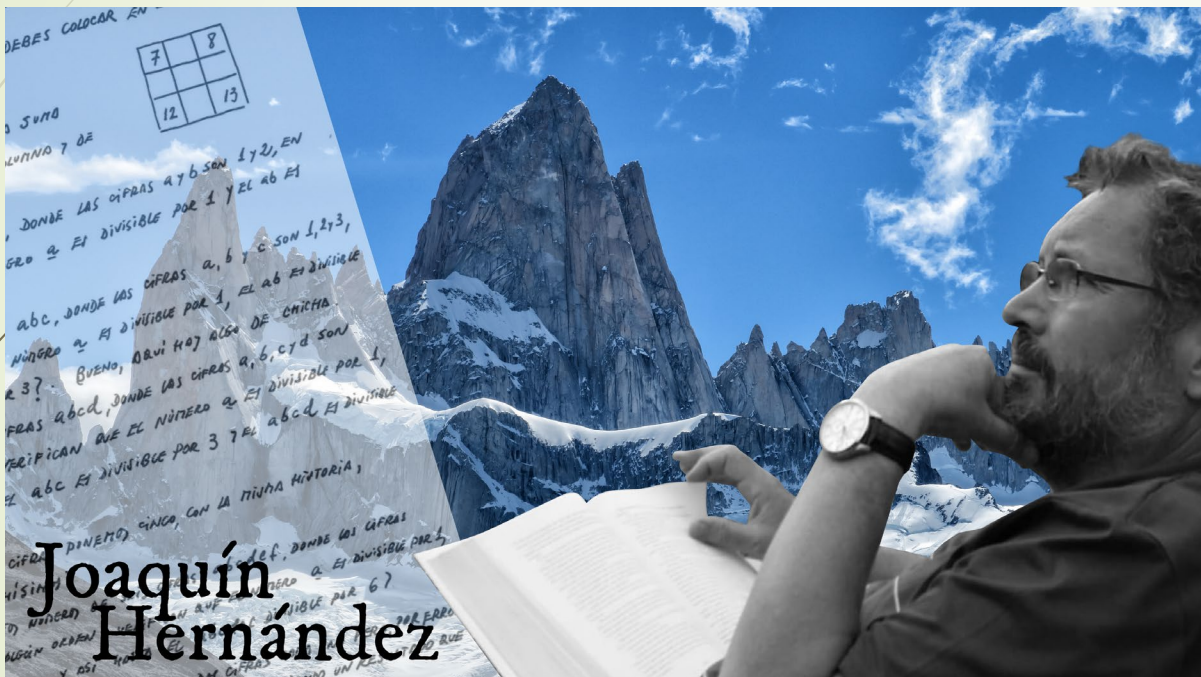


NOTAS SOBRE ESTALMAT-4 EN LA COMUNIDAD DE MADRID

HOMENAJE A JOAQUÍN HERNÁNDEZ (1953-2018)



Montaje de
Carlos Vinuesa
del Río

Eugenio Hernández
Universidad Autónoma de
Madrid
Castro Urdiales
5 de abril de 2025



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



Unas notas sobre una actividad en Estalmat Madrid

Joaquín Hernández - 2012

UNAS NOTAS SOBRE UNA ACTIVIDAD EN ESTALMAT MADRID

Como todos sabéis, desde hace varios años desarrollamos en ESTALMAT Madrid unas sesiones con estudiantes de los últimos años de ESO y de Bachillerato. La gran mayoría de estos estudiantes provienen de los dos años de ESTALMAT aunque hay algunos que, bien porque no conocieron ESTALMAT en su día, bien porque no fueron seleccionados, solicitan ser admitidos para estas actividades y son admitidos sin ningún problema por nuestra parte. Tenemos dos grupos, uno para estudiantes que aún cursan ESO y otro para estudiantes de Bachillerato. El número de estudiantes de cada grupo nunca ha rebasado los 25 y esa es la razón fundamental por la que no ponemos ninguna pega a cualquier chico que quiere asistir a estas sesiones.

La duración de las actividades en cada uno de los grupos es de 2 cursos aunque hay estudiantes que en el grupo de ESO están sólo 1 curso pues acabaron ESTALMAT cuando cursaron 3º ESO. En el grupo de Bachillerato todos los estudiantes están durante los dos años de Bachillerato. Creemos que es importante resaltar esto porque, a fin de evitar repeticiones de temas en alguno de los grupos, la programación para cada uno de ellos debe hacerse para dos años, con otras palabras, durante dos años consecutivos no deberían repetirse los temas a tratar y lo ideal es que los temas que se desarrollen en Bachillerato no se hayan visto antes, ni en el grupo de ESO ni, por supuesto, en las sesiones normales de ESTALMAT.

La periodicidad de las sesiones es mensual, por lo que el número de actividades a desarrollar en un programa de dos años será 16. Cada una de las sesiones es de 3 horas, excepto un período de descanso que suele ser de 20 minutos, es decir, que los temas a elegir para cada sesión deben ser desarrollados en poco más de 2 horas y media.

Durante los últimos años, mi trabajo en ESTALMAT ha estado casi exclusivamente dedicado al grupo de Bachillerato de estos estudiantes, los “jubilados” como les llamamos, aunque a algunos de nosotros, no de los chicos, no les gusta excesivamente esta palabra.

Una muestra de lo que he hecho es la que tenéis en vuestras manos: la programación de los dos años y dos de las sesiones, junto a la Bibliografía que he consultado para desarrollarla. Es importante resaltar que, aunque la mayoría de los estudiantes que asisten son realmente buenos, no dejan de ser estudiantes de Bachillerato y, más de la mitad, de 1º de Bachillerato. Así pues, tienen que estar excluidos automáticamente cualesquiera temas que conlleven herramientas como, por ejemplo, cálculo integral, incluso, cuestiones relacionadas con la derivada, salvo -estas últimas- si se tocan en la actividad del mes de Mayo.

Por otra parte, a estos chicos ya les hemos “mal acostumbrados” a que en Matemáticas es mucho más interesante hacer que escuchar. Así pues, mientras sea posible, deberíamos desarrollar nuestras actividades con esa filosofía.

Finalmente, como habéis deducido ya, el orden de las actividades es prácticamente aleatorio, salvo, posiblemente, la última de uno de los dos años, la relativa al número e , en la que puede ser conveniente utilizar algo de la derivada.

Y, por supuesto, aunque no puedo estar ahora con vosotros, sí que me presto a cualquier tipo de consulta en cualquier momento, tanto en los próximos cursos como en éste que, aunque tenga algo menos de energía, tengo mucho más tiempo.

Un abrazo a todos

Joaquín Hernández

Temas desarrollados por Joaquín Hernández en Estalmat Madrid para alumnos de Bachillerato

1^{er} año

1. Cuestiones sobre irracionales (Octubre 1º) [10], [13], [18].
2. Algunas cuestiones no elementales de combinatoria: soluciones en enteros de ecuaciones del tipo $x_1 + \dots + x_k = m$. Combinaciones con repetición. Soluciones con restricciones. (Noviembre 1º) [9], [10], [13], [14].
3. El número π (igualdad de las constantes en la longitud de la circunferencia y el área del círculo, la media de la descomposición de un número en suma de dos cuadrados, la serie de los inversos de los cuadrados, la probabilidad de que una fracción sea irreducible) (Diciembre 1º) [7], [13], [20].
4. Máximos y mínimos sin cálculo diferencial (Excluir el problema isoperimétrico) (Enero 1º) [19].
5. - El problema isoperimétrico.
- El descenso infinito de Fermat (Febrero 1º) [11], [12], [19], [20].
6. Los números construibles con regla y compás. Los trisectores (Marzo 1º) [14], [15], [16].
7. Temas pitagóricas. (Abril 1º) [12], [26].
8. El número áureo y la sucesión de Fibonacci. (Mayo 1º) [12].

2º año

1. Cuestiones elementales de geometría en ESO. (Teorema de Tales, concurrencia de las medianas, teorema de la bisectriz, etc) (Octubre 2º) [21], [25], [27], [28].
2. Cuestiones sobre probabilidad. Desarrollo histórico, resultados inesperados (Noviembre 2º) [1], [2], [5].
3. Demostraciones sin palabras. (Diciembre 2º) [21], [25], [27], [28].
4. Algunas cuestiones elementales sobre teoría de números (Enero 2º) [7], [8], [9], [12], [22], [23], [26].
5. Paradojas y argumentos falaces en diversos campos de las Matemáticas. (Febrero 2º) [3], [4].
6. Algunas series notables. (Marzo 2º) [6], [20], [24].
7. Un paseo por el libro de M. Erickson (Aha! Solutions) MAA (Colecc. Spectrum) (Abril 2º) [13].
8. El número e . Una introducción más natural. Apariciones sorprendentes del $n^\circ e$ en diversas situaciones (fundamentalmente de probabilidad). (Mayo 2º) [12], [17], [18].

Bibliografía

- [1] Los inicios de la Teoría de la Probabilidad (Siglos XVI y XVII). Marisol de Mora Charles. Servicio Editorial Universidad País Vasco.
- [2] Mathematical Plums. Ross Honsberger. Mathematical Association of America (M.A.A.).
- [3] Mathematical Fallacies, Flaws and and Flimflam. Edward J. Barbeau. M.A.A.
- [4] Paradojas Matemáticas. Northrop. Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana.
- [5] Dados, monedas y urnas. Víctor Hernández y Ricardo Vélez. UNED.
- [6] Proofs without words. Roger B. Nelsen. Vols I y II. M.A.A.
- [7] Viaje a través de los genios. Dunham. Pirámide.
- [8] Círculos matemáticos. Fomin y otros. SM - RSME.
- [9] How to count without counting. Ivan Niven. M.A.A.
- [10] Numbers. Rational and Irrational. Ivan Niven. M.A.A.
- [11] Aventuras matemáticas. Miguel de Guzmán. Pirámide.
- [12] Excursions in Calculus. Robert M. Young M.A.A.
- [13] Aha! Solutions. Martin Erickson. M.A.A.
- [14] ¿Qué son las matemáticas? Courant y Robbins. Notas de Ian Stewart. Fondo de Cultura Económica.
- [15] Famous problems of Geometry and how to solve them. Benjamin Bolth. Dover Publications.
- [16] Episodes from the Early History of Mathematics. Asger Aaboe M.A.A.
- [17] Matemáticas II. SM.
- [18] A Century of Calculus. Tom Apostol y otros M.A.A.
- [19] Maxima and Minima Without Calculus. Ivan Niven M.A.A.
- [20] El ingenio en las Matemáticas. Ross Honsberger. Editorial Euler.
- [21] Math Made Visual. Claudi Alsina y Roger Nelsen MAA
- [22] Calculus Gems. George F. Simmons M.A.A.
- [23] Biscuit in number theory. Arthur T. Benjamin M.A.A.
- [24] Real infinite series. Bonar and Khoury M.A.A.
- [25] Episodes in XIX and XX Century Euclidean Geometry. Ross Honsberger M.A.A.
- [26] The Geometry of numbers. Olds y otros M.A.A.
- [27] Matemática elemental desde un punto de vista superior. Volumen I (Álgebra, Geometría y Análisis). Félix Klein. Nivola.
- [28] When Less is More. Visualizing Basic Inequalities. Claudi Alsina y Rogers Nelsen M.A.A.

Curso 2020-21

- Desigualdades
- Teorema de Eduard Lucas
- Probabilidad y tenis
- Series de números positivos

Curso 2021-22

- Construcciones con regla y compás
- Números perfectos
- Juegos con cuentas. Tangram convexos
- Apariciones sorprendentes de π
- Problemas cuadráticos

Curso 2022-23

- Desigualdades
- Series de números positivos
- Probabilidad y tenis
- Teorema de Eduard Lucas

Curso 2023-24

- Juegos con cuentas
- Problemas cuadráticos
- Matemáticas al Esprint
- Números perfectos
- Apariciones sorprendentes de π

Curso 2024-25

- Fracciones continuas I
- Fracciones continuas II
- Matemáticas al Esprint
- Construcciones con regla y compás

**Actividades
desarrolladas
por EH para
Estalmat-4**

El teorema de Édouard Lucas

TEOREMA DE LUCAS - 1877

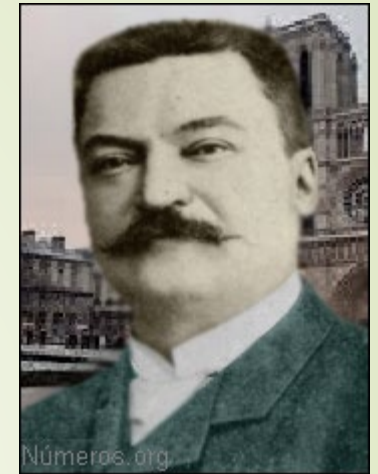
Sean k, n números naturales, $0 \leq k \leq n$, y p un número primo.
Escribir

$$n = a_\ell a_{\ell-1} \dots a_1 a_0 (\text{base } p),$$

$$k = b_\ell b_{\ell-1} \dots b_1 b_0 (\text{base } p).$$

Entonces

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{a_\ell}{b_\ell} \binom{a_{\ell-1}}{b_{\ell-1}} \dots \binom{a_1}{b_1} \binom{a_0}{b_0} (\text{mod } p).$$



Édouard Lucas
(1842-1891)
Wikipedia

- ❖ I. Steward, *Game, Set, and Math*, Penguin Books, 1989.
- ❖ www.cut-the-knot.org, Lucas Theorem, I and II.

Tenis y probabilidad (I)



PREGUNTA

Se observa experimentalmente que la probabilidad de un jugador A gane un punto a otro jugador B es $p = 0,6$.

¿Cuál es la probabilidad de que B gane a A un partido de tenis a tres sets con desempate en todos ellos?

❖ I. Steward, *Game, Set, and Math*, Penguin Books, 1989.

Tenis y probabilidad (II): Minitenis

Tenemos dos jugadores A y B y un árbitro. El árbitro lanza una moneda regular. Si sale cara, A se lleva un punto. Si sale cruz, B se lleva un punto.

Si A se adelanta a B por 3 puntos, A gana el partido.

Si B se adelanta a A por 3 puntos, B gana el partido.

Si nadie ha ganado después de 10 lanzamientos el árbitro declara que hay empate. Juega unas cuantas veces para ver quién gana.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A? ¿Cuál es la probabilidad de que gane B? ¿Cuál es la probabilidad de que haya empate?
5. Ahora jugamos sin empate. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A en este caso? ¿y la de que gane B?

❖ I. Steward, *Game, Set, and Math*, Penguin Books, 1989.

Gana A



Gana B



	0	1	2	3	4	5	6	Prob
0		1	1	1				$1/2^3$
1	1	2	3	3	3			$3/2^5$
2	1	3	6	9	9	9		$9/2^7$
3	1	3	9	18	27	27	27	$27/2^9$
4		3	9	27	54	81	81	
5			9	27	81	162		
6				27	81			
Prob	$1/2^3$	$3/2^5$	$9/2^7$	$27/2^9$				

Gana A



Gana B



	0	1	2	3	4	5	6	Prob
0		1	1	1				$1/2^3$
1	1	2	3	3	3			$3/2^5$
2	1	3	6	9	9	9		$9/2^7$
3	1	3	9	18	27	27	27	$27/2^9$
4		3	9	27	54	81	81	
5			9	27	81	162		
6				27	81			
Prob	$1/2^3$	$3/2^5$	$9/2^7$	$27/2^9$				

$$\text{Prob}(\text{GaneA}) = \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{9}{2^7} + \frac{27}{2^9} = \frac{175}{512} \approx 0,341797$$

Gana A



Gana B



	0	1	2	3	4	5	6	Prob
0		1	1	1				$1/2^3$
1	1	2	3	3	3			$3/2^5$
2	1	3	6	9	9	9		$9/2^7$
3	1	3	9	18	27	27	27	$27/2^9$
4		3	9	27	54	81	81	
5			9	27	81	162		
6				27	81			
Prob	$1/2^3$	$3/2^5$	$9/2^7$	$27/2^9$				

$$\text{Prob}(\text{GaneA}) = \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{9}{2^7} + \frac{27}{2^9} = \frac{175}{512} \approx 0,341797$$

$$\text{Prob}(\text{Empate}) = \frac{81}{2^{10}} + \frac{162}{2^{10}} + \frac{81}{2^{10}} = \frac{324}{2^{10}} \approx 0,316406$$

Probabilidad de ganar un juego en tenis

Gana A



Gana B



$q = 1 - p$ = prob de que B gane un punto

p = prob de que A gane un punto

	0	15	30	40				Prob
0		1	1	1	1			p^4
15	1	2	3	4	4			$4p^4q$
30	1	3	6	10	10			$4p^4q^2$
40	1	4	10	20	20	20		$20p^5q^3$
	1	4	10	20	40	40	40	$40p^6q^4$
				20	40	80	80	
					40	80	160	
Prob	q^4	$4q^4p$	$4q^4p^2$	$20q^5p^3$	$40q^6p^4$			

Probabilidad de ganar un juego en tenis

Gana A



Gana B



$q=1-p$ = prob de que B gane un punto

p = prob de que A gane un punto

	0	15	30	40				Prob
0		1	1	1	1			p^4
15	1	2	3	4	4			$4p^4q$
30	1	3	6	10	10			$4p^4q^2$
40	1	4	10	20	20	20		$20p^5q^3$
	1	4	10	20	40	40	40	$40p^6q^4$
				20	40	80	80	
					40	80	160	
Prob	q^4	$4q^4p$	$4q^4p^2$	$20q^5p^3$	$40q^6p^4$			

$J = \text{Prob}(A \text{ gane un juego})$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^5q^3 + 40p^6q^4 + 80p^7q^5 + \dots$$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2(1 + 2pq + 4p^2q^2 + 8p^3q^3 + \dots)$$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 \frac{1}{1 - 2pq}$$

Probabilidad de ganar un juego en tenis

Gana A



Gana B



$q=1-p$ = prob de que B gane un punto

p = prob de que A gane un punto

	0	15	30	40				Prob
0		1	1	1	1			p^4
15	1	2	3	4	4			$4p^4q$
30	1	3	6	10	10			$4p^4q^2$
40	1	4	10	20	20	20		$20p^5q^3$
	1	4	10	20	40	40	40	$40p^6q^4$
				20	40	80	80	
					40	80	160	
Prob	q^4	$4q^4p$	$4q^4p^2$	$20q^5p^3$	$40q^6p^4$			

$J = \text{Prob}(A \text{ gane un juego})$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^5q^3 + 40p^6q^4 + 80p^7q^5 + \dots$$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2(1 + 2pq + 4p^2q^2 + 8p^3q^3 + \dots)$$

$$= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 \frac{1}{1 - 2pq}$$

$p=0,6, q=0,4$

$J= 0,735729$

$K=1-J = 0,264270$

Probabilidad de ganar un partido de tenis

p = prob de que A gane un punto

$q=1-p$ = prob de que B gane un punto

p	q	A gana el partido	B gana el partido
0.1	0.9	1.11529E-29	1
0.2	0.8	1.39122E-15	1
0.3	0.7	8.43651E-08	0.999999916
0.4	0.6	0.003913629	0.996086371
0.5	0.5	0.5	0.5
0.6	0.4	0.996086371	0.003913629
0.7	0.3	0.999999916	8.43651E-08
0.8	0.2	1	0
0.9	0.1	1	0

Probabilidad de ganar un partido de tenis

p = prob de que A gane un punto

$q=1-p$ = prob de que B gane un punto

