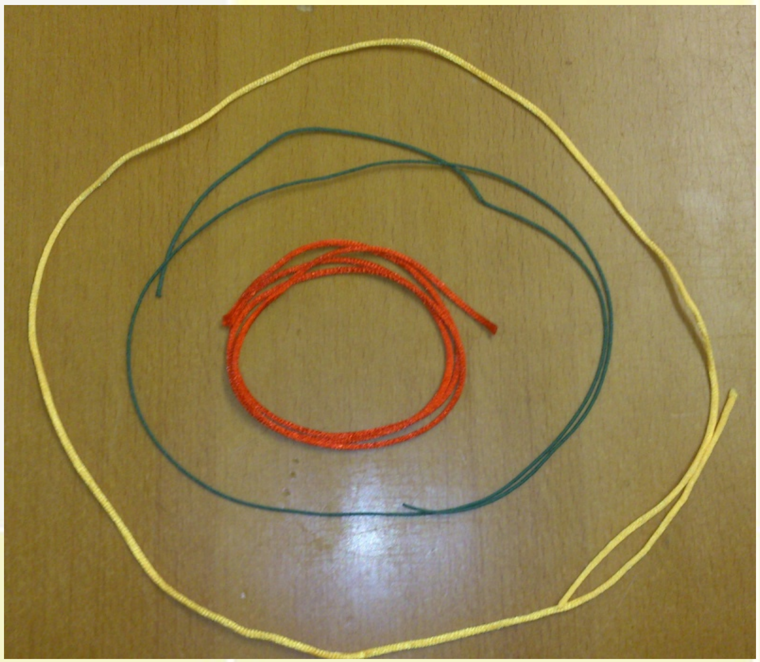
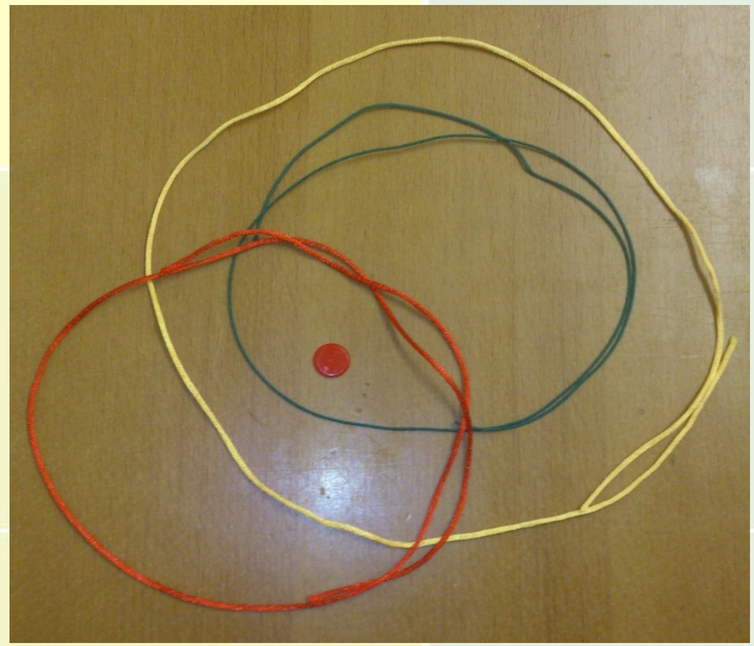


TABLA DE SILOGISMOS	BARBAR_	CELAR_NT	DARI_	FERI_
CESAR_	CAMESTR_S	FESTIN_	BAROC_	DISAM_S
DATIS_	BOCARD_	FERIS_N	DARAPT_	FELAPT_N
BAMAL_P	CALEM_S	DIMAT_S	FRESIS_N	FESAP_

Ejemplos: Sujeto Predicado Término Medio

BARBARA	DARII
	

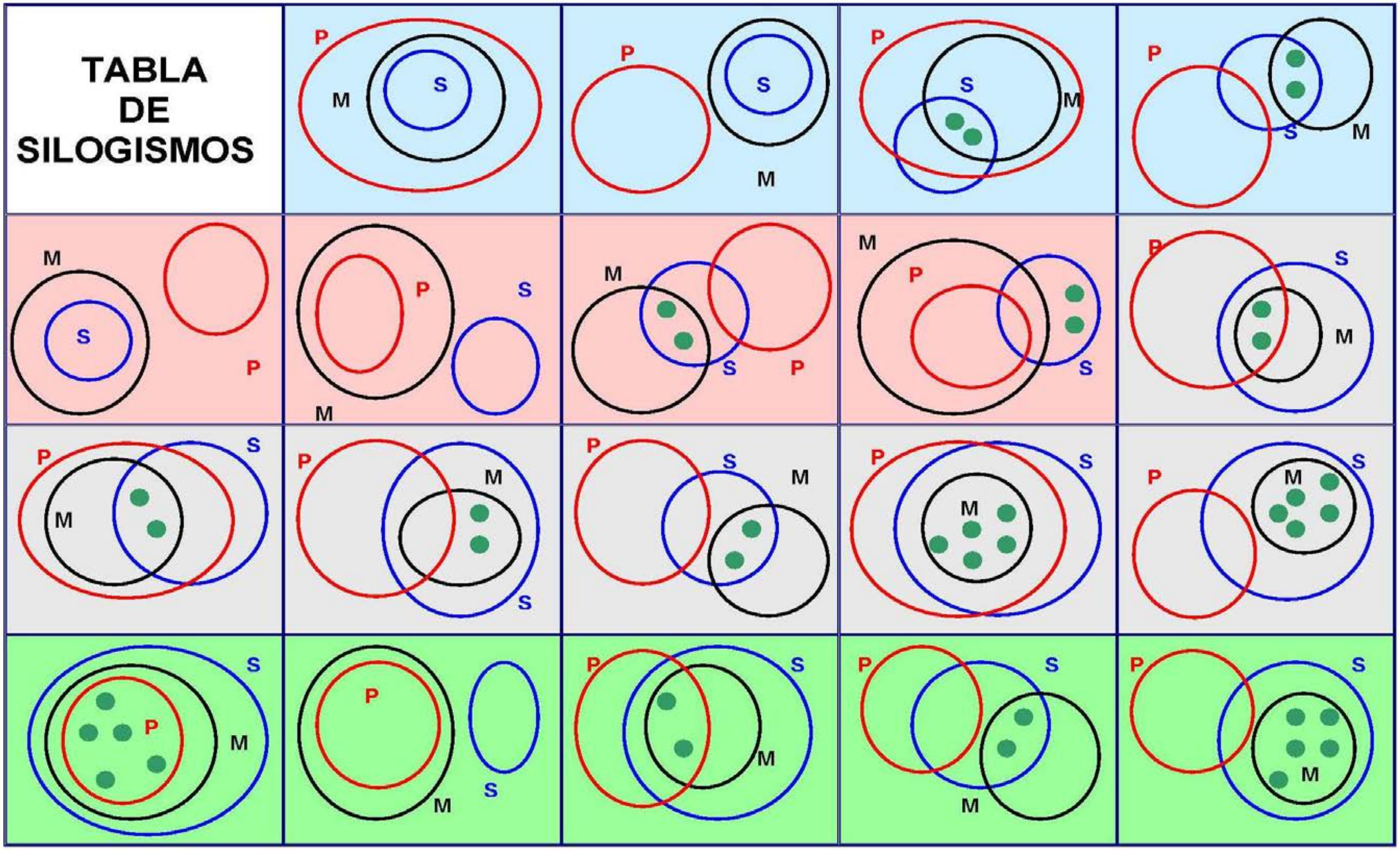


TABLA
DE
SILOGISMOS

3 Lógica difusa con Geogebra

Introducción

- ¿Qué figura se representa en las siguientes imágenes?

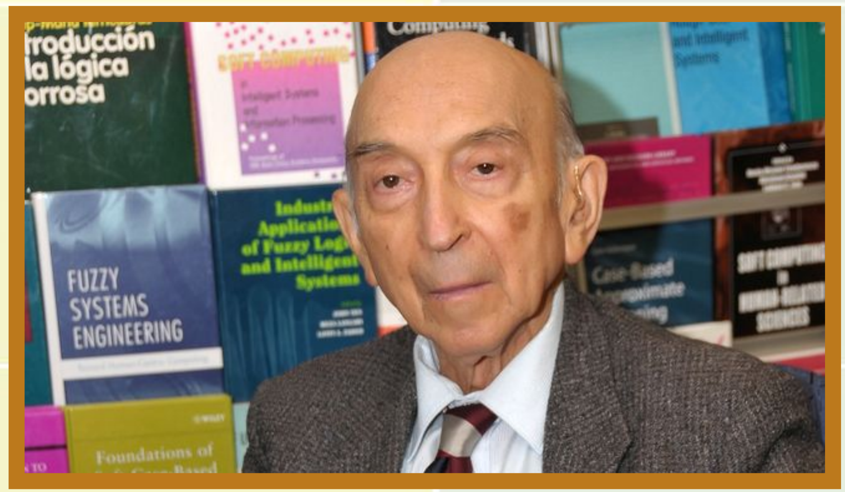
- Si una persona mide 1'80 metros, ¿es **alta**?
- ¿Qué cantidad de dinero hay que tener para considerar que una persona es **rica**?
- ¿Qué significa **levantar el pie ligeramente** del embrague?
- ¿Qué temperatura debe haber para definir la **sensación de frío**?

3 Lógica difusa con Geogebra

Introducción

- Sesión completa
  - Duración: 2 horas y media
  - Alumnos veteranos
  - Trabajan de forma individual y se pone en común los resultados

- Desarrollo
  - Parte I. Conjuntos difusos
  - Parte II. Lógica difusa

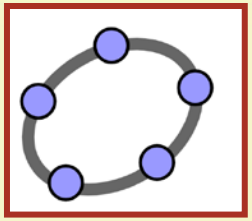


La lógica clásica es como quien va a una fiesta vestido con un traje negro, una camisa blanca almidonada, una corbata negra, zapatos lustrosos, etcétera. Y la lógica borrosa es un poco como quien va vestido informalmente con vaqueros, camiseta y zapatillas. En el pasado esta ropa informal no habría sido aceptable. Hoy es la otra manera que hay de vestir
Zadeh, 1984

3 Lógica difusa con Geogebra

- ¿Se pueden definir estos conceptos de forma "clásica"?
- ¿Tiene sentido trabajar con estos conceptos?
- ¿Qué es un conjunto difuso?

  Mientras que en la teoría clásica se define la pertenencia de los distintos elementos a un conjunto haciéndoles corresponder el valor 1 si pertenecen y cero si no, en un conjunto difuso se ha de definir una función que asocie el grado de pertenencia al conjunto.
- Se practica con algunos ejemplos



3 Lógica difusa con Geogebra

Parte I. Conjuntos difusos

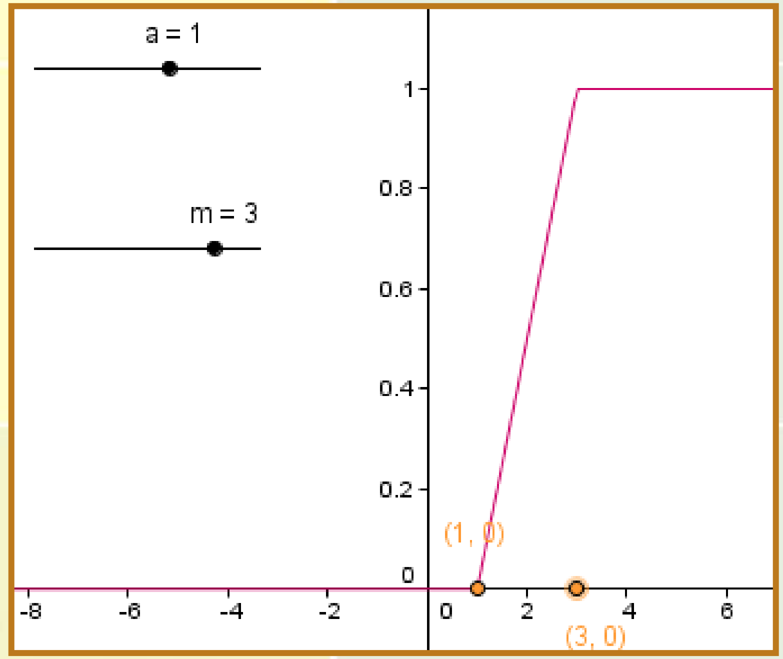
- Números mucho mayores que 1

La función PERTENECE(x) deberá:

a) ser creciente

b) ser nula hasta poco después de 1

c) crecer pegada al eje de abscisas y no despegar de él hasta un lugar a convenir a partir del cual el crecimiento sea más rápido hasta llegar a otro lugar, también a convenir, en el que a partir de él valdrá 1.



$$\mathrm{PERTENECE}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x \le m \\ 1 & \text{si } x > m \end{cases}$$

Se construye con Geogebra la función de pertenencia

3 Lógica difusa con Geogebra

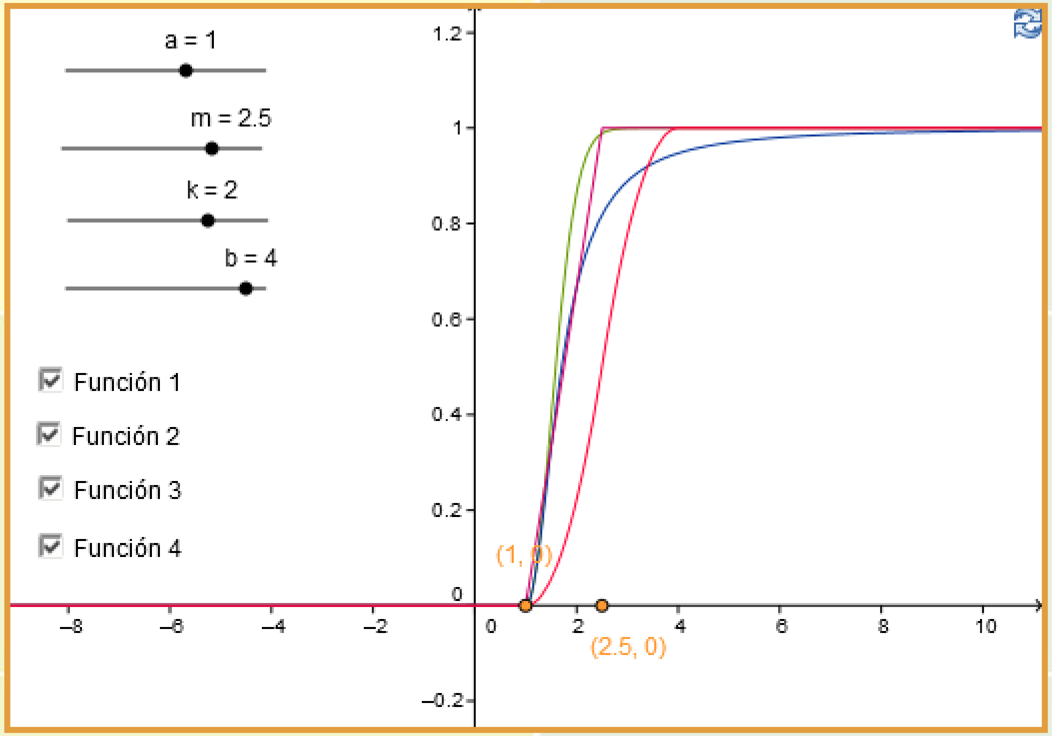
- Números mucho mayores que 1

¿Hay otras posibilidades?

$$\text{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x>a\end{cases}$$

$$\text{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{si } a<x\end{cases}$$

$$\text{PERTENECE}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{si } a<x\le m\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{si } m<x<b\\ 1 & \text{si } x\ge b\end{cases}$$



Se muestran las funciones viendo como influyen los parámetros

3 Lógica difusa con Geogebra

Parte I. Conjuntos difusos

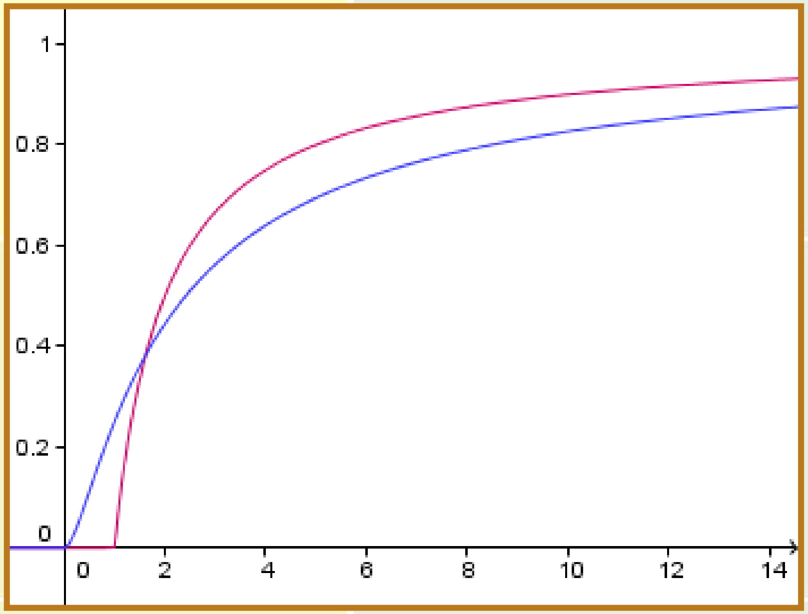
- Números próximos a cero

$$\text{PROXIMO}(x) = \frac{1}{1 + k(x-a)^2}$$

- Número natural grande

Se proponen distintas funciones de pertenencia

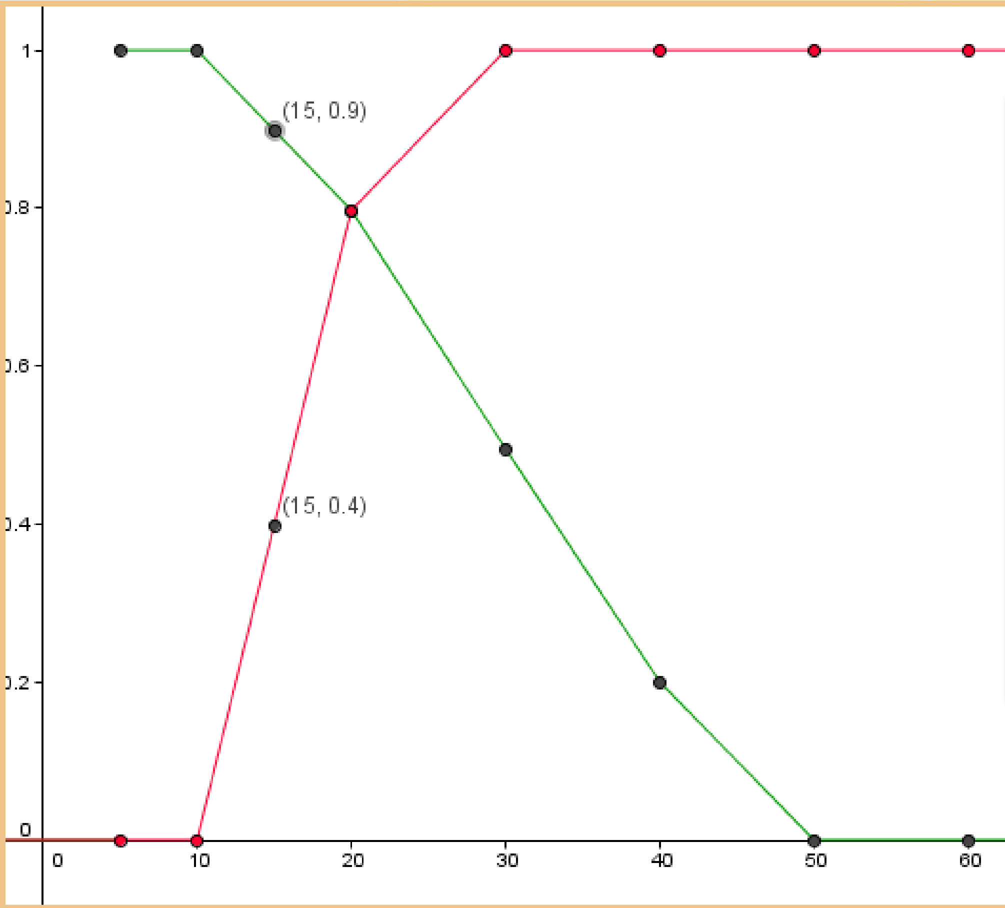
$$\text{GRANDE}(n) = 1 - \frac{1}{n}$$



Se comprueba que con las definiciones que se han propuesto se puede deducir resultados.
Si n es mayor que m y m es grande entonces n también lo es

Operaciones entre conjuntos difusos

Se definen como extensión de las definidas entre conjuntos clásicos



Elementos (Edad)	Bebé	Joven	Adulto	Viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Se construye una función de pertenencia poligonal (suma de funciones a trozos)

Operaciones

Unión

- La unión difusa debe generalizar la unión clásica.
- Debe ser simétrica en el orden en el que se unen los conjuntos.
- Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
- La unión de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Intersección

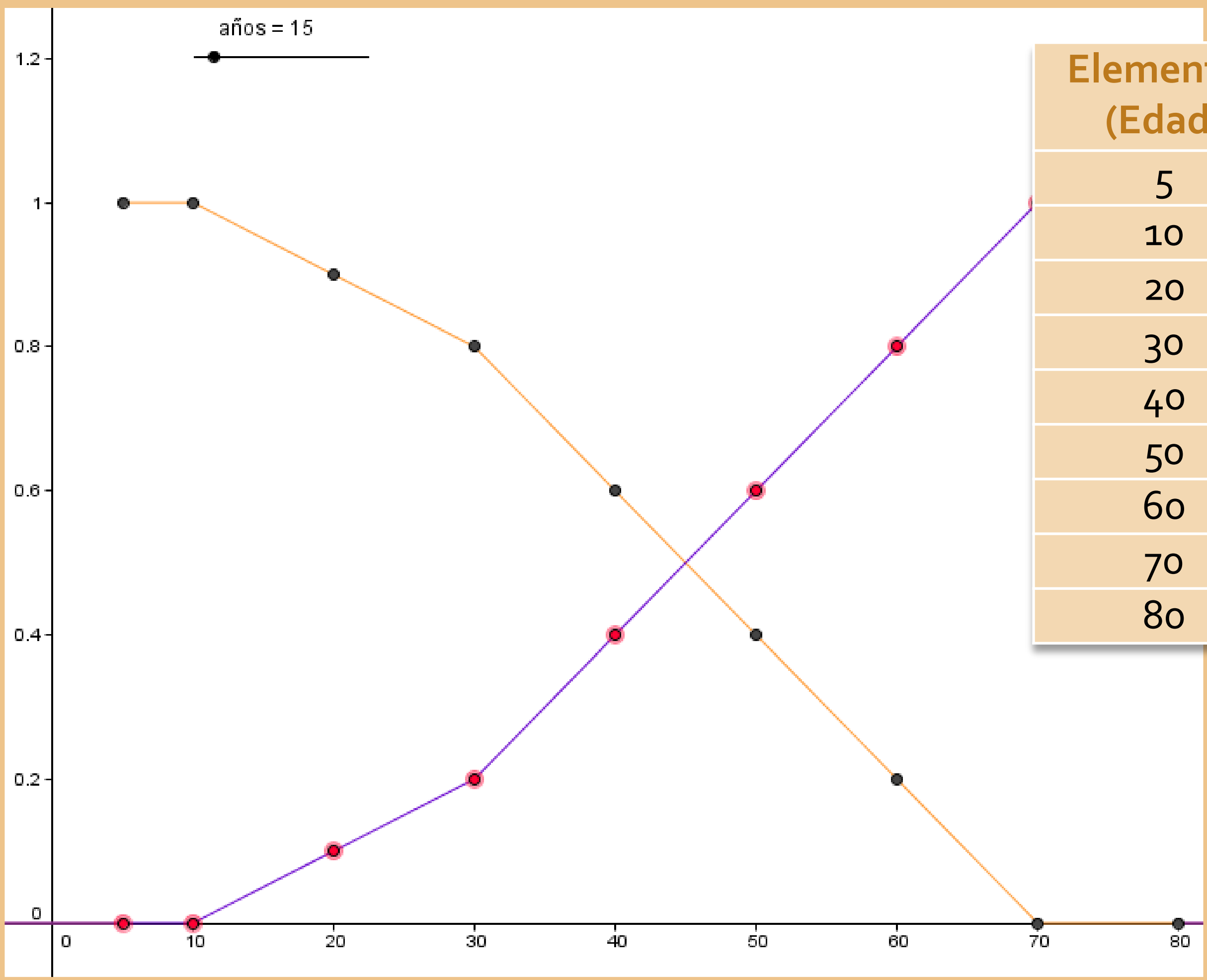
- La intersección difusa debe generalizar la intersección clásica.
- Debe ser simétrica en el orden en el que se intersequen los conjuntos.
- Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
- La intersección de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

3 Lógica difusa con Geogebra

Operaciones

Subconjunto, Complementario, unión , intersección



Elementos (Edad)	Bebé	Joven	Adulto	Viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Relaciones entre conjuntos

Relación clásica

$$
\begin{array}{c} \\ \text{dólar} \\ \text{libra} \\ \text{franco} \\ \text{marco} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{EEUU} & \text{Francia} & \text{Canada} & \text{Gran Bretaña} & \text{España} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Inglés

Relación difusa

estaciones frías={(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}
sensación de frío ={(T1, 0.4), (T2, 0.8)}

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} &
\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$A\tilde{\tilde{x}}B = \left\{ \left(a, b, \min\left(\mu_A(a), \mu_B(b) \right) \right) / a \in U, b \in V \right\}$$

Composición de relaciones difusas

Relación R

$$
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Relación S

$$
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{ccc} \text{bañador} & \text{traje} & \text{abrigo} \end{array} \\
\begin{array}{l} T1 \\ T2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

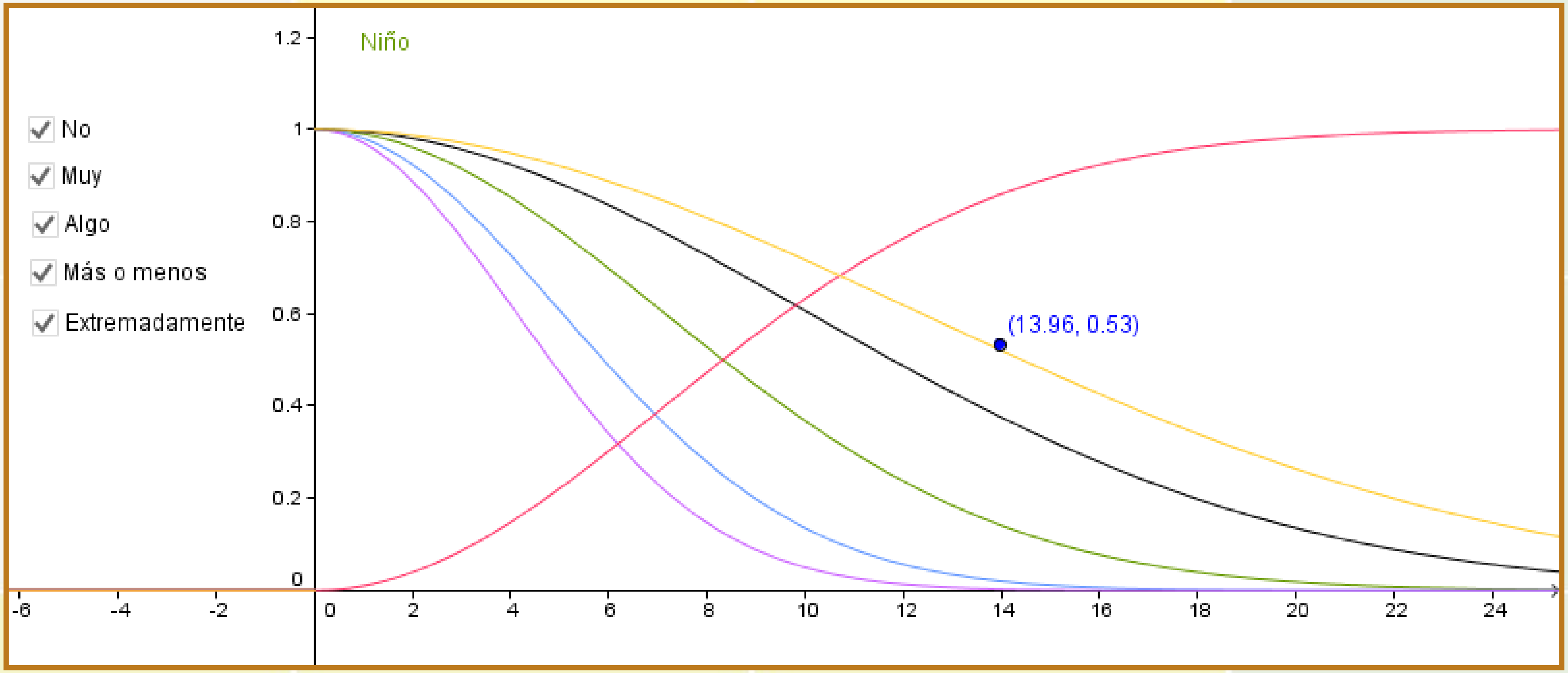
$$
\longrightarrow
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{ccc} \text{bañador} & \text{traje} & \text{abrigo} \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\mu_{S\circ R}(u,w) = \max_{v\in V}\left(\min\left(\mu_R(u,v),\mu_S(v,w)\right)\right)$$

3 Lógica difusa con Geogebra

Valores de verdad

Casi cierto, muy cierto, algo falso…



Juan tiene 14 años. Valores de verdad:

Juan no es niño, Juan es muy niño, Juan es algo niño, Juan es más o menos niño…

Reglas difusas

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Conjunto	Definición
estaciones frías	{(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}
sensación de frío	{(T1, 0.4), (T2, 0.8)}
sensación de no frío	{(T1, 0.6), (T2, 0.2)}

Identificar el valor de verdad de esta regla como un conjunto difuso

3 Lógica difusa con Geogebra

Reglas difusas

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

$$\left(\tilde{\tilde{A}} \to \tilde{\tilde{B}}\right) \vee \left(\overline{\tilde{\tilde{A}}} \to \tilde{\tilde{C}}\right)$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ v \\ o \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \cup \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ v \\ o \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Implicación de Mandani

$$\mu_{A\to B} = \min(\mu_A, \mu_B)$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ v \\ o \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Valor de verdad de la regla

3 Lógica difusa con Geogebra

Modus ponens

Regla

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Hecho

Estamos en una estación no muy fría

estaciones no muy fría={(p, 0.91), (v, 0.99), (o, 0.84), (i, 0.19)}

$$\begin{array}{cccc} p & v & o & i \\ \end{array} \atop \begin{pmatrix} 0.91 & 0.99 & 0.84 & 0.19 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & T1 & T2 \\ p & 0.6 & 0.3 \\ v & 0.6 & 0.2 \\ o & 0.6 & 0.4 \\ i & 0.4 & 0.8 \end{array} \quad = \begin{array}{cc} T1 & T2 \\ \end{array} \atop \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Conclusión: Sensación de no mucho frío (sensación de no frío elevado a 1/3)

Conclusiones

Estas definiciones, pueden parecer a primera vista arbitrarias y, hasta cierto punto lo son, no obstante en su elección deben tenerse en cuenta los siguientes criterios:

1. **que sean consistentes con las definiciones paralelas de la teoría de conjuntos clásicos**, es decir, que ésta pueda considerarse como un caso particular de la teoría de conjuntos difusos
2. que los modelos basados en la teoría **reflejen razonablemente bien la realidad** y
3. **que los cálculos** que se derivan de la utilización de los modelos **sean sencillos** y, por tanto, se ejecuten con rapidez.