ESTALMAT — ESTIMUL TALENT MATEMÀTIC

ESTALMAT-Catalunya és un projecte de

feemcat

El producto de matrices a partir del problema de los puentes de Köningsberg

Pura Fornals Sánchez (pfornals@xtec.cat)

MMACA y INS Francesc Macià, Cornellà

Mireia López Beltran (mireia.lopez@gmail.com)

ICE Universitat Politècnica de Catalunya

Universitat Pompeu Fabra, Barcelona

INTRODUCCIÓN

En el proyecto ESTALMAT-Catalunya se realizan 21 sesiones de tres horas los sábados por la mañana durante dos cursos.

Los alumnos de segundo curso tienen entre 12 y 14 años en el mes de septiembre.

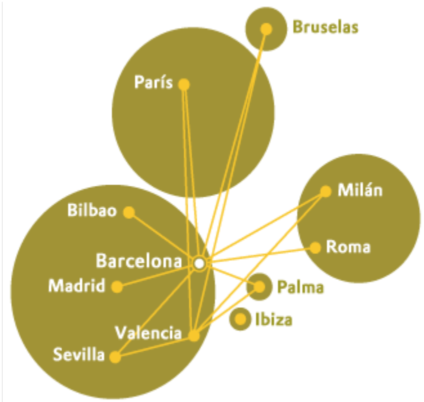
Desde hace seis años en el segundo curso de ESTALMAT-Cataluña hay dos sesiones Grafos (I) y Grafos (II) que impartimos las autoras de esta comunicación.

TRABAJANDO CON GRAFOS

- 1a sesión
  - Introducción al concepto de grafo → Investigación a partir de una tabla/matriz
  - Introducción vocabulario y conceptos sobre grafos
- 2a sesión
  - Dibujos de un solo trazo
  - El problema de los puentes de Köningsberg
  - Los laberintos

Introducción al concepto de grafo

La primera sesión empieza planteándoles la siguiente situación:



El diagrama de vuelos de Vueling
El diagrama de arriba muestra las ciudades que conectan los vuelos de la aerolínea Vueling. En este tipo de diagramas, los segmentos que conectan dos puntos se llaman **aristas**. Un punto del cual salen dos a más aristas se llama **vértice**.

Además, se les indica que:
El gráfico de vuelos se puede acompañar de una tabla de conexiones :

	LLEGADA									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Bilbao	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bruselas	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Madrid	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Milán	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
París	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Palma	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Roma	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sevilla	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Valencia	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

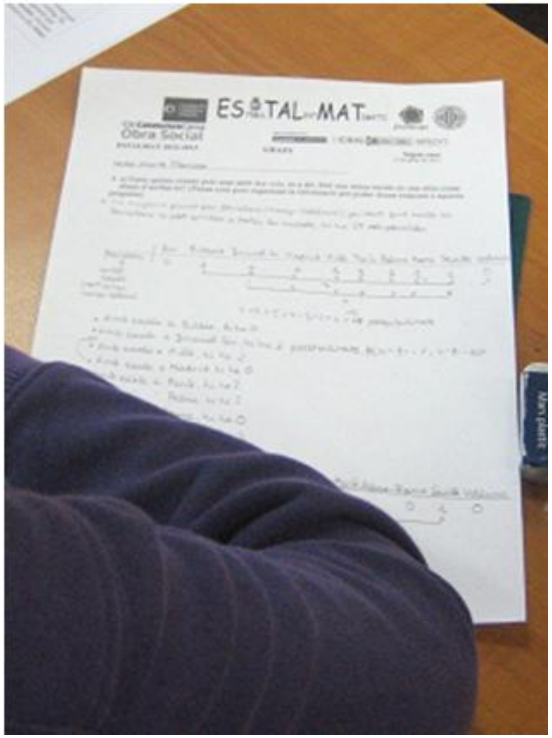
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE GRAFO

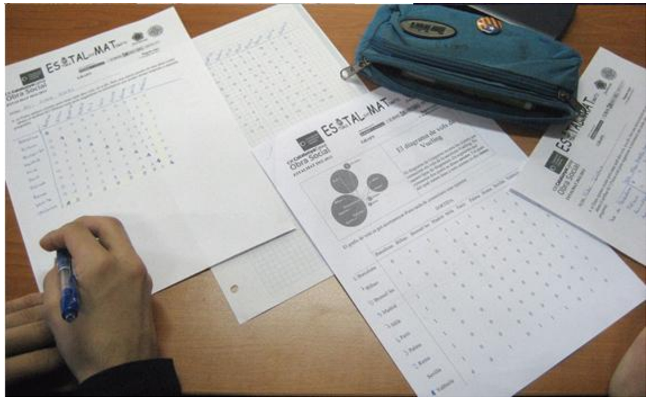
A partir de esta información se les hacen las siguientes preguntas:

1. ¿Qué pensáis que significan los ceros y unos que aparecen?
2. Decidid si estas afirmaciones son ciertas:
   - No hay vuelos de Roma a Madrid
   - Desde Valencia, hay cuatro conexiones directas a otras ciudades
   - Los vuelos son siempre de ida y vuelta
   - La ciudad de Sevilla se encuentra más aislada que Madrid.
3. **Vueling quiere conectar, sin hacer ninguna escala, cada una de las diez ciudades con todo el resto mediante vuelos. ¿Cuántas conexiones se tienen que añadir?**
4. **¿Entre qué ciudades puedes ir con dos vuelos, es decir haciendo una única escala en otra ciudad antes de llegar? ¿Y haciendo más de una escala?**

Vamos a contar vuelos

Para describir las ciudades a les que puedes ir con una escala (dos vuelos) los alumnos empiezan por hacer listas de todo tipo, más o menos exhaustivas y con diferentes tipos de codificaciones





VAMOS A CONTAR VUELOS

A continuación adjuntamos la tabla que indica el número de maneras diferentes que se puede ir de una ciudad a otra mediante una escala (es decir usando exactamente dos vuelos).

	UNA ESCALA – DOS VUELOS									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Bilbao	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Bruselas	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Madrid	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Milán	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
París	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Palma	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Roma	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Sevilla	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Valencia	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5

Vamos a contar vuelos

A partir de las dos tablas les preguntamos qué relaciones encuentran entre la primera tabla y la segunda .

Después entre todos vamos centrando la pregunta a si son capaces de deducir cómo a partir de la primera tabla se "calcula" la segunda.

Aunque parezca mentira, excepto uno de los cinco años, un alumno o más de uno han sabido vincularlo con el producto de matrices de una manera más o menos acertada, teniendo en cuenta la simetría de la situación y por tanto de su matriz asociada.

VAMOS A CONTAR VUELOS

Los puntos clave de este caso, que les permite "ver" el producto de matrices, son (en la segunda tabla)

	UNA ESCALA – DOS VUELOS									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	**8**	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**
Bilbao	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Bruselas	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Madrid	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Milán	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
París	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Palma	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Roma	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Sevilla	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Valencia	**5**	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**

Vamos a contar vuelos

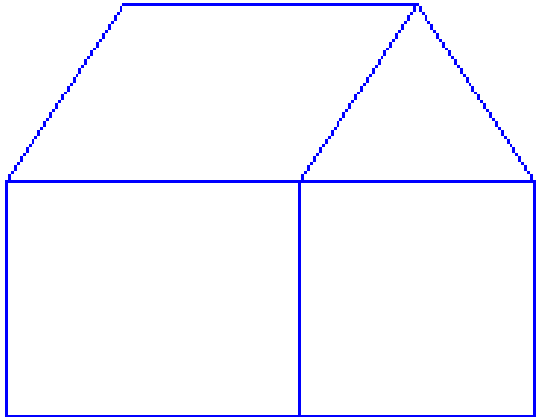
Y, en la primera tabla, todos los unos de la primera fila que corresponden a los 8 vuelos que hay entre Barcelona y todas las otras ciudades de la tabla excepto la misma Barcelona y Valencia.

	LLEGADA									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0
Bilbao	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bruselas	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Madrid	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Milán	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
París	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Palma	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Roma	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sevilla	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Valencia	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

Los puentes de Köningsberg

Al final de la primera sesión o mayoritariamente al inicio de la segunda les proponemos la actividad de los dibujos de un solo trazo. Después de poner en común la actividad, los alumnos llegan a las conclusiones que para poder realizar el dibujo de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo segmento, se debe cumplir que:

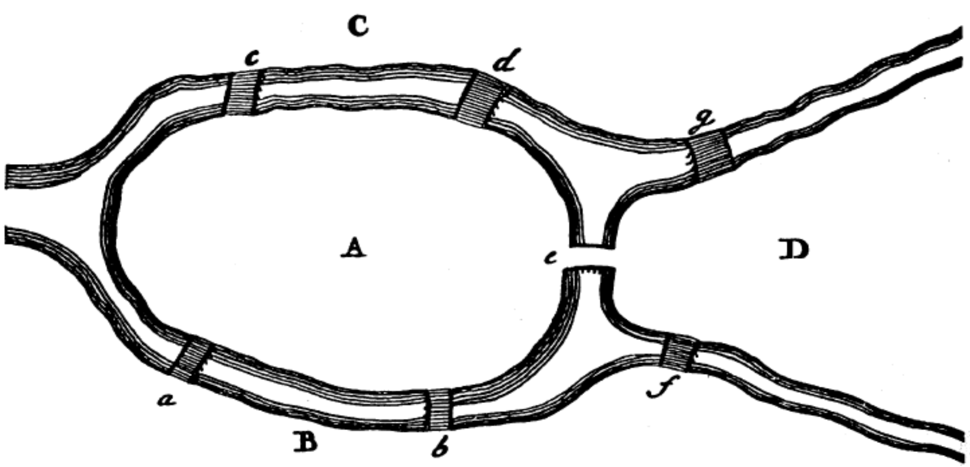
- Concurran un número de aristas par en cada vértice
- Pueden concurrir un número de aristas impar en un par de vértices, éstos serán el origen y el final del recorrido



Los puentes de Köningsberg

El problema de los puentes de Köningsberg es un clásico y por tanto no nos detendremos en él . Mencionamos dos referencias que creemos de interés [1] y [2].

En la sesión, nuestra aproximación a la resolución de la situación planteada por los ciudadanos de Köningsberg intenta seguir la resolución dada por Euler.



[1] Castrillón, M. (2009): Grafos y algunas amenidades topológicas. Pérez, A. y Sánchez, M. (coord.): Matemáticas para estimular el talento: actividades del proyecto Estalmat. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. págs. 19-34. Sevilla (España).
[2] Hopkins, B., Wilson, R. J. (2004). The Truth About Königsberg. The College Mathematics Journal, 35, pp. 198-207. URL: http://www.gss.ucsb.edu/Hopkins1.pdf

Los puentes de Köningsberg

También trabajamos los conceptos de grafo euleriano, de circuito cerrado y de grado de un vértice, para llegar al teorema de Euler:

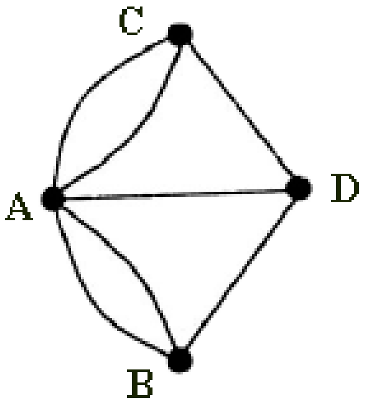
> “Existe un circuito euleriano en un grafo si y sólo si el grafo es conexo y cada vértice tiene grado par”.

Este teorema ha sido generalmente ya enunciado por los alumnos de manera intuitiva y con su propio vocabulario a partir de la actividad inicial de los dibujos de un solo trazo. En esta parte lo que hacemos es darle el vocabulario a las ideas que ellos habían ido deduciendo.

Estas dos actividades suelen llevarnos entre una hora y una hora y cuarto de trabajo y nos preparan para la siguiente actividad

El producto de matrices y su relación con el problema de grafos trabajado

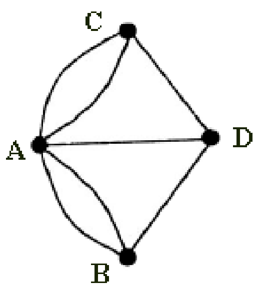
Una vez ya hemos trabajado el concepto de grafo, el de matriz y matriz asociada al grafo se les pide que cuenten de cuántas maneras diferentes podemos ir de C a D pasando por dos puentes.



Luego a partir del grafo del problema de los puentes de Köningsberg, tal y como lo han trabajado, se les pide que escriban su matriz asociada y la llamen M.

El producto de matrices y su relación con el problema de grafos trabajado

Tenemos el grafo y su matriz asociada, M:

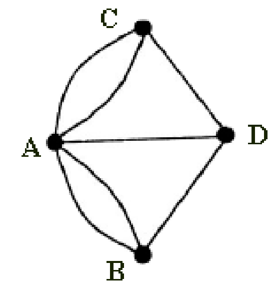


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego les pedimos que calculen M^2, la llamen N y que describan el significado del término n_{34} de la matriz que han calculado.

Y por tanto, $M^2 = N = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

El producto de matrices y su relación con el problema de grafos trabajado



Para interpretar el término n_{34} de la matriz M^2 observamos que son los caminos de segundo orden para ir de C a D, es decir:

$$n_{34}: \; 2\cdot 1 \; + \; 0\cdot 1 \; + \; 0\cdot 1 \; + \; 1\cdot 0 = 2$$

aristas de C a A · aristas de A a D

caminos de longitud 2 de C a D pasando per A

aristas de C a B · aristas de B a D

caminos de longitud 2 de C a D pasando per B

aristas de C a C · aristas de C a D

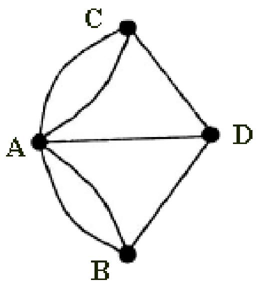
caminos de longitud 2 de C a D pasando per C

aristas de C a D · aristas de D a D

caminos de longitud 2 de C a D pasando per D

El producto de matrices y su relación con el problema de grafos trabajado

Para acabar de consolidar el concepto hacemos lo mismo con los caminos de A a D y con el elemento n_{14}



$$n_{14}:\ 0\cdot 1 \quad + \quad 2\cdot 1 \quad + \quad 2\cdot 1 \quad + \quad 1\cdot 0 = 4$$

aristas de A a A · aristas de A a D

caminos de longitud 2 de A a D pasando per A

aristas de A a B · aristas de B a D

caminos de longitud 2 de A a D pasando per B

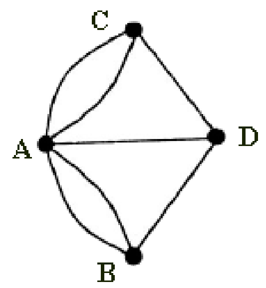
aristas de A a C · aristas de C a D

caminos de longitud 2 de A a D pasando per C

aristas de A a D · aristas de D a D

caminos de longitud 2 de A a D pasando per D

El producto de matrices y su relación con el problema de grafos trabajado



Si se considera oportuno, puede acabar de visualizarse:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n_{11} : \; 0 \cdot 0 \; + \; 2 \cdot 2 \; + \; 2 \cdot 2 \; + \; 1 \cdot 1 = 9$$

Para acabar la sesión relacionamos los grafos con los laberintos.

APRECIACIONES DIDÁCTICAS

- Experiencia en los últimos 6 años en ESTALMAT- Cataluña muy satisfactoria

- Se ha añadido la simplificación de la propuesta de vuelos para reforzar la idea entre los caminos de segundo orden y el producto de matrices. El problema de los puentes de Köningsberg ya se trabajaba y se consideró un buena oportunidad para consolidar este apartado.

- Las dos situaciones propuestas (vuelos y puentes de Köningsberg) son simétricas. Por ello, debe mencionarse explícitamente.

APRECIACIONES DIDÁCTICAS

- Se han realizado aplicaciones de parte de las sesiones en segundo de bachillerato, en un curso de primero de ingeniería y en el máster para profesorado.

- También se ha presentado en las XVI JAEM en Palma de Mallorca.