Pequeñas actividades numéricas

Queremos presentaros cinco pequeñas actividades numéricas, que llevan por título: De izquierda a derecha/ De arriba a abajo, Cruces numéricos, Pirámides matemáticas, Dividiendo por la suma de las cifras y Sucesiones de Fibonacci.

Estas actividades las venimos utilizando para completar (y también para hacer más llevadera para profesor y alumno) alguna de las sesiones, en el primer curso del proyecto, sin que tengan que ver con el tema que se haya venido tratando en la sesión.

Las actividades, además de cortas e independientes se caracterizan porque pueden ser resueltas tanto individualmente como en pequeño grupo y por ser de dificultad y resolución progresiva: no se les plantea una nueva cuestión si no se ha resuelto correctamente la precedente. Además de las cuestiones que se plantean en la hoja de cálculo, son actividades abiertas a ampliaciones.

Características matemáticas comunes a las actividades son, además de trabajar propiedades numéricas, que permiten introducir el álgebra como una forma de explicitar de manera más precisa las estrategias de resolución usadas y también iniciarse en pequeñas demostraciones.

Albert Armenteres
Daniel Bosch

De izquierda a derecha/ De arriba a abajo

DE IZQUIERDA A DERECHA / DE ARRIBA A ABAJO

3	8	38
7	5	75
37	85	235

Escoge cuatro cifras diferentes, por ejemplo 3, 5, 7 y 8. Las puedes ver en las casillas de la izquierda. Al leer los dígitos de izquierda a derecha obtenemos los números 38 y 75. Si los leemos de arriba a abajo obtenemos los números 37 i 85. Estos cuatro números suman un total de 235.

Recoloca estos cuatro dígitos para maximizar este total.

¿Cuál es el mayor total que se puede obtener?

DE IZQUIERDA A DERECHA / DE ARRIBA A ABAJO

8	7	87
5	3	53
85	73	298

Escoge cuatro cifras diferentes, por ejemplo 3, 5, 7 y 8. Las puedes ver en las casillas de la izquierda. Al leer los dígitos de izquierda a derecha obtenemos los números 38 y 75. Si los leemos de arriba a abajo obtenemos los números 37 i 85. Estos cuatro números suman un total de 235.

Recoloca estos cuatro dígitos para maximizar este total.

¿Cuál es el mayor total que se puede obtener? 298

Escribe cuatro dígitos diferentes ordenados de menor a mayor.

Escribe cuatro dígitos diferentes ordenados de menor a mayor.

1	2	3	4

En la tabla de abajo, intenta hacer el mismo problema con estos nuevos dígitos.

4	3	43
2	1	21
42	31	137

¿Cuál es el mayor total para tus cuatro números? 137

¿Cuál es el menor total para tus cuatro números? 83

Explica cómo obtienes el mayor total.

Las respuestas

Unos pocos se limitan a explicar cómo obtienen el máximo sin ninguna justificación.
La mayoría justifican bien dónde colocar el más grande y el más pequeño pero no dicen nada de los otros dos.

Hem de collocar el nombre més gran a la casella ~~de~~ dalt esquerre; el segon més gran a la de dalt dreta; el tercer més gran a la de ~~dalt~~ baix esquerre ; i ~~te~~ el més petit a la de baix dreta.

4	3
2	1

$1 < 2 < 3 < 4$

Posem el més gran a la casella dalt esquerre perquè tots els nom-bres que posem en aquesta casella sempre serà la desena. I posem el més petit a la casella baix ~~p~~ dreta perquè tots els nombres que posem en aquesta casella sempre serà la unitat.

Una de las mejores

d'esquerra a dreta
de dalt a baix.

Per obtenir el maxim tems que posar el numero mes gran a dalt a la dreta (4) per que determinarà

$\boxed{3}$ desenas

4	3
2	1

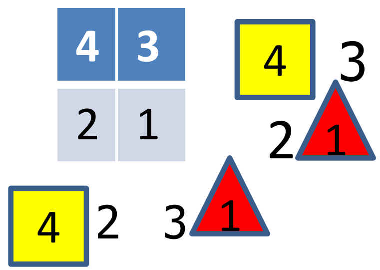
$\boxed{4}$3
21

$\boxed{4}$2 31

(i ens interesa que hi hagi moltes desenes perque valen mes que les unitats)

i el mes petit abaix a la dreta, perque determina 2 unitats, i les unitats valen menys.
els altres 2 numeros determinen 1 desena i 1 unitat, i és igual a on ho posen dels 2 llocs restants.

Para obtener el máximo, tenemos que poner el número más grande arriba a la derecha (4) porque determina 2 decenas



(y nos interesa que haya muchas decenas porque valen más que las unidades)

i el más pequeño abajo a la derecha, porque determina 2 Unidades, y las unidades valen menos.

Los otros dos números determinan 1 decena y 1 unidad, y es igual donde los pongamos dentro de los 2 lugares restantes.

Nuestros comentarios en la puesta en común

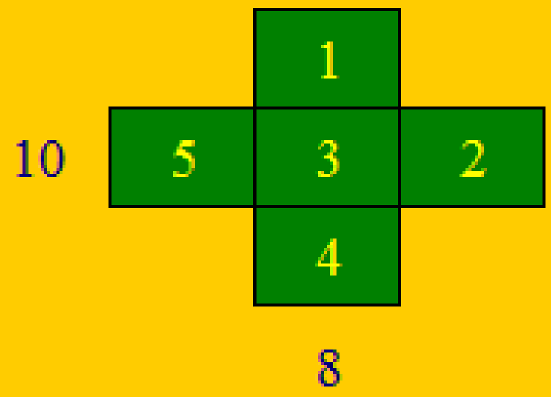
a	b	10a+b 10c+d
c	d	
10a+c	10b+d	20a+11b+11c+d

Posibles ampliaciones

Generalizar a otras dimensiones del encasillado , por ejemplo, con dos filas y tres columnas

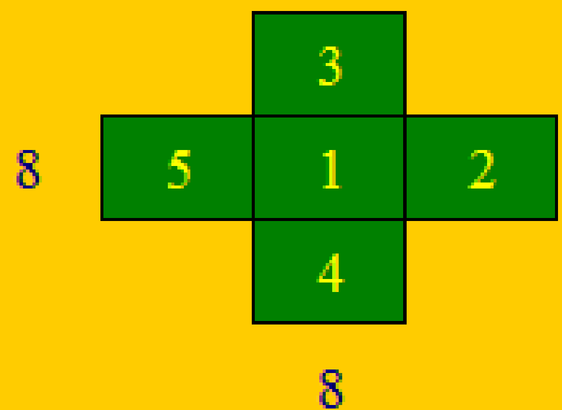
CRUCES NUMÉRICOS

Cruces Numéricos



Hemos situado los números del 1 al 5 en las casillas de la izquierda. Como podéis comprobar la fila suma 10 y la columna suma 8. Intentad disponer los mismos números de tal forma que la suma total de la fila sea igual a la de la columna.

Cruces Numéricos



Hemos situado los números del 1 al 5 en las casillas de la izquierda. Como podéis comprobar la fila suma 10 y la columna suma 8. Intentad disponer los mismos números de tal forma que la suma total de la fila sea igual a la de la columna.

¡Muy bien! Ahora escribe aquí el total de la fila/columna. 8

¿Cuál es el mayor total posible de la fila / columna?

¿Cuál es el mayor total posible de la fila / columna? 10

¿Cuál es el total menor posible de la fila / columna? 8

Explica porque los números pares no se pueden colocar en el cuadrado central.

Cuando lo hayas hecho, escribe otros cinco números consecutivos en las casillas de abajo.

2	3	4	5	6

¿Cual es el mayor total de la fila/columna ahora? 13

¿Cual es el menor total de la fila/columna ahora? 11

Explica porque los totales mayor y menor siempre difieren en dos.

Generaliza los totales mayor y menor para cualquier conjunto de números enteros consecutivos.

Resuelve el problema para cualquier conjunto de números impares consecutivos.

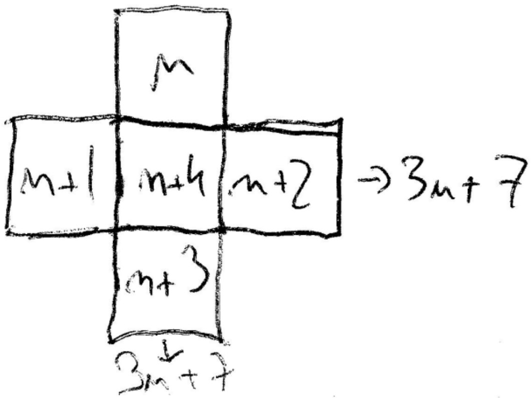
Las respuestas

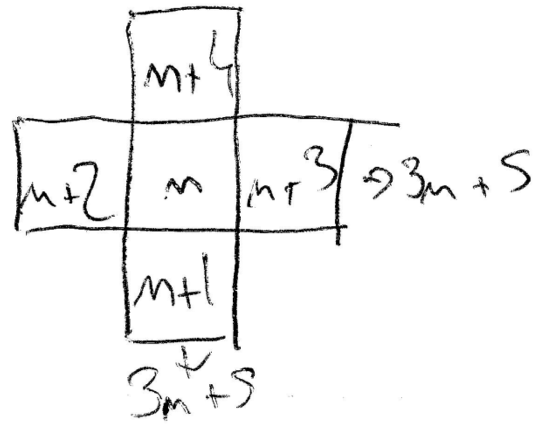
Explica perquè els nombres parells no es poden col·locar en el quadrat central. No podem col·locar ~~un~~ parell al quadrat central perquè allà formaria part dels dos nombres, fent-los parells, perquè ~~i~~ parell més imparell dona parell, i més parell dona parell. Pero en una fila/columna no són dos imparells, sinó un, llavors seria parell més parell, dóna parell, més imparell és imparell. Si un és imparell i l'altre és parell, no poden ser el mateix nombre.

Muchos empiezan a utilizar letras

Explica per què els totals més gran i més petit sempre tenen una diferència de dos.

Perquè el més gran és: Perquè el més petit és:





Los dificultades empiezan con la generalización a impares consecutivos

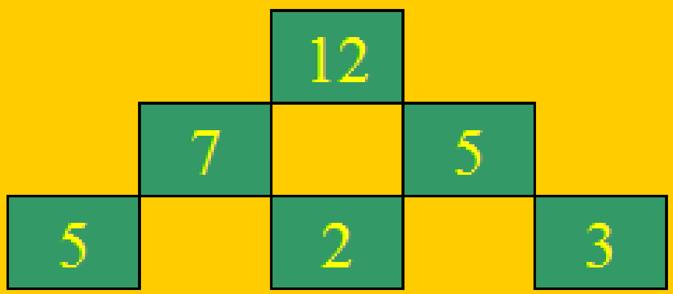
Posibles ampliaciones

- Generalizar el problema a cinco términos consecutivos de una progresión aritmética

- Alargar los brazos de la cruz

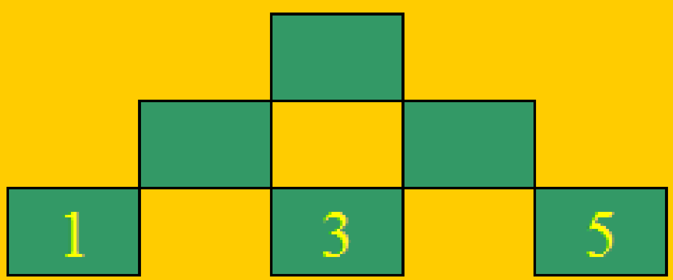
PIRÁMIDES MATEMÁTICAS

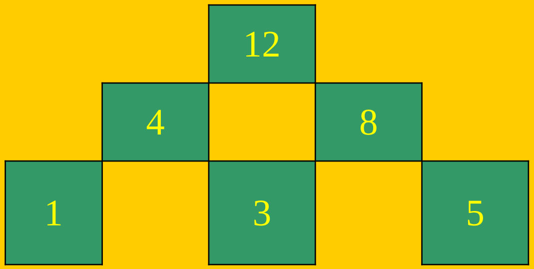
Pirámides Matemáticas



La figura de la izquierda nos muestra una pirámide matemática. Si empiezas por el piso de abajo, ¿cómo se encuentran los números de los otros pisos?

Utilizando esta regla, rellena los números que faltan en la pirámide de la izquierda.





Muy bien, los has encontrado correctamente. Ahora, utilizando los mismos tres números de la base,

¿cuál sería el mayor total que puedes obtener arriba? 14

¿Cuál es el menor total que puedes obtener arriba? 10

Si los tres números de la base fuesen 3, 4 i 7, ¿cuál sería el mayor total posible en la cima de la pirámide? 21

¿Y el menor total que puedes obtener en la cima? 17

Si los tres números de la base de la pirámide fuesen tres números enteros consecutivos, encuentra reglas, en términos del menor de los tres números, para hallar los totales mayor y menor.

Supongamos que el número de la cima de la pirámide es 10 y los números de la base son enteros positivos, ¿cuantas disposiciones diferentes puedes encontrar para los tres números de la base?

el més ~~gran~~ petit

$$4x+3$$
$$2x+1 \quad 2x+2$$
$$x+1 \quad x \quad x+2$$

es multiplica el petit per 4 i es suma 3

$$\boxed{4x+3}$$

el més gran

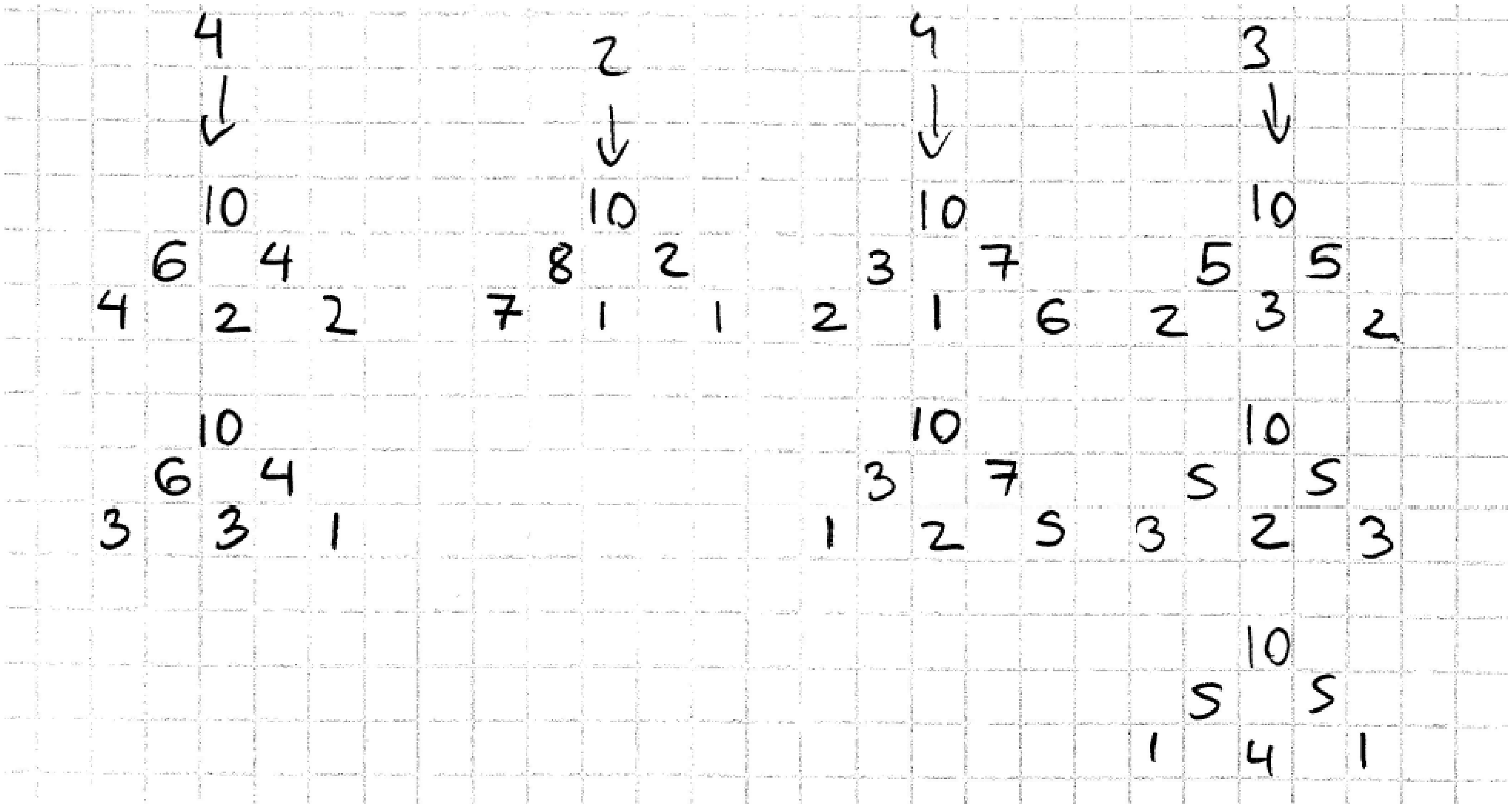
$$4x+5$$
$$2x+2 \quad 2x+3$$
$$x \quad x+2 \quad x+1$$

es multiplica el petit per 4 i es suma 5

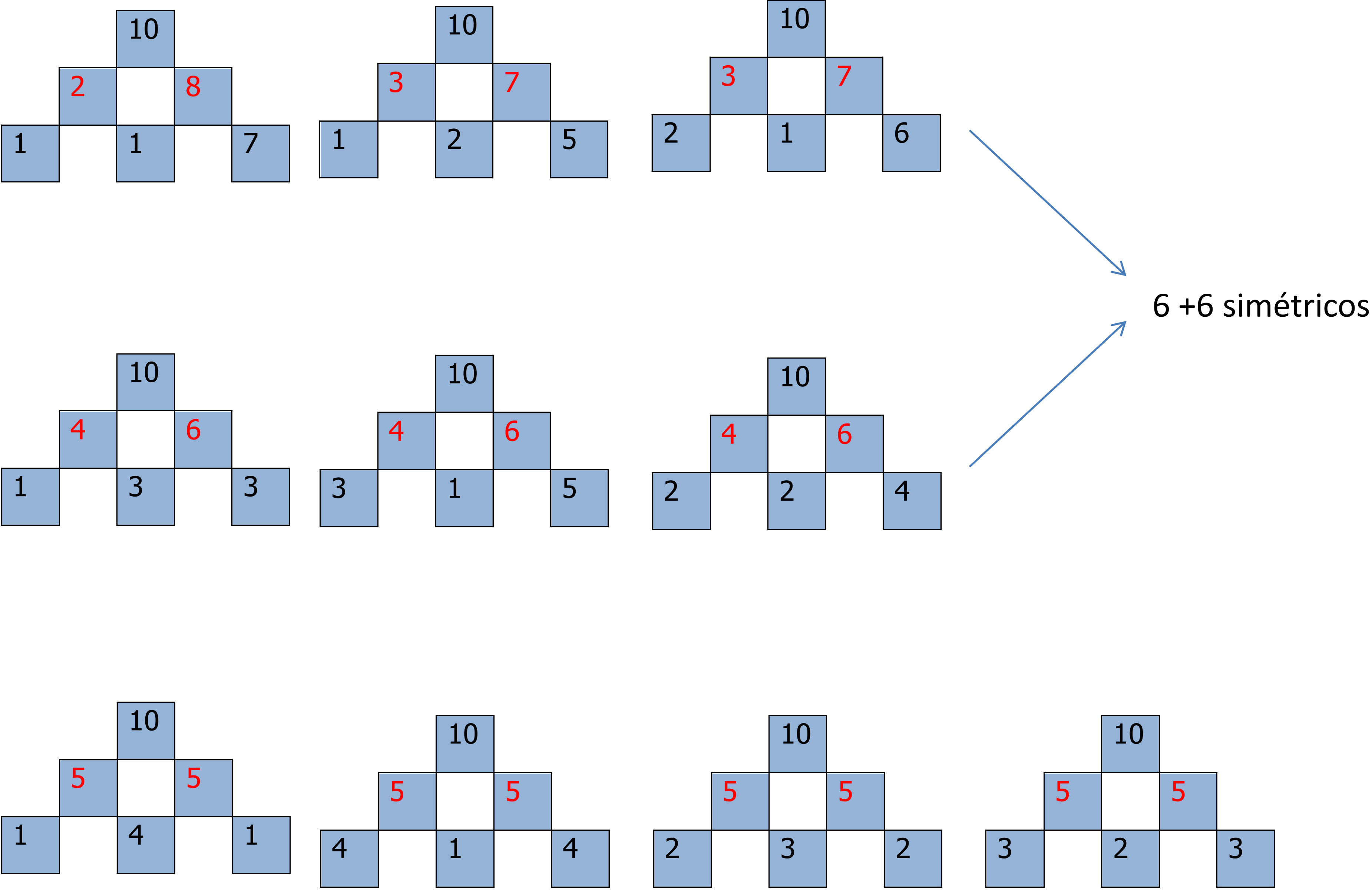
$$\boxed{4x+5}$$

Lo resuelven bien hasta que llegan a la última cuestión: contar las diferentes maneras de obtener 10 en la casilla más alta de la pirámide.
Es necesario trabajar este tipo de recuentos y constatar la necesidad de organizarlos.

Uno de los mejores



Hi ha tretze posibilitats


10
2 8
1 1 7
10
3 7
1 2 5
10
3 7
2 1 6
6 +6 simétricos
10
4 6
1 3 3
10
4 6
3 1 5
10
4 6
2 2 4
10
5 5
1 4 1
10
5 5
4 1 4
10
5 5
2 3 2
10
5 5
3 2 3

Posibles ampliaciones

Buscar la regla que da el número de disposiciones diferentes de la base de la pirámide para un cierto valor dado situado en lo más alto de la pirámide (en el caso de 3 pisos)

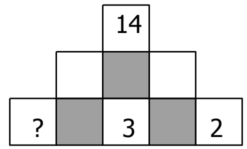
Nº en la cima	Disposiciones en la base
4	1
5	2
6	4
7	6
8	9
9	12
10	16
11	20
12	25

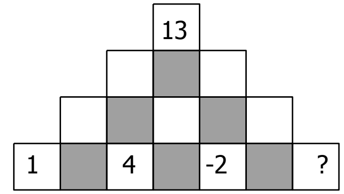
Si n es par: $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$

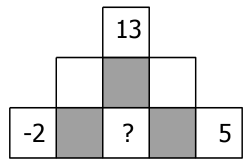
Si n es impar $\frac{(n-3)\cdot(n-1)}{4}$

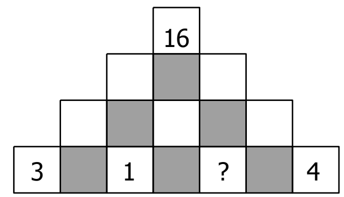
PIRÀMIDES (COMPLEMENTS)

1. Fixa't en les piràmides següents:



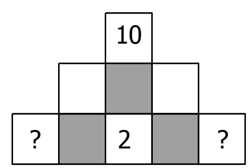






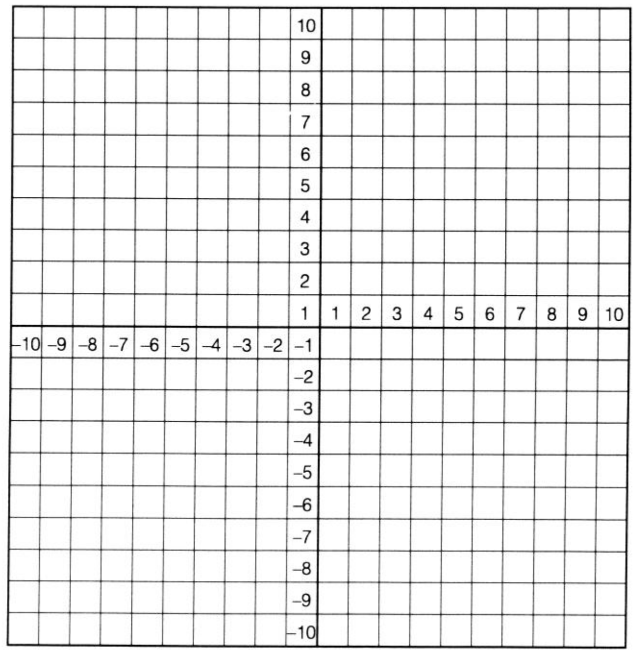
Pots trobar el nombre indicat amb **"?"** de manera que, seguint les regles de les piràmides, s'obtinguin els nombres dels cims indicats?

2. Ara, considera la piràmide següent. Aquesta té dos nombres a la base que no coneixem.

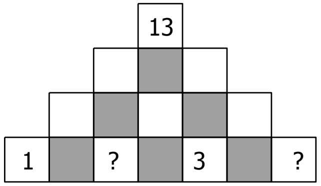


- Pots trobar els nombres que han d'anar a la base de la piràmide per tal d'obtenir el nombre que hi ha al cim?
- Creus que hi ha més solucions? Hi ha alguna pauta entre els nombres d'aquestes solucions?
- Escriu cinc o sis solucions més (pots fer servir nombres negatius i, si vols, altres tipus de nombres).

- Representa aquestes solucions en el sistema de coordenades següent, posant els valors que has trobat per al primer nombre a l'eix horitzontal i els valors del segon nombre a l'eix vertical. Fes-ho per a cadascuna de les solucions. Què observes en els punts que has obtingut?



1. Repeteix l'exercici anterior per a la piràmide següent:



DIVIDIENDO POR LA SUMA DE LAS CIFRAS

DIVIDIENDO POR LA SUMA DE CIFRAS

Escoge un número entero de dos cifras -37 por ejemplo- y lo divides por la suma de sus cifras. En este caso será:

$$37/(3+7) = 37/10 = 3{,}7$$

¿Cuál es la menor respuesta posible que puedes obtener mediante este proceso?

¿Cuál es el mayor resultado posible que puedes obtener mediante este proceso?

¿Cuál es la menor respuesta posible que puedes obtener mediante este proceso? 1,9

¿Cuál es el mayor resultado posible que puedes obtener mediante este proceso? 10

¿Cuantos resultados de todos los posibles son números enteros? 23

Explica porque 1,9 es el resultado menor y 10 el mayor

Explica porque 10 es el resultado más frecuente del proceso

¿En qué circunstancias la respuesta tiene una sola cifra decimal?

¿En qué circunstancias la respuesta es un decimal periódico?

Las respuestas más comunes

1,9 es el menor porque el número más pequeño con la suma de cifras más grande es 19 (19/10)

10 es el mayor porque el número más grande con la suma de cifras más pequeña es 90 (90/9)

Llegar a que 23 son los resultados enteros no es sencillo
(uso y abuso de la estrategia ensayo/error). La mejor aproximación:

Enteros son:

- Los múltiplos de 10, porque todos dan 10 ya que se dividen por su decena
- Los divisibles por 9, porque sus cifras suman 9
- I 5 que no siguen ninguna norma

Hay quien calcula el resultado del cociente para los múltiplos de 3

Nuestros comentarios en la puesta en común

Algunas estrategias posibles:

1. Qué ocurre si mantenemos fija la cifra de las decenas y variamos la de las unidades?

$$\frac{21}{2+1} = 7;\ \frac{22}{2+2} = 5.4;\ \frac{23}{2+3} = 4.6;\ \frac{24}{6} = 4;\ \dots\dots\dots\dots \frac{28}{10} = 2.8;\ \frac{29}{11} = 2.\widehat{63}$$

Cuánto mayor la cifra de las unidades menor el resultado de la división

2. Y si mantenemos fija la cifra de las unidades y variamos la de las decenas?

$$\frac{15}{6} = 2.5;\ \dots;\ \frac{35}{8} = 4.375;\ \dots\ \frac{55}{10} = 5.5;\ \dots \frac{75}{12} = 6.25\ \dots$$

Cuánto más pequeña es la cifra de las decenas menor el resultado de la división, con la excepción de:

$$\frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} = \cdots \frac{90}{9} = 10$$

El resultado más pequeño se obtiene con el número que tiene la cifra de las decenas más pequeña y la de las unidades más grande 19 $\longrightarrow$ 19/10 = 1.9

El resultado más grande se obtiene con el número que tiene la cifra de las decenas más grande y la de las unidades más pequeña 90 $\longrightarrow$ 90/10 = 9

3. Criterios de divisibilidad.

4. Tipo de decimal que se obtiene de una fracción irreducible según sea la descomposición en factores del denominador.

SUCESIONES DE FIBONACCI

SUCESIONES DE FIBONACCI

Escoge dos números enteros y positivos y escríbelos dentro de las casillas de color verde.

Escribe tu primer número aquí. 1

Escribe tu segundo número aquí. 1

2

Si los números verdes hubieran sido 3 y 7, ¿cuál sería el primer número rojo? 10 — 3

Si los números verdes hubieran sido 5 y 8, ¿cuál sería el tercer número rojo? 34 — 5

	Primero	Segundo	
			8
Supongamos que el último número rojo fuera 343. ¿Cuáles serían los números verdes?	2	5	13

	Primero	Segundo	
			21
Supongamos que el último número rojo fuera 225. ¿Cuáles serían los números verdes?	5	1	34

	Primero	Segundo	
			55
Supongamos que el último número rojo fuera 127, ¿cuáles serían los números verdes?	0,5	2	89

(¡Cuidado! Estos números verdes pueden no ser enteros)

Supongamos que el último número rojo fuera 305, ¿cuáles serían los números verdes?

UN POCO MÁS DE FIBONACCI

Escribe los números 0 y 1 en las casillas verdes. La sucesión que obtendrás se llama de Fibonacci (nombre de Leonardo de Pisa, que era hijo de

Describe en qué sitio de la sucesión hay números pares.

Explica porque los números pares aparecen de esta forma.

¿Con qué frecuencia encontramos múltiplos de 3 en la sucesión?

¿Con qué frecuencia encontramos múltiplos de 5 en la sucesión?

Investiga para otros múltiplos. ¿Dónde aparecen en la sucesión?

¿Hay algunos múltiplos que no salen nunca en la sucesión?

Explica los resultados que has obtenido.

0
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55

Más ampliaciones

- El rectangle de cinc caselles de sota s'ha emplenat seguint la regla de Fibonacci.

12	7	19	26	45

Si ara tenim un rectangle en el qual només hi ha el primer i darrer nombres,

5				28

pots acabar d'emplenar les altres caselles?

Ara prova de fer-ho amb els següents rectangles:

1				44

2				73

2				2005

-3				2004

2				5

- Pots trobar una regla senzilla que permeti emplenar fàcilment les caselles buides? Pots justificar perquè funciona?

- Ara considera la mateixa situació, però amb un rectangle de 6 caselles:

3					29

Com el pots acabar d'emplenar? I aquests altres?

7					101

-12					329

1					7

Explica i justifica la regla en aquest cas.

- I si els rectangles tinguessin 7 caselles com ara els següents:

4						84

-3						133

20						1560

1						15

Explica, també, la regla en aquest cas.

- Pots trobar una regla general per a un rectangle amb qualsevol nombre ***n*** de caselles?
- Suposa, ara, que tornem a tenir el rectangle de 5 caselles, però canviant la regla de "sumar" per la de "restar" els nombres de les caselles.

9	2	7	-5	12

Amb aquesta regla, pots emplenar aquest rectangle?

100				170

- I si canviem la regla de "sumar" per "multiplicar" els nombres de les caselles?

2	3	6	18	108

Amb aquesta nova regla, pots emplenar els següents rectangles?

2				500

-4				128

Explica i justifica, també, la regla que trobis per a aquests dos darrers casos.

- Inventa't alguna altra regla diferent. Explica-la al teu company i proposa-li que empleni el rectangle de 5 caselles en el que prèviament tu hi hauràs escrit el primer i cinquè nombres.

La fuente original de estas hojas de cálculo es:

MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING with Interactive Spreadsheets
-Paul Andrews- ATM (Associations of teachers of mathematics),
- DERBY UK 2004