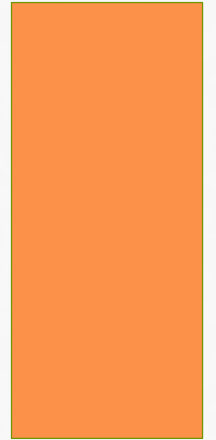


VII SEMINARIO SOBRE ACTIVIDADES PARA ESTALMAT

BARCELONA, ABRIL 2014

EL PROBLEMA DE LA GALERÍA DE ARTE

(SESIÓN DE 2º ESTALMAT-MADRID)



ÍNDICE

- Problema de la galería de arte
- Construcción de ejemplos
- Búsqueda de la sala con n vértices que necesite el mayor número de cámaras posible
- Enunciado y prueba de cuántas cámaras serán siempre suficientes (Fisk)
- Extensiones de este problema



(Serie Numb3rs. Episodio *Obsesión*)

Un desconocido entra en la casa de la cantante de música pop Skylar Wyatt y la asesina.

El agente Don Eppes se pregunta cómo es posible que **ninguna de las cámaras de seguridad** haya grabado la imagen del asesino. Charlie, hermano matemático de Don, colabora en la investigación averiguando **cómo estaban colocadas las cámaras**, dónde podían ver y dónde no. Para esto usa sus conocimientos sobre el "Problema de la Galería de Arte".

PROBLEMA Y ENUNCIADO

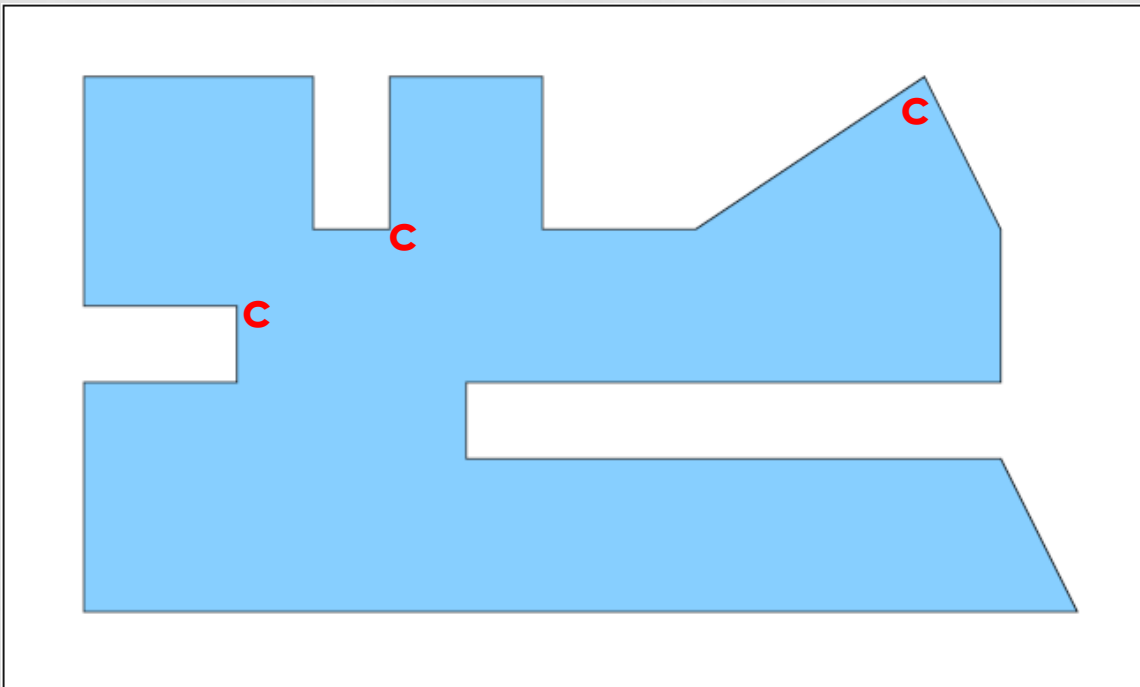
Dada una galería de arte cualquiera con n -paredes, determinar el *número mínimo de cámaras suficiente* para cubrir su interior.



Pregunta de Victor Klee a Václav Chvátal en 1973
Prueba Chvátal en 1975
Steve Fisk otra prueba en 1978

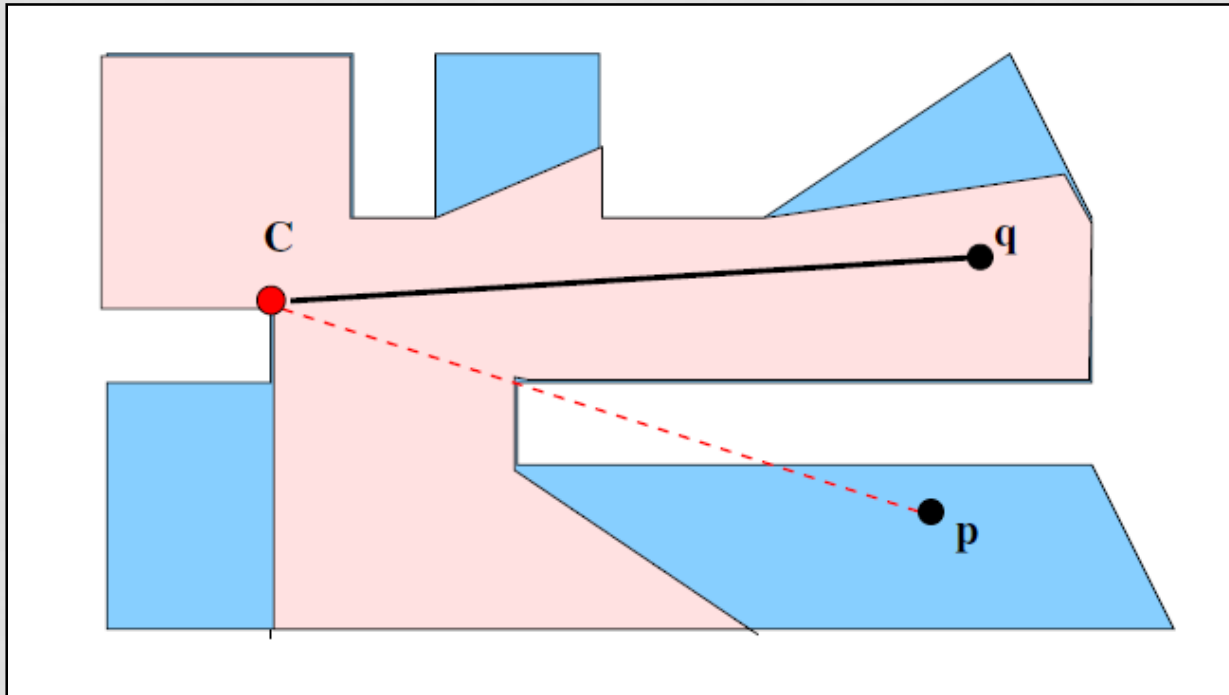
NUESTRA SITUACIÓN

- Galería **P** es un polígono simple
- Las cámaras **c** están colocadas en los vértices **v** del polígono



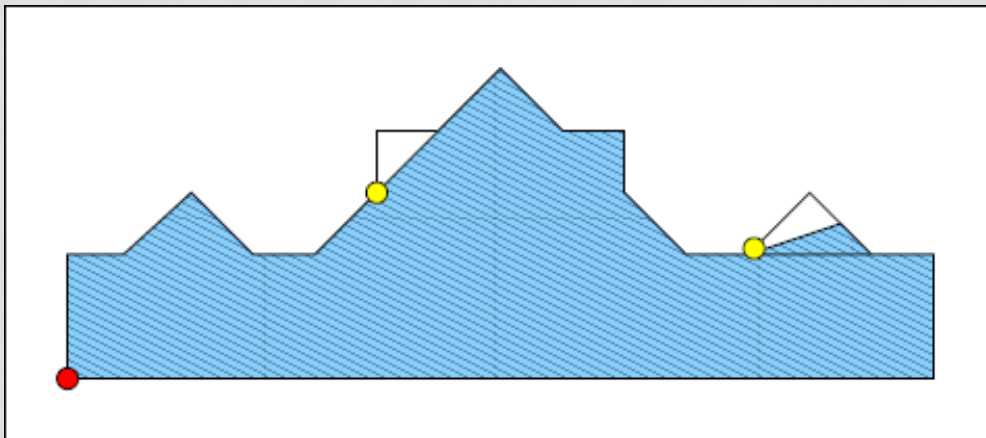
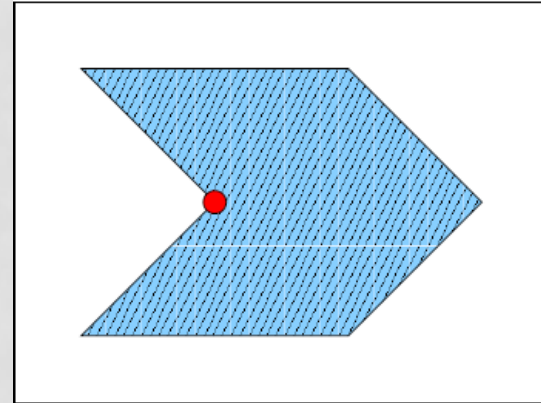
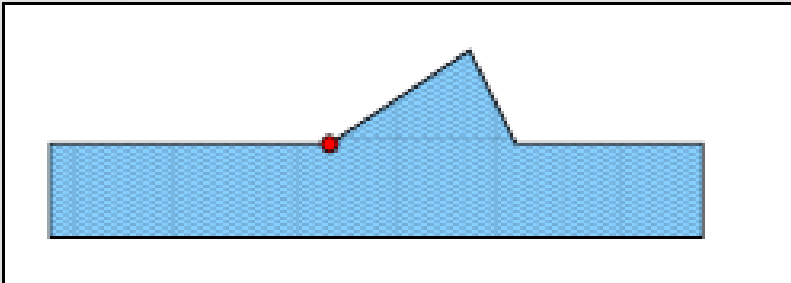
NUESTRA SITUACIÓN

- No tenemos en cuenta la altura de las paredes.
- Cámara c "ve" una región estrellada. Es decir, un punto q es visible desde c si $\overline{cq} \subseteq P$

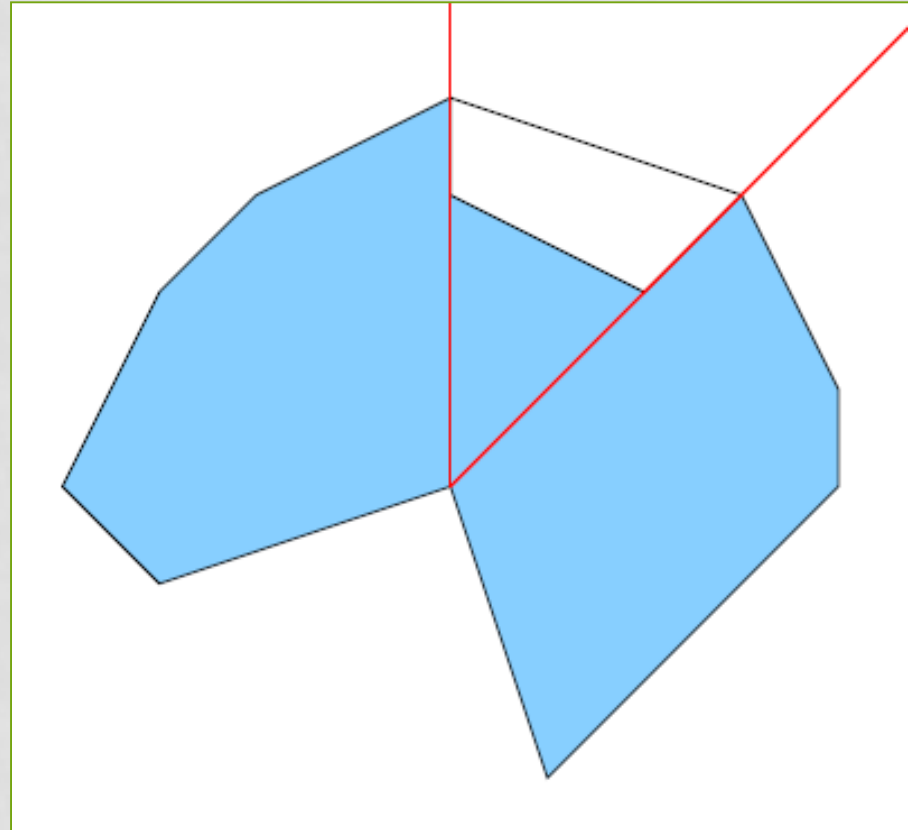
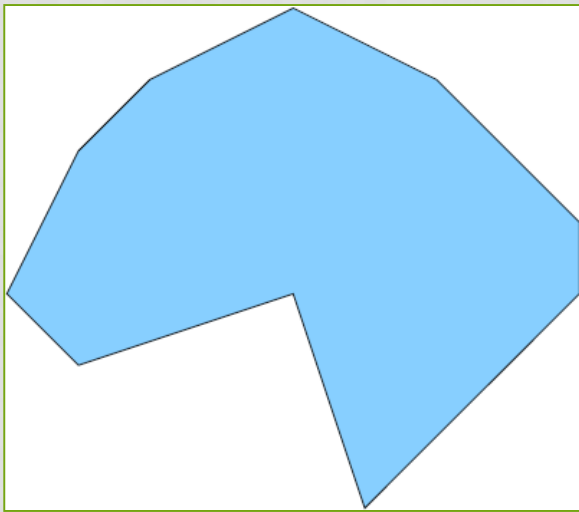


CONSTRUIMOS EJEMPLOS

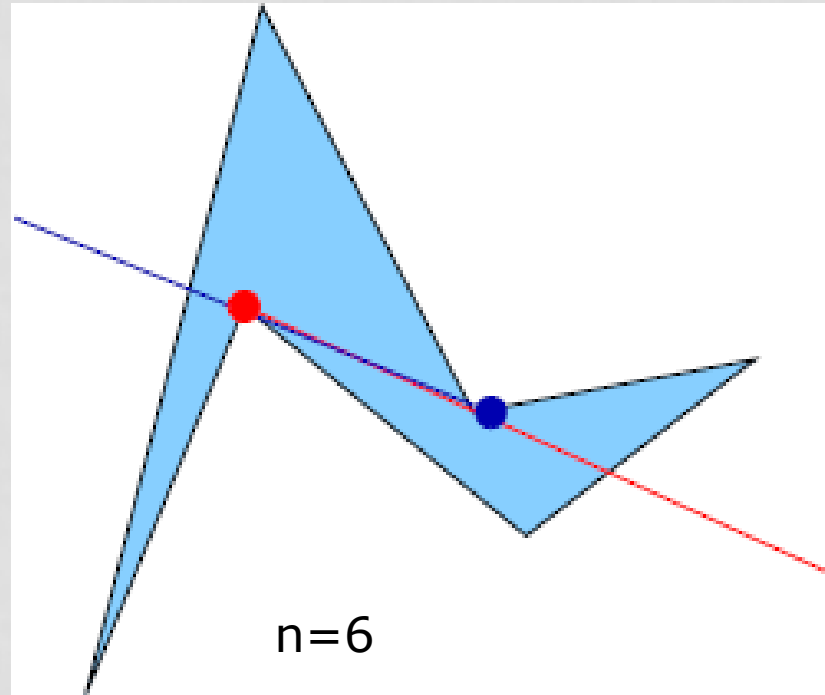
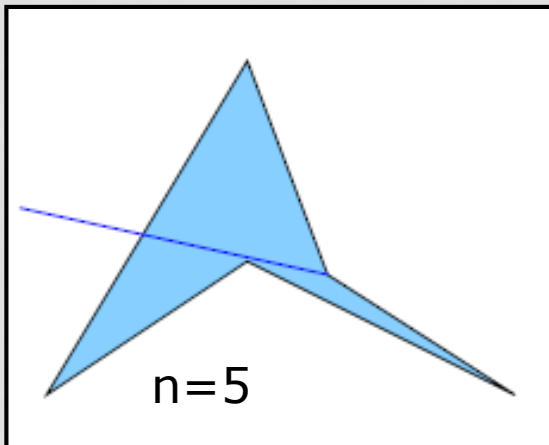
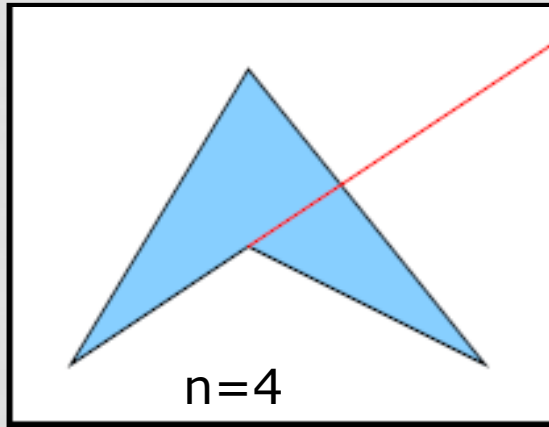
¿Cuál es el número mínimo de cámaras en las salas?



¿Cuándo podemos asegurar que **una cámara** es bastante para 3, 4, ... **n** vértices?

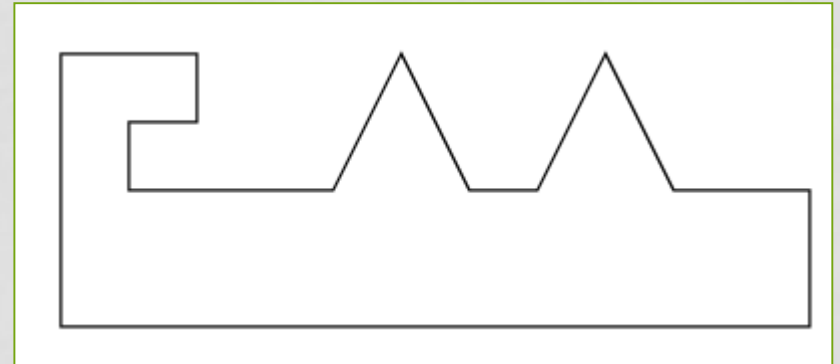
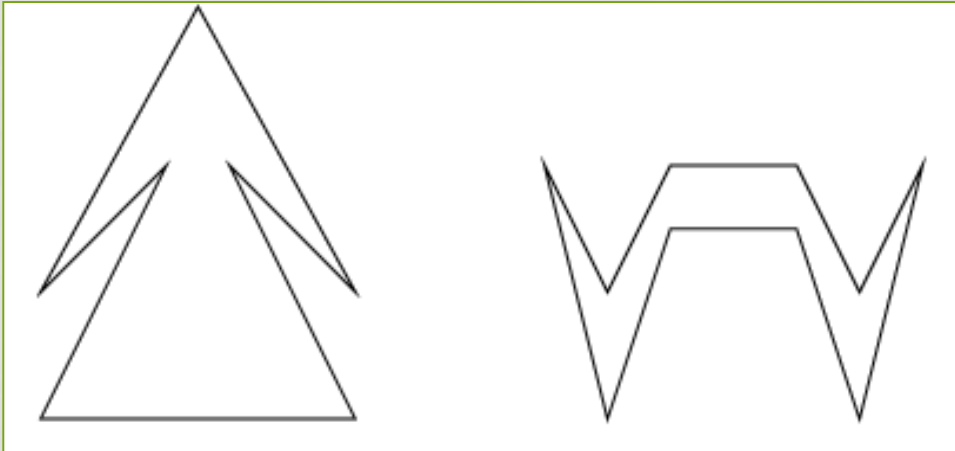


Construir ejemplos que necesiten **2 cámaras** exactamente. ¿Puedo hacerlo con **3** vértices? ¿con 4? ... **¿n?**



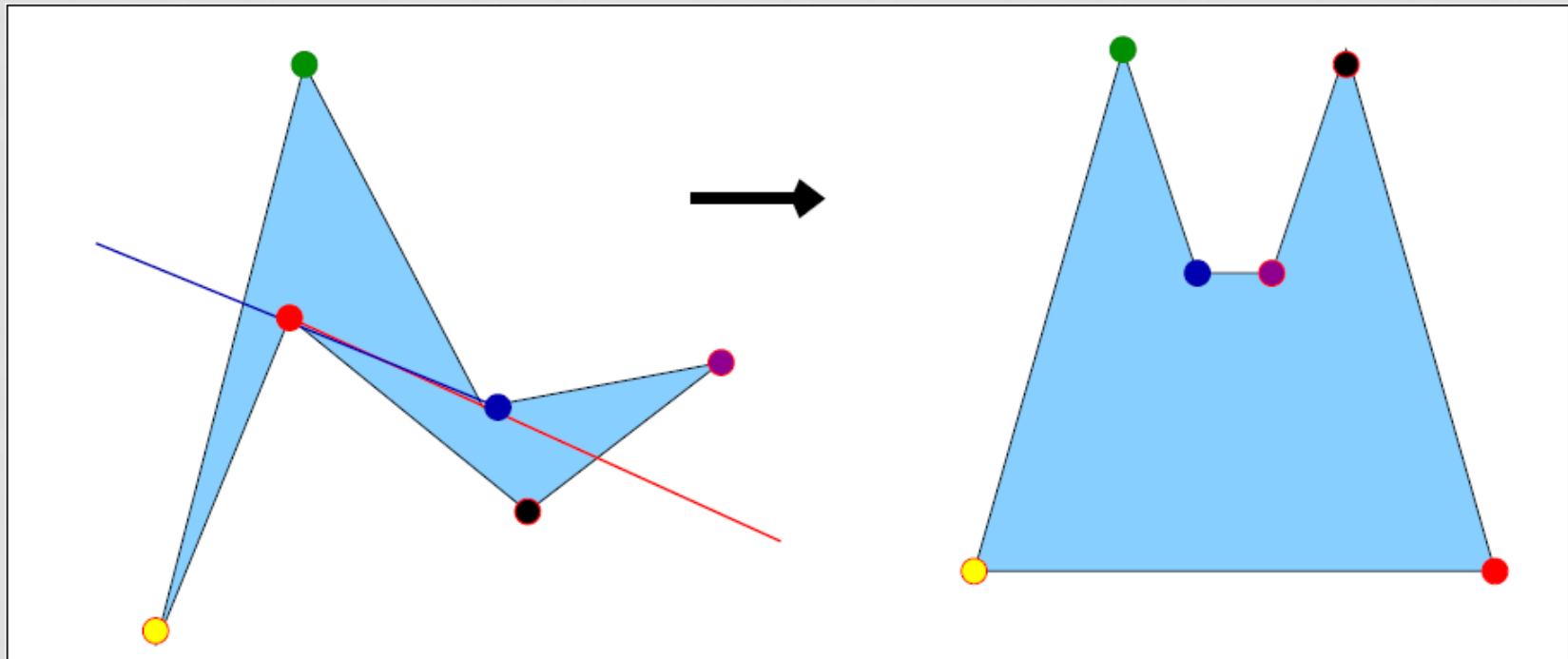
Para necesitar 2 cámaras, $n \geq 6$

Hallar el número mínimo de cámaras para:



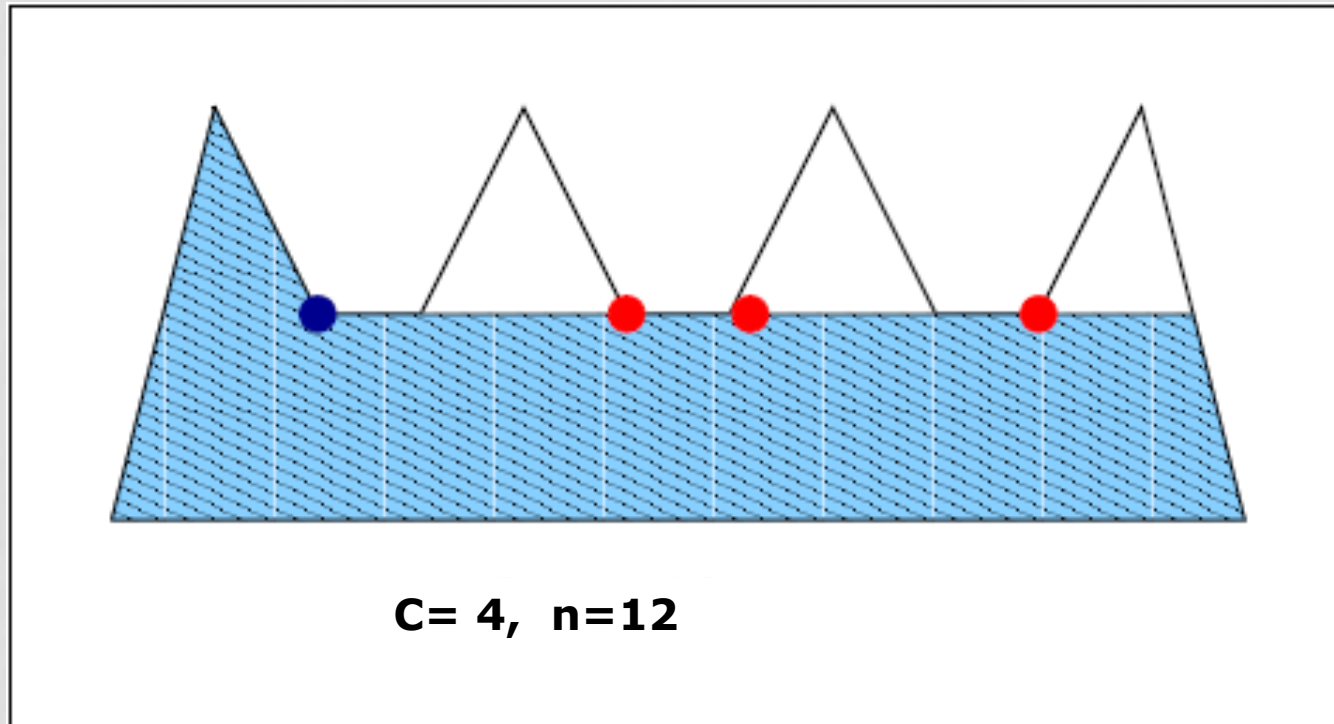
¿Puedes **eliminar algún vértice** de manera que el número de **cámaras** necesitado siga siendo el **mismo**?

Construir un ejemplo que necesite **exactamente 3**
cámaras, exactamente **4** ...



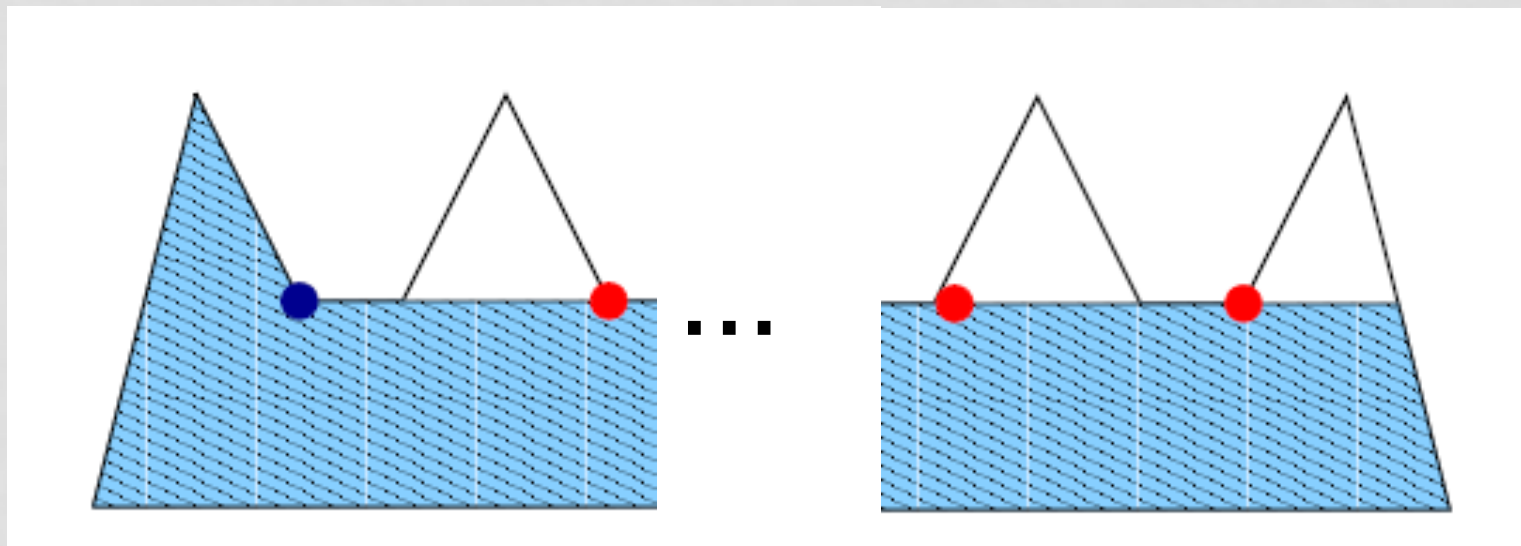
Recuerda ... ejemplo para exactamente 2 cámaras

Construir un ejemplo que necesite **exactamente 3** cámaras, exactamente **4** ...



¿Podríamos quitar algún vértice y seguir necesitando 4 cámaras?

Conjetura: para vigilar un polígono simple con n vértices $\lfloor n/3 \rfloor$ cámaras son a veces necesarias.

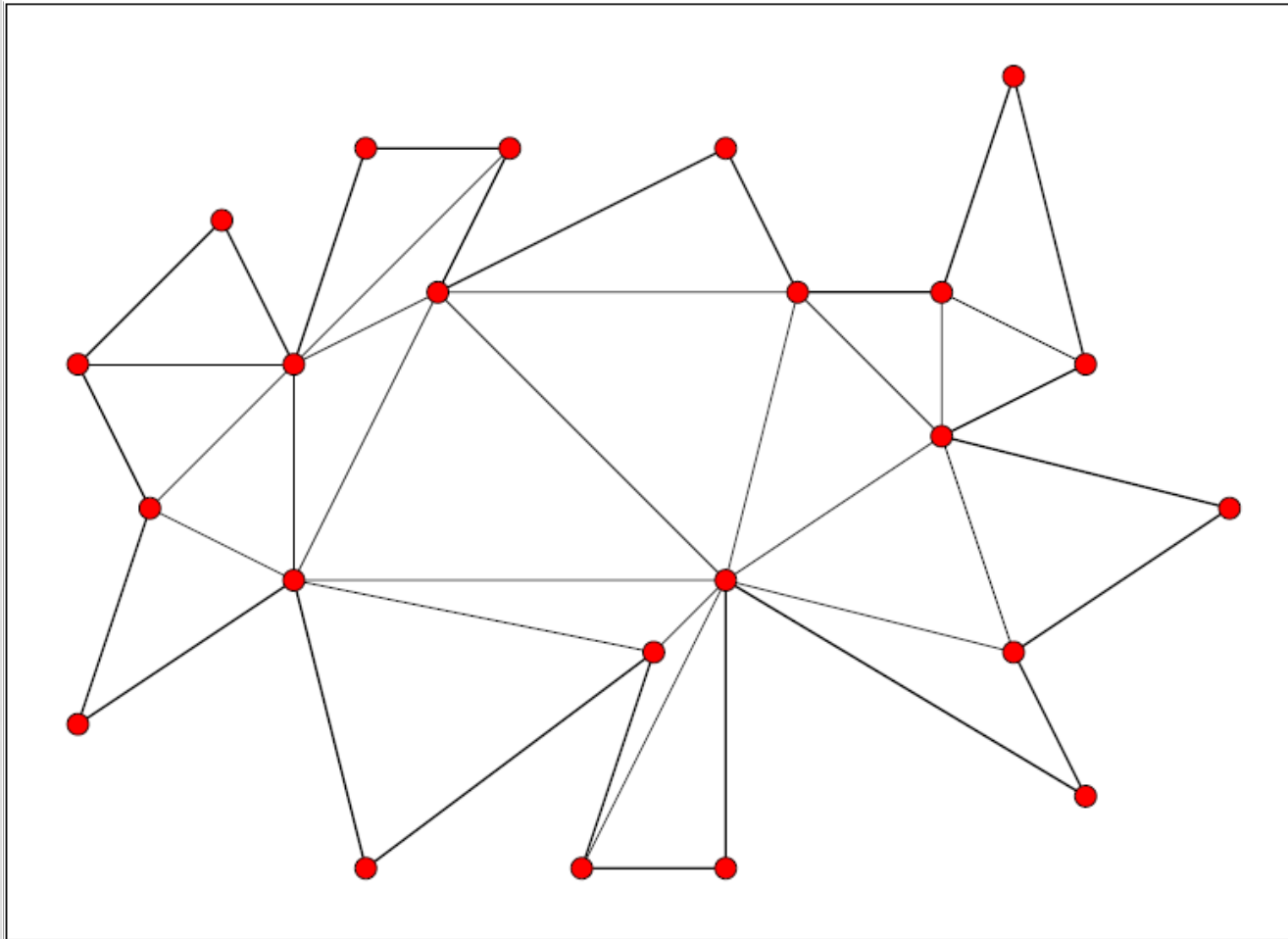


TEOREMA DE LA GALERÍA DE ARTE

Para vigilar un polígono simple con n vértices, $\lfloor n/3 \rfloor$ cámaras son a veces necesarias y siempre suficientes.

DEMOSTRACIÓN SUFICIENCIA (FISK)

1. Triangulamos (asumimos)



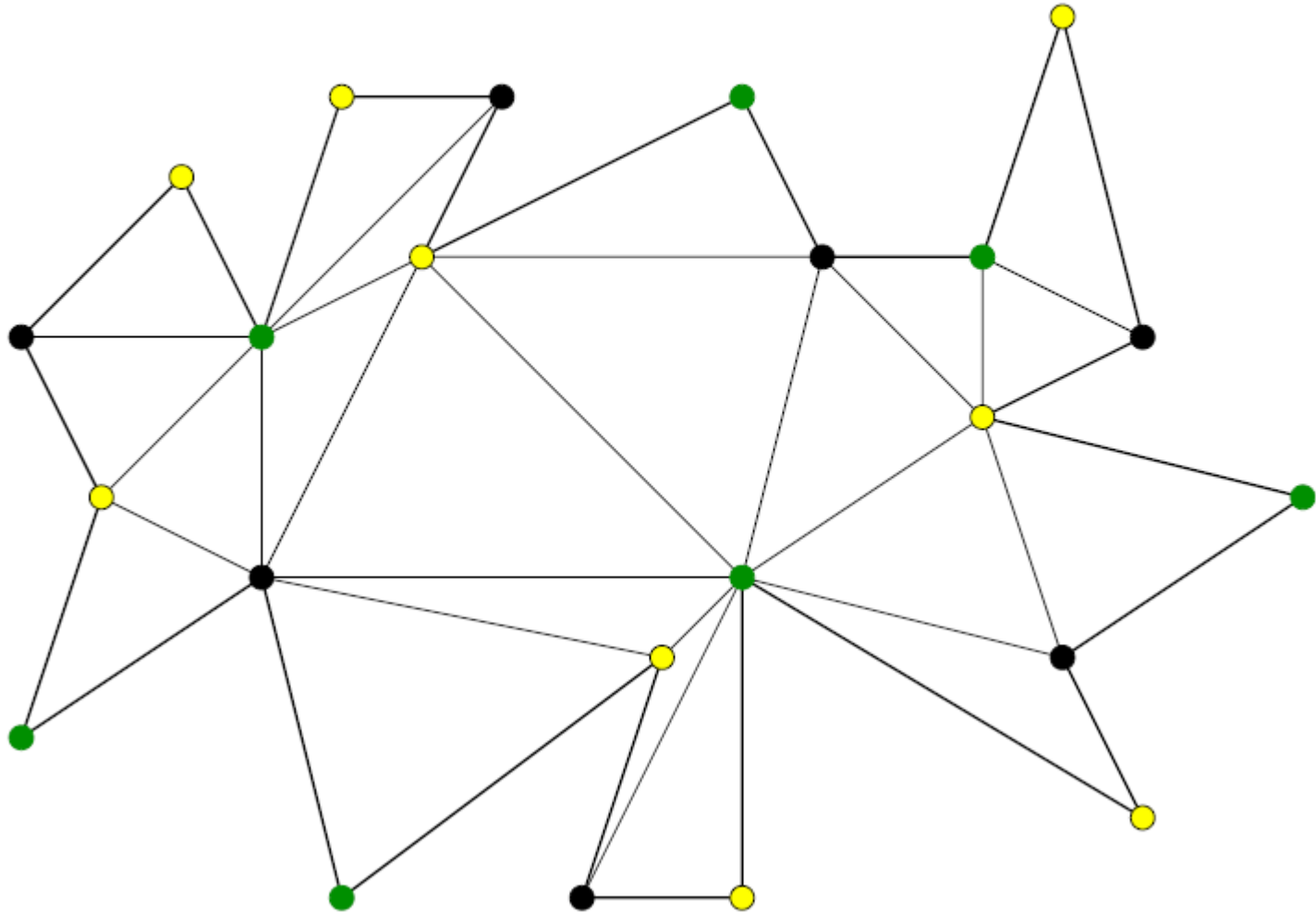
2.

● A

● N

● V

es

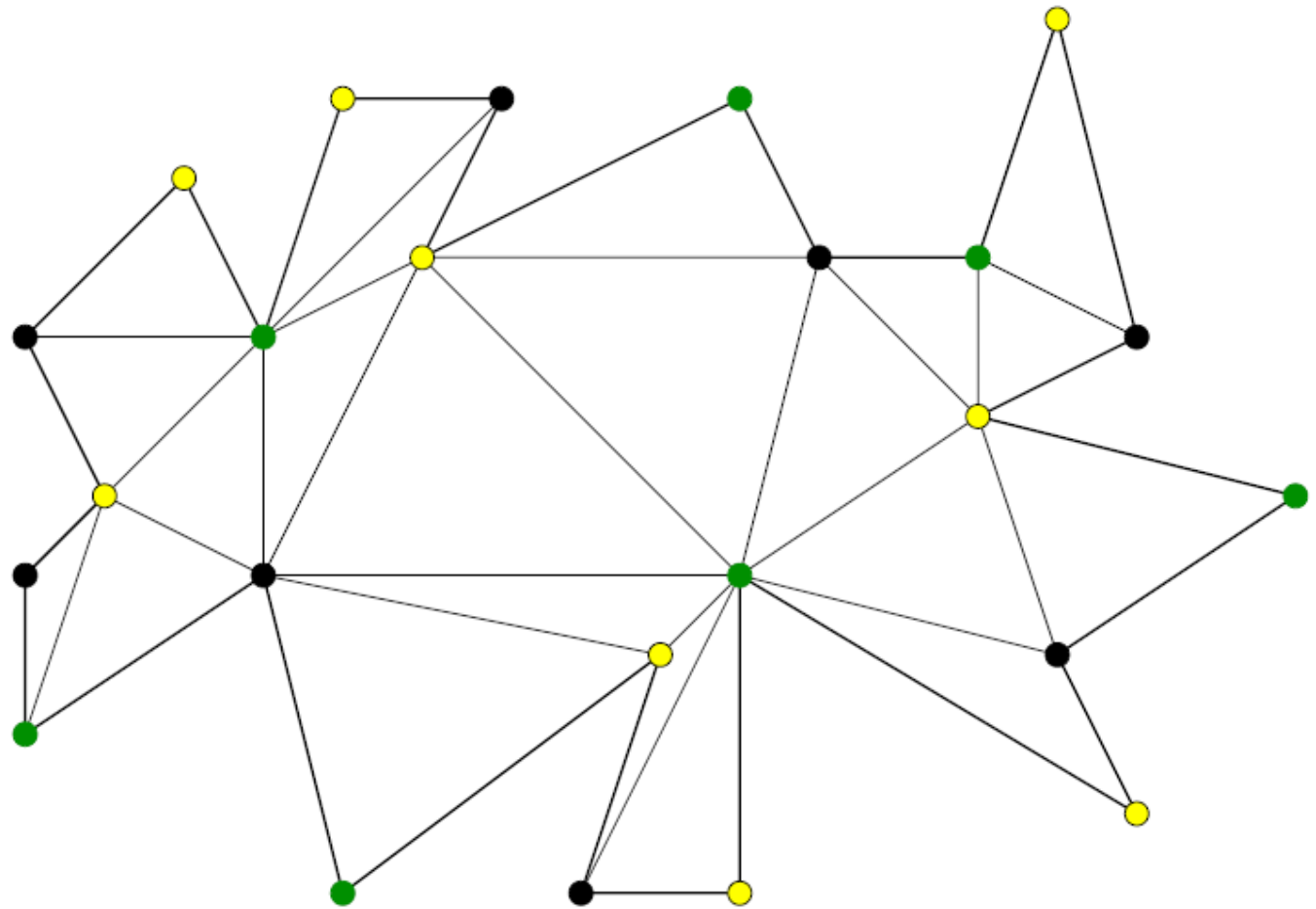


3. Contam

● A = 9

● N = 8

● V = 7



3. Contamos, en general:

a, b y c = número de veces que aparece cada color

$$a \leq b \leq c \quad a + b + c = n$$

$$a \leq \lceil n/3 \rceil$$

Cada triángulo tiene un vértice **a**

Como cada triángulo es convexo y los triángulos son una partición de P , como mucho serán necesarias **a** cámaras.

La prueba, además, nos dice dónde colocar esas cámaras.

EXTENSIONES

Cuál es el número de cámaras si:

- a) el polígono es ortogonal (resp: $[n/4]$).
- b) Las cámaras pueden ser móviles (lados o interior del polígono)
- c) Formas variadas (espirales, paredes curvas...)
- d) Problema de guardar el castillo – los guardas se colocan fuera
- e) Se quiere ver a la vez el exterior y el interior del castillo (*prision yard*).