DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Sebastián Lajara

Departamento Matemáticas
Universidad de Castilla-La Mancha

XVII Seminario Anual del Proyecto ESTALMAT

Castro Urdiales, 5 de abril de 2025

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

Excmo. Ayuntamiento de Castro Urdiales

OBJETIVOS

(1) Demostrar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de un conjunto de números positivos.

OBJETIVOS

(1) Demostrar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de un conjunto de números positivos.

(2) Aplicar la desigualdad a la resolución de problemas de Optimización, sin hacer uso de la derivada, y otros aspectos del Cálculo (definición del número e, convexidad).

OBJETIVOS

(1) Demostrar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de un conjunto de números positivos.

(2) Aplicar la desigualdad a la resolución de problemas de Optimización, sin hacer uso de la derivada, y otros aspectos del Cálculo (definición del número e, convexidad).

Propuesta dirigida a estudiantes de último curso del Programa ESTALMAT.

I. MEDIAS ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Los números

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab}$$

se denominan **media aritmética** y **media geométrica** de a y b.

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Los números

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab}$$

se denominan **media aritmética** y **media geométrica** de a y b.

Demostración del teorema. Claramente,

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Los números

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab}$$

se denominan **media aritmética** y **media geométrica** de a y b.

Demostración del teorema. Claramente,

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Los números

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab}$$

se denominan **media aritmética** y **media geométrica** de a y b.

Demostración del teorema. Claramente,

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

Medias aritmética y geométrica de dos números

Teorema

Si $a, b > 0$ entones

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Los números

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab}$$

se denominan **media aritmética** y **media geométrica** de a y b.

Demostración del teorema. Claramente,

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} \leq a + b \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Objetivo: encontrar $x, y > 0$ tales que $2x + 2y = p$, y el producto xy es máximo.

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Objetivo: encontrar $x, y > 0$ tales que $2x + 2y = p$, y el producto xy es máximo. En virtud del teorema,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Objetivo: encontrar $x, y > 0$ tales que $2x + 2y = p$, y el producto xy es máximo. En virtud del teorema,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

y la igualdad se verifica si y sólo si

$$x = y = \frac{p}{4}.$$

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Objetivo: encontrar $x, y > 0$ tales que $2x + 2y = p$, y el producto xy es máximo. En virtud del teorema,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

y la igualdad se verifica si y sólo si

$$x = y = \frac{p}{4}.$$

Teorema

1. Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado es el de área máxima.

Aplicación: problema isoperimétrico para rectángulos

Problema

Entre todos los rectángulos de perímetro p, hallar el de mayor área.

Objetivo: encontrar $x, y > 0$ tales que $2x + 2y = p$, y el producto xy es máximo. En virtud del teorema,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

y la igualdad se verifica si y sólo si

$$x = y = \frac{p}{4}.$$

Teorema

1. Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado es el de área máxima.
2. Entre todos los rectángulos de igual área, el cuadrado es el de menor perímetro.

Medias aritmética y geométrica de n números

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n$ son números positivos. Se llama **media aritmética** y **media geométrica** de $a_1, \ldots, a_n$ a los números

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Medias aritmética y geométrica de n números

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n$ son números positivos. Se llama **media aritmética** y **media geométrica** de $a_1, \ldots, a_n$ a los números

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{y} \qquad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Medias aritmética y geométrica de n números

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n$ son números positivos. Se llama **media aritmética** y **media geométrica** de $a_1, \ldots, a_n$ a los números

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{y} \qquad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Teorema

Si $a_1, \ldots, a_n > 0$ entonces

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

La igualdad se verifica si, y solo si, $a_1 = \ldots = a_n$.

La demostración de Cauchy (1821)

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Idea: Demostrar el resultado cuando $n = 2^k$,

La demostración de Cauchy (1821)

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Idea: Demostrar el resultado cuando $n = 2^k$, y deducir de aquí el resultado para cualquier número $m < 2^k$.

CASO $n = 4$.

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2)(a_3 a_4)$$

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\ &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\ &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\ &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \\ &\leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right]^2 \end{aligned}$$

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\
&\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right]^2 \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4.
\end{aligned}$$

Si se verifica la igualdad entonces

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\
&\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right]^2 \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4.
\end{aligned}
$$

Si se verifica la igualdad entonces

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4$$

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\
&\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right]^2 \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 .
\end{aligned}$$

Si se verifica la igualdad entonces

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4 \quad \text{y} \quad a_1 + a_2 = a_3 + a_4,$$

esto es,

CASO $n = 4$. Consideremos cuatro números $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \\
&\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right]^2 \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 .
\end{aligned}$$

Si se verifica la igualdad entonces

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4 \quad \text{y} \quad a_1 + a_2 = a_3 + a_4,$$

esto es,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

CASO $n = 3$.

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4.$$

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4 .$$

Pero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3A,$$

luego

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4.$$

Pero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3A,$$

luego

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{3A + A}{4} \right)^4 = A^4,$$

y por tanto

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4 .$$

Pero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3A,$$

luego

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{3A + A}{4} \right)^4 = A^4,$$

y por tanto

$$a_1 a_2 a_3 \leq A^3$$

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4.$$

Pero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3A,$$

luego

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{3A + A}{4} \right)^4 = A^4,$$

y por tanto

$$a_1 a_2 a_3 \leq A^3 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^3.$$

CASO $n = 3$. Consideremos tres números $a_1, a_2, a_3 > 0$. Sea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Aplicando el caso $n = 4$ a los números a_1, a_2, a_3, A se obtiene

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \right)^4.$$

Pero

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3A,$$

luego

$$a_1 a_2 a_3 A \leq \left(\frac{3A + A}{4} \right)^4 = A^4,$$

y por tanto

$$a_1 a_2 a_3 \leq A^3 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^3.$$

Además, la igualdad se da si, y sólo si,

$$a_1 = a_3 = a_3.$$

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$.

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1.

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$.

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

$0 \geq (a-1)(b-1)$

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

$0 \geq (a-1)(b-1) = ab - (a+b) + 1.$

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

$$0 \geq (a-1)(b-1) = ab - (a+b) + 1. \qquad \Rightarrow \qquad ab \leq a + b - 1.$$

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

$$0 \geq (a-1)(b-1) = ab - (a+b) + 1. \qquad \Rightarrow \qquad ab \leq a + b - 1.$$

$$abc \leq (a+b-1)c$$

Otra demostración

CASO $n = 3$. Fijemos $a, b, c > 0$. Supongamos en primer lugar que

$$\frac{a+b+c}{3} = 1.$$

Objetivo: ver que

$$abc \leq 1.$$

1. Uno de los números es ≥ 1. Asumimos por ejemplo que $a \geq 1$.
2. O bien $b \leq 1$, o $c \leq 1$. Asumimos por ejemplo que $b \leq 1$.

$$0 \geq (a-1)(b-1) = ab - (a+b) + 1. \qquad \Rightarrow \qquad ab \leq a+b-1.$$

$$abc \leq (a+b-1)c \leq \left(\frac{a+b-1+c}{2}\right)^2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$,

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{c}{m}.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{c}{m}.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x+y+z}{3} = \frac{a+b+c}{3m} = \frac{m}{m} = 1.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{c}{m}.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x+y+z}{3} = \frac{a+b+c}{3m} = \frac{m}{m} = 1.$$

Por tanto,

$$xyz \leq 1.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{c}{m}.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x+y+z}{3} = \frac{a+b+c}{3m} = \frac{m}{m} = 1.$$

Por tanto,

$$xyz \leq 1.$$

Consecuentemente,

$$abc = m^3 xyz \leq m^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Sean ahora $a, b, c > 0$, y escribamos

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Sean

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{c}{m}.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x+y+z}{3} = \frac{a+b+c}{3m} = \frac{m}{m} = 1.$$

Por tanto,

$$xyz \leq 1.$$

Consecuentemente,

$$abc = m^3 xyz \leq m^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

El caso general sigue de forma inductiva.

Aplicación: Problema isoperimérico para triángulos

Problema

Entre todos los triángulos de perímetro p, halla el de área máxima.

Aplicación: Problema isoperimérico para triángulos

Problema

Entre todos los triángulos de perímetro p, halla el de área máxima.

Teorema (Herón)

Si T es un triángulo de lados a, b, c y

$$s = \frac{p}{2} = \frac{a+b+c}{2},$$

entonces

Aplicación: Problema isoperimérico para triángulos

Problema

Entre todos los triángulos de perímetro p, halla el de área máxima.

Teorema (Herón)

Si T es un triángulo de lados a, b, c y

$$s = \frac{p}{2} = \frac{a+b+c}{2},$$

entonces

$$\mathrm{area}(T) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Aplicación: Problema isoperimérico para triángulos

Problema

Entre todos los triángulos de perímetro p, halla el de área máxima.

Teorema (Herón)

Si T es un triángulo de lados a, b, c y

$$s = \frac{p}{2} = \frac{a+b+c}{2},$$

entonces

$$\mathrm{area}(T) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Sea $s = \frac{p}{2}$. El problema equivale a hallar tres números $a, b, c > 0$ de modo que $a+b+c = 2s$ y el producto

$$(s-a)(s-b)(s-c)$$

sea máximo.

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c)$$

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \right)^3$$

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \right)^3 = \left(\frac{s}{3} \right)^3.$$

La igualdad se da si, y sólo si,

$$s - a = s - b = s - c,$$

esto es,

$$a = b = c.$$

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

La igualdad se da si, y sólo si,

$$s-a = s-b = s-c,$$

esto es,

$$a = b = c.$$

Teorema (Desigualdad isoperimétrica para triángulos)

Si T es un triángulo de semiperímetro s entonces

$$\mathrm{area}(T) \leq \frac{\sqrt{3}s^2}{9}.$$

Aplicando el teorema para $n = 3$ obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

La igualdad se da si, y sólo si,

$$s - a = s - b = s - c,$$

esto es,

$$a = b = c.$$

Teorema (Desigualdad isoperimétrica para triángulos)

Si T es un triángulo de semiperímetro s entonces

$$\mathrm{area}(T) \leq \frac{\sqrt{3}s^2}{9}.$$

La igualdad se verifica si, y sólo si, el triángulo T es equilátero.

II. ALGUNAS ACTIVIDADES

Rectángulos de área máxima

Problema

Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, hallar el de mayor área.

Podemos suponer que la circunferencia está centrada en $(0,0)$ y tiene radio 1. Los puntos (x,y) de esta curva satisfacen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Problema

Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, hallar el de mayor área.

Podemos suponer que la circunferencia está centrada en $(0,0)$ y tiene radio 1. Los puntos (x,y) de esta curva satisfacen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

El problema se reduce a encontrar los puntos (x,y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $\quad y > 0$, $\quad$ y el producto xy es máximo.

Rectángulos de área máxima

Problema

Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, hallar el de mayor área.

Podemos suponer que la circunferencia está centrada en $(0,0)$ y tiene radio 1. Los puntos (x,y) de esta curva satisfacen

$$x^2+y^2=1.$$

El problema se reduce a encontrar los puntos (x,y) tales que $x^2+y^2=1$, $x>0$, $\quad y>0$, $\quad$ y el producto xy es máximo.

$$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy.$$

Como $x^2+y^2=1$,

$$xy \leq \frac{1}{2}$$

Y la igualdad se da si y sólo si

$$x=y$$

Rectángulos de área máxima

Problema

Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, hallar el de mayor área.

Podemos suponer que la circunferencia está centrada en $(0,0)$ y tiene radio 1. Los puntos (x,y) de esta curva satisfacen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

El problema se reduce a encontrar los puntos (x,y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $\quad y > 0$, $\quad$ y el producto xy es máximo.

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy.$$

Como $x^2 + y^2 = 1$,

$$xy \leq \frac{1}{2}$$

Y la igualdad se da si y sólo si

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El problema de Regiomontano

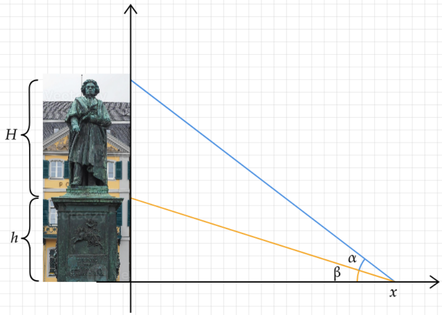
Johann Müller
Regiomontano
(1436–1476)

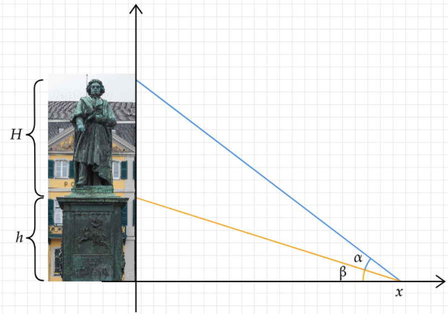
El problema de Regiomontano

Johann Müller
Regiomontano
(1436–1476)

Problema

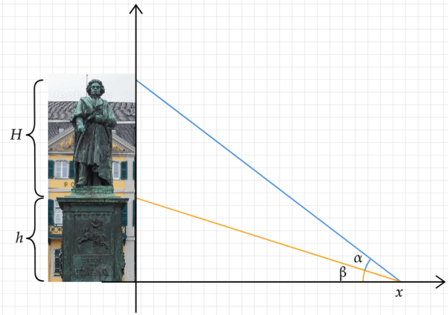
Una estatua de altura H está situada sobre un pedestal de altura h. Hallar la distancia desde la que se ve la estatua con un ángulo máximo.


H
h
α
β
x



Se trata de encontrar el punto x para el cual el ángulo α es máximo.

La función tangente es creciente.



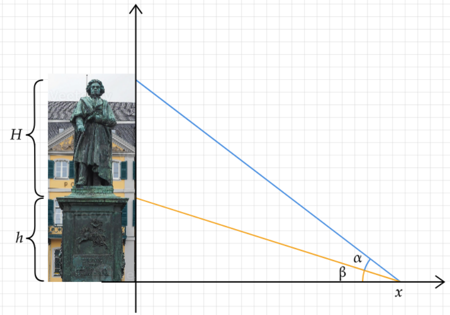
Se trata de encontrar el punto x para el cual el ángulo α es máximo.

La función tangente es creciente.

El problema equivale a maximizar la tangente de α.

Sea

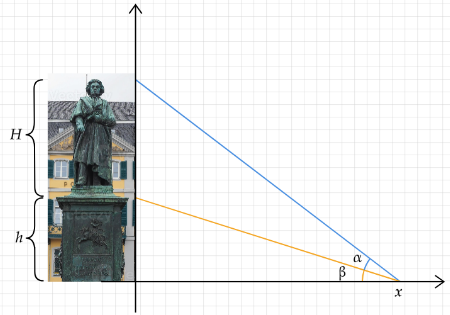
$$\theta = \alpha + \beta.$$



$$\tan\theta = \frac{h+H}{x}$$

Sea

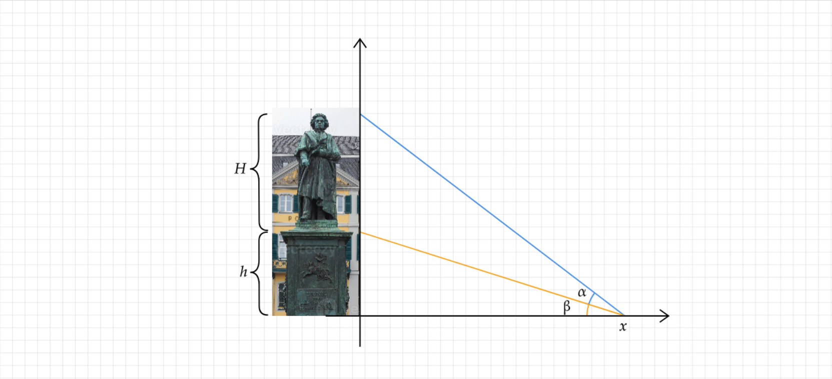
$$\theta = \alpha + \beta.$$



$$\tan\theta = \frac{h+H}{x} \qquad \text{y} \qquad \tan\beta = \frac{h}{x}.$$

Sea

$$\theta = \alpha + \beta.$$



$$\tan\theta = \frac{h+H}{x} \qquad \text{y} \qquad \tan\beta = \frac{h}{x}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta} = \frac{Hx}{x^2 + h(H+h)}.$$

Problema

Hallar el máximo de la función definida para $x \geq 0$ por la igualdad

$$f(x) = \frac{Hx}{x^2 + (H+h)h}$$

Problema

Hallar el máximo de la función definida para $x \geq 0$ por la igualdad

$$f(x) = \frac{Hx}{x^2 + (H+h)h} = H \cdot \frac{1}{x + \frac{(H+h)h}{x}}.$$

Problema

Hallar el máximo de la función definida para $x \geq 0$ por la igualdad

$$f(x) = \frac{Hx}{x^2 + (H+h)h} = H \cdot \frac{1}{x + \frac{(H+h)h}{x}}.$$

Observemos que

$$x + \frac{(H+h)h}{x} \geq 2\sqrt{(H+h)h}.$$

Problema

Hallar el máximo de la función definida para $x \geq 0$ por la igualdad

$$f(x) = \frac{Hx}{x^2 + (H+h)h} = H \cdot \frac{1}{x + \frac{(H+h)h}{x}}.$$

Observemos que

$$x + \frac{(H+h)h}{x} \geq 2\sqrt{(H+h)h}.$$

En particular,

$$f(x) \leq \frac{H}{2\sqrt{(H+h)h}}.$$

Además, se verifica la igualdad si (y sólo si)

$$x = \frac{(H+h)}{x}$$

Problema

Hallar el máximo de la función definida para $x \geq 0$ por la igualdad

$$f(x) = \frac{Hx}{x^2 + (H+h)h} = H \cdot \frac{1}{x + \frac{(H+h)h}{x}}.$$

Observemos que

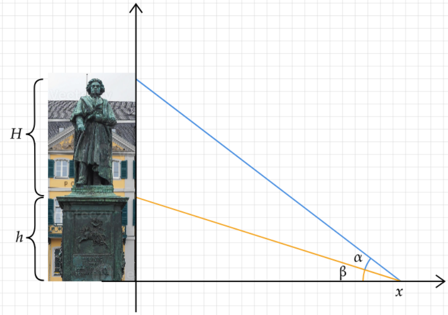
$$x + \frac{(H+h)h}{x} \geq 2\sqrt{(H+h)h}.$$

En particular,

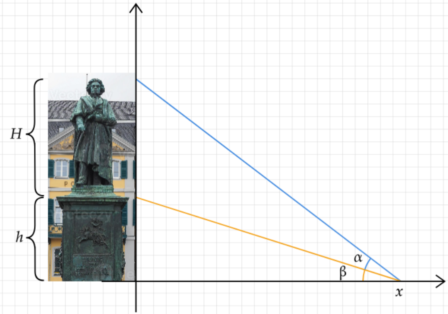
$$f(x) \leq \frac{H}{2\sqrt{(H+h)h}}.$$

Además, se verifica la igualdad si (y sólo si)

$$x = \frac{(H+h)}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{(H+h)h}.$$



$$x = \sqrt{(H+h)h}$$



$$x = \sqrt{(H+h)h}$$

Teorema (Regiomontano)

La distancia desde la que se ve la estatua con un ángulo máximo es la media geométrica de la altura total y la del pedestal.

Paralelepípedos de área lateral mínima

Problema

Entre todas las cajas de volumen 1, hallar la que tiene menor área lateral.

El problema se reduce a encontrar $x, y, z > 0$ tales que

$$xyz = 1$$

y la suma $xy + xz + yz$ es mínima.

Paralelepípedos de área lateral mínima

Problema

Entre todas las cajas de volumen 1, hallar la que tiene menor área lateral.

El problema se reduce a encontrar $x, y, z > 0$ tales que

$$xyz = 1$$

y la suma $xy + xz + yz$ es mínima.

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3.$$

La igualdad se verifica si y sólo si

$$xy = xz = yz$$

Paralelepípedos de área lateral mínima

Problema

Entre todas las cajas de volumen 1, hallar la que tiene menor área lateral.

El problema se reduce a encontrar $x, y, z > 0$ tales que

$$xyz = 1$$

y la suma $xy + xz + yz$ es mínima.

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3.$$

La igualdad se verifica si y sólo si

$$xy = xz = yz \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z.$$

Paralelepípedos de área lateral mínima

Problema

Entre todas las cajas de volumen 1, hallar la que tiene menor área lateral.

El problema se reduce a encontrar $x, y, z > 0$ tales que

$$xyz = 1$$

y la suma $xy + xz + yz$ es mínima.

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3.$$

La igualdad se verifica si y sólo si

$$xy = xz = yz \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z.$$

Teorema

Entre todas las cajas de volumen dado, la de área lateral mínima es el cubo.

Paralelepípedos de área lateral mínima

Problema

Entre todas las cajas de volumen 1, hallar la que tiene menor área lateral.

El problema se reduce a encontrar $x, y, z > 0$ tales que

$$xyz = 1$$

y la suma $xy + xz + yz$ es mínima.

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3.$$

La igualdad se verifica si y sólo si

$$xy = xz = yz \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z.$$

Teorema

Entre todas las cajas de volumen dado, la de área lateral mínima es el cubo. Entre todas las cajas de área lateral dada, la de volumen máximo es el cubo.

Media armónica

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n > 0$. Se llama **media armónica** de $a_1, \ldots, a_n$ al número

Media armónica

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n > 0$. Se llama **media armónica** de $a_1, \ldots, a_n$ al número

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Teorema

Si $a_1, \ldots, a_n > 0$. entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

La igualdad se verifica si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$.

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}.$

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}$.

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}$$

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}.$

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 1}$$

El número e

Teorema

Si
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}$.

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 1}$$
$$< \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

El número e

Teorema

Si

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot 1} \\
&< \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \\
&= \frac{n+1+1}{n+1}
\end{aligned}$$

El número e

Teorema

Si
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} \\
&< \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \\
&= \frac{n+1+1}{n+1} \\
&= 1+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

El número e

Teorema

Si
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}.$

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} \\
&< \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \\
&= \frac{n+1+1}{n+1} \\
&= 1+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad x_n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

El número e

Teorema

Si
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad x_n < x_{n+1}.$

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} \\
&< \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \\
&= \frac{n+1+1}{n+1} \\
&= 1+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad x_n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1}$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1} > \frac{n+2}{\frac{n}{n+1} + \cdot \ldots \cdot + \frac{n}{n+1} + 1}$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1} > \frac{n+2}{\frac{n}{n+1} + \cdot \ldots \cdot + \frac{n}{n+1} + 1}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}$$

Teorema

Si
$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n$.

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1} > \frac{n+2}{\frac{n}{n+1} + \cdot \ldots \cdot + \frac{n}{n+1} + 1}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1} > \frac{n+2}{\frac{n}{n+1} + \cdot \ldots \cdot + \frac{n}{n+1} + 1}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow \qquad y_n > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

Teorema

Si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\qquad y_{n+1} < y_n.$

$$\sqrt[n+2]{y_n} = \sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1} > \frac{n+2}{\frac{n}{n+1} + \cdot \ldots \cdot + \frac{n}{n+1} + 1}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow \qquad y_n > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = y_{n+1}.$$

$$\text{Si} \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{entonces}$$

Si $\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad$ entonces

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1.$$

Si $\quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad$ entonces

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1.$$ Además,

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)x_n$$

$$\text{Si} \quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{entonces}$$

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1. \quad \text{Además,}$$

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)x_n = \frac{x_n}{n}.$$

Si $\quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad$ e $\qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\quad$ entonces

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1$. $\quad$ Además,

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)x_n = \frac{x_n}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < y_n - x_n < \frac{y_1}{n} = \frac{4}{n}.$$

Si $\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad$ e $\qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad$ entonces

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1.$ Además,

$$y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) x_n = \frac{x_n}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < y_n - x_n < \frac{y_1}{n} = \frac{4}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_n (y_n - x_n) = 0.$$

Si $\quad x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \qquad$ e $\qquad y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad$ entonces

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1. \quad \text{Además,}$$

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)x_n = \frac{x_n}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < y_n - x_n < \frac{y_1}{n} = \frac{4}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_n (y_n - x_n) = 0.$$

Teorema

Existe un único número e tal que

$x_n < e < y_n \quad$ para cada $\quad n \in \mathbb{N}$.

Si $\quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad$ e $\qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\quad$ entonces

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < y_3 < y_2 < y_1.$$ Además,

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) x_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n} - 1\right) x_n = \frac{x_n}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < y_n - x_n < \frac{y_1}{n} = \frac{4}{n}.$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_n (y_n - x_n) = 0.$$

Teorema

Existe un único número e tal que

$x_n < e < y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\qquad \lim_n x_n = e.$

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).
2. Desigualdad de Bernoulli.

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).
2. Desigualdad de Bernoulli.
3. Medias ponderadas.

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).
2. Desigualdad de Bernoulli.
3. Medias ponderadas.
4. Funciones convexas. Convexidad de la función exponencial.

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).
2. Desigualdad de Bernoulli.
3. Medias ponderadas.
4. Funciones convexas. Convexidad de la función exponencial.
5. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdad de Hölder.

Otras actividades

1. Cuadriláteros de área mínima (fórmula de Brahmagupta).
2. Desigualdad de Bernoulli.
3. Medias ponderadas.
4. Funciones convexas. Convexidad de la función exponencial.
5. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdad de Hölder.
6. Problemas de mínima distancia.