Juegos basados en sistemas de numeración

Un sistema de numeración posicional, es en parte (tiene además la extraordinaria potencialidad del cálculo por cifras) un método de pesada, con el añadido de la unicidad. Así, no es descabellado hablar de kilo y cuarto de números. Con ayuda de una balanza de dos brazos podemos pasar un número natural a la base deseada pesándolo con las pesas adecuadas. Numéricamente también podemos emplear este método para expresar un número en otra base. Así para pesar 114 en base 2, cogemos la pesa más grande potencia de 2 que admite, calculamos lo que falta por pesar y seguimos pesando: $114 = 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 0 = 1110010_2$

Análogamente $114 = 81 + 27 + 0 + (3 + 3) + 0 = 11020_3$

Nuestra balanza mecánica es capaz de realizar la operación de pasar de base 2 a base 3 sin necesidad de pasar por base 10 (no conociendo que el resultado es decimalmente 114), cosa que numéricamente nos está vedada si no sabemos cómo se escriben las pesas de una base respecto a la otra, y si no dominamos las tablas de sumar y multiplicar en esta última.

Nuestra intención es demostrar que de forma recíproca, muchos problemas de "pesadas" están fuertemente relacionados con los sistemas de numeración posicionales. Para poder contar rápidamente conviene tener en mente la expresión del número anterior a una potencia de la base.

Así : $111111_2 + 1 = 1000000_2$, o bien $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 - 1$; o: $222222_3 + 1 = 2 \cdot 111111_3 + 1 = 1000000_3$, es decir $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = \frac{729-1}{2}$; obteniéndose de paso la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica de razón natural mayor que 1.

Pasemos ahora a una recopilación de problemas de pesadas, más o menos conocidos.

1. **En una farmacia tienen 5 frascos de píldoras que deberían pesar 10 mg, pero se recibe una llamada comunicando que uno de los frascos contiene píldoras de 11 mg. Se debe localizar en una sola pesada, pesando píldoras de los diferentes frascos con una balanza digital, el frasco "defectuoso".**

Solución depurada: Se toma una píldora del 2º frasco, dos del 3º, tres del 4º, cuatro del 5º y se realiza la pesada. La diferencia entre el peso correcto (100 mg) y el observado (entre 100 y 104) localiza el frasco.

2. **En una farmacia tienen 5 frascos de píldoras que deberían pesar 10 mg, pero se recibe una llamada comunicando que probablemente varios frascos provienen de una partida donde las píldoras por error pesan 11 mg. De nuevo con una sola pesada hay que localizar los frascos infractores.**

Solución depurada: Se toma una píldora del 1er frasco, dos del 2º, cuatro del 3º, ocho del 4º, dieciséis del 5º, y se realiza la pesada. El exceso de la pesada (de 0 a 15 mg) y su escritura única en base dos localiza los frascos defectuosos. Vale usar otra base de numeración, pero ello aumenta innecesariamente el número de píldoras a pesar.

3. **Se tienen 8 bolas de las que una se sabe que pesa más y una balanza de dos brazos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas a realizar para localizar la bola distinta que pesa más?**

Solución: Aunque se nos induce a pensar en tres pesadas, el número es dos, pues el problema es de base tres, ya que las respuestas que puede dar esa balanza en una pesada son tres: "pesa más el platillo derecho", "pesa más el platillo izquierdo", y "hay equilibrio". Sorprende en este problema su generalización por inducción. De dos a tres bolas hace falta una pesada, de 4 a 9 son dos, de 10 a 27 tres, ... Pero además se sabe pesar. Lo que hay que hacer es pesar dos números iguales de bolas en los dos brazos de la balanza, de modo que ese número o el de bolas sin pesar pueda ser resuelto con una pesada menos.

4. **Ahora tenemos 12 bolas de las que sabemos que una pesa distinto y nuestra balanza de dos brazos. Hay que localizar nuestra bola en tres pesadas.**

Solución: Numerar cada una de las bolas con una de las siguientes parejas de números complementarios:

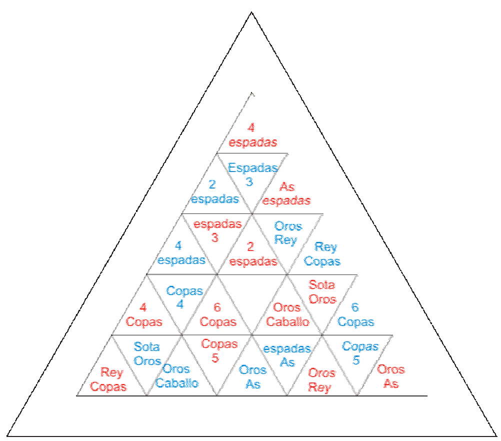
001 - *221* ; *002* - **220** ; **010** - *212* ; **011** - *211* ; **012** - *210* ; *020* - **202**
021 - **201** ; *022* - **200** ; *100* - **122** ; *101* - **121** ; *102* - **120** ; *110* - **112**

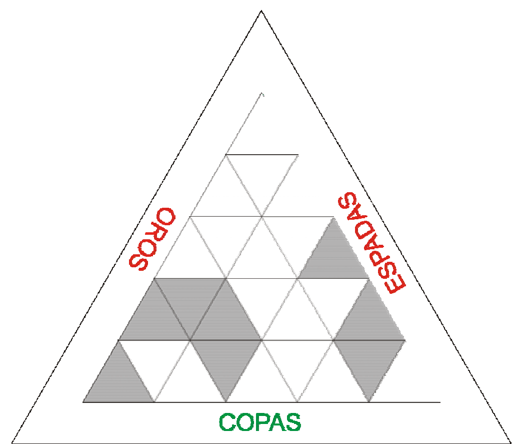
Ahora pesaremos, poniendo en un brazo de la balanza las bolas cuyo número en negrita empieza por cero y en el otro las que empieza por **2**. Si pesan más los de **0**, escribiremos en un papel un 0, si pesan igual un 1, y si pesan menos un 2. Ahora pesaremos en un brazo las bolas que tengan un cero en el medio de su número en negrita, frente a las que tengan un **2**, añadiendo en nuestro papel (a la derecha del número anteriormente escrito) un 0, 1 o 2 según la regla anterior. Realizaremos una última pesada ahora teniendo en cuenta las terminaciones de los números con negrita. Habremos conseguido al final un número de tres cifras escrito en nuestro papel. La bola que lo contenga será la buscada. Si lo contiene escrito en negrita será porque pesa más que el resto, y si está en cursiva será que pesa menos.
El número 12 de bolas es el máximo que puede ser resuelto con tres pesadas. Podemos justificarlo un poco porque realmente debemos distinguir entre 12 bolas que pueden pesar más o 12 que pueden pesar menos, lo que nos da un total de 24 bolas. ¿Por qué no se llega a 27? Nuestra forma de pesar excluye los números 000, 111 y 222.

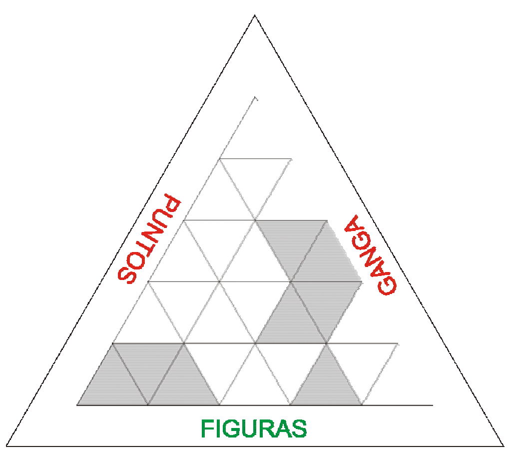
Podemos sustituir nuestras bolas por cartas y nuestra balanza por montones:

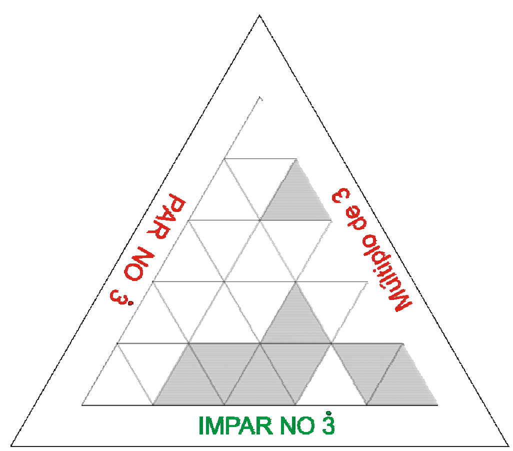
001 = as de oros; **220** = cuatro de espadas **010** = sota de oros; **011** = caballo de oros; **012** = rey de oros; **202** = tres de espadas; **201** = as de espadas; **200** = dos de espadas; **122** = seis de copas; **121** = cinco de copas ; **120** = cuatro de copas; **112** = rey de copas
donde: la primera cifra nos indica palo de la baraja (oros = **0**; copas = **1**; espadas = **2**); la segunda indica tercio dentro de un palo (as-dos-tres = **0**; figura = **1**; cuatro-cinco-seis = **2**); la tercera indica divisibilidad (par no múltiplo de 3 = **0**; impar no múltiplo de 3 = **1**; múltiplo de 3 = **2**). Pesando como se ha explicado antes y apuntando igualmente los resultados podremos identificar la carta que pesa distinto y si pesa más o menos.

El siguiente artilugio descubre automáticamente la carta elegida (será la única carta visible en color rojo si pesaba más y en azul si pesaba menos). Una pesada consiste en ir superponiendo los triángulos agujereado (apoyados en su base verde) encima del triángulo completo, pesar los montones en rojo que aparecen en los laterales y girar 120º esos triángulos hacia el lado que pesa más según la elección del espectador.









(Los triángulos sombreados son agujeros. Las pesadas 000, 111 y 222 no dejan ver nada).

No sólo ha disminuido el número de bolas en función del número de pesadas, sino que se ha complicado notablemente la forma de pesar. Con tres bolas necesitamos dos pesadas (tres más, tres menos y 00, 11 y 22). Desde 4 hasta 12 necesitamos tres pesadas (12 más, 12 menos y 000, 111 y 222 nos dan las 27 que podíamos pesar cuando sabíamos que la bola buscada pesaba más). De 13 hasta 39 bolas hacen falta cuatro pesadas; de 40 hasta 120 cinco, ...

5. **Una balanza con muchos brazos. El juego del 21.**

Se coge un montón de 21 cartas y se pide a alguien que de forma secreta escoja una. Luego nosotros tomamos las 21 cartas y haciendo tres pesadas, disponiendo las cartas boca arriba tres veces en tres montones y preguntando en cada ocasión el montón donde se encuentra la elegida, acabamos encontrando esa carta.

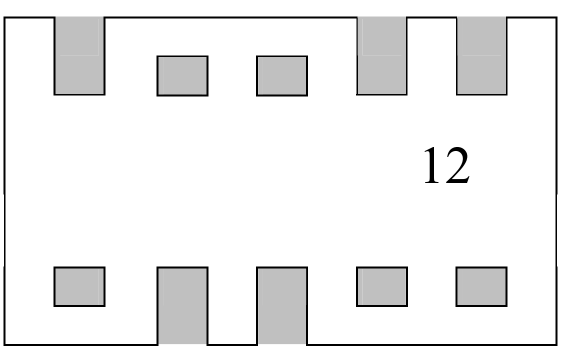
Solución: La presentación normal consiste en ir colocando más o menos disimuladamente el montón señalado en el centro de los otros dos para realizar la siguiente pesada. Al final, nuestra carta ocupará el lugar de en medio (posición undécima). Posibles modificaciones en la colocación del montón elegido conseguirán que la carta ocupe al final otras posiciones (primera, última, cuarta, octava, ...) y despiste a los electores avisados. Sin embargo el no agotar el número de posibilidades hará que no la podamos sacar en cualquier lugar. Si ahora tomamos 27 cartas podemos pedir a alguien que elija una carta y que nos diga además en qué puesto quiere que la localicemos. Si él dice que en la posición 6ª, tendremos en cuenta el cero y traduciremos mentalmente 5 (no seis) a base 3 (**012**) y en la primera pesada colocaremos el montón señalado debajo (**2**), en la segunda en medio (**1**) y en la última encima. Es curioso señalar como, en el proceso, el adivinador puede ser un tanto manazas y dejar caer alguno de los montones (no el señalado) de cartas al suelo para recogerlas en desorden pidiendo disculpas por su torpeza.

Igualmente podemos jugar al 16, al 25, ...

6. **¿Por qué no conseguir colocar todas las cartas en un determinado orden?**

Tomemos 27 cartas de la baraja española. Del as al caballo de los palos de oros, copas y espadas. Barajémoslas. Hagamos tres montones dando la vuelta a las cartas. En el primer montón ponemos ases, cuatros y sietes; en el segundo los doses, los cincos y las sotas; y en el tercer montón los treses, los seises y los caballos. Apilemos los tres montones en orden, y volvamos a hacer tres montones. Ahora en el primero, ases, doses y treses, en el segundo cuatros, cincos y seises, y en el tercero, sietes, sotas y caballos. Apilemos de nuevo y separemos en palos: oros, copas y espadas. Observaremos con asombro (no tanto después de estudiar el asunto) que las cartas aparecen ordenadas en número en los tres montones, y una vez acabado el reparto están también ordenadas por palos.

7. **Un "ordenador" mecánico.**



En la tarjeta perforada de la izquierda podemos leer el número 12 en forma decimal y también en base dos mediante los agujeros inferiores: 10011_2. En la parte superior los agujeros nos muestran el número 01100_2, complementario respecto a 31 = 11111_2. Una vez que dispongamos de 32 tarjetas (del 0 al 31) podemos barajarlas y volverlas a ordenar. Conectamos al montón dos clavijas en los agujeros de la derecha y separamos las tarjetas que se arrastran por arriba de las que se arrastran por abajo, colocando estas últimas detrás. Repetimos la acción con las clavijas

actuando sobre las cifras de las “decenas”. Completando la operación hasta las “decenas de millar” habremos conseguido ordenar nuestras tarjetas.
También esta presentación permite seleccionar mediante el sistema de clavijas una tarjeta con el número deseado.

8. Adivinación de números.

Las siguientes tarjetas permiten adivinar un número del 0 al 15.

1	3	5	7
9	11	13	15

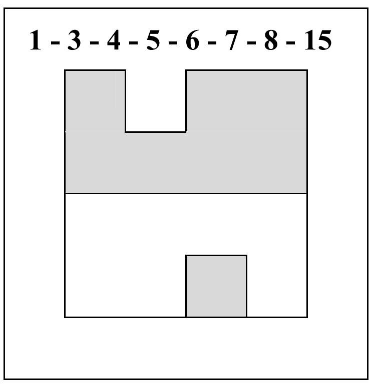
2	3	6	7
10	11	14	15

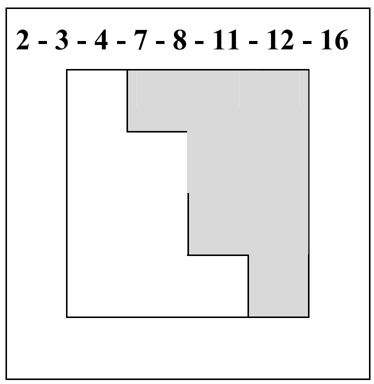
4	5	6	7
12	13	14	15

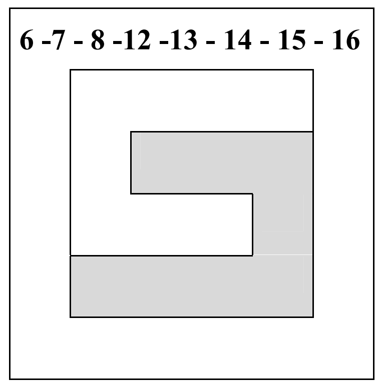
8	9	10	11
12	13	14	15

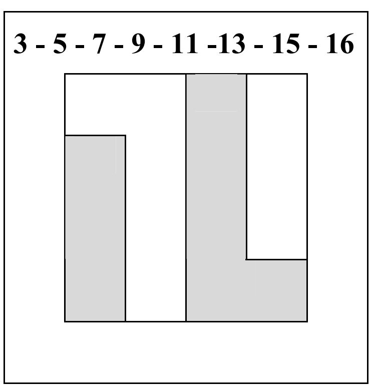
Basta con que el espectador nos indique las tarjetas donde aparece su número. Así este número habrá sido pesado con esas tarjetas (necesita esas pesas) y la pesada es única. Ello y la traducción a base dos de los números de las tarjetas nos indican claramente no sólo cómo están confeccionadas, sino cómo se procede para adivinar el número pesado.

9. Una versión mecánica del anterior juego









Y la tarjeta de apoyo:

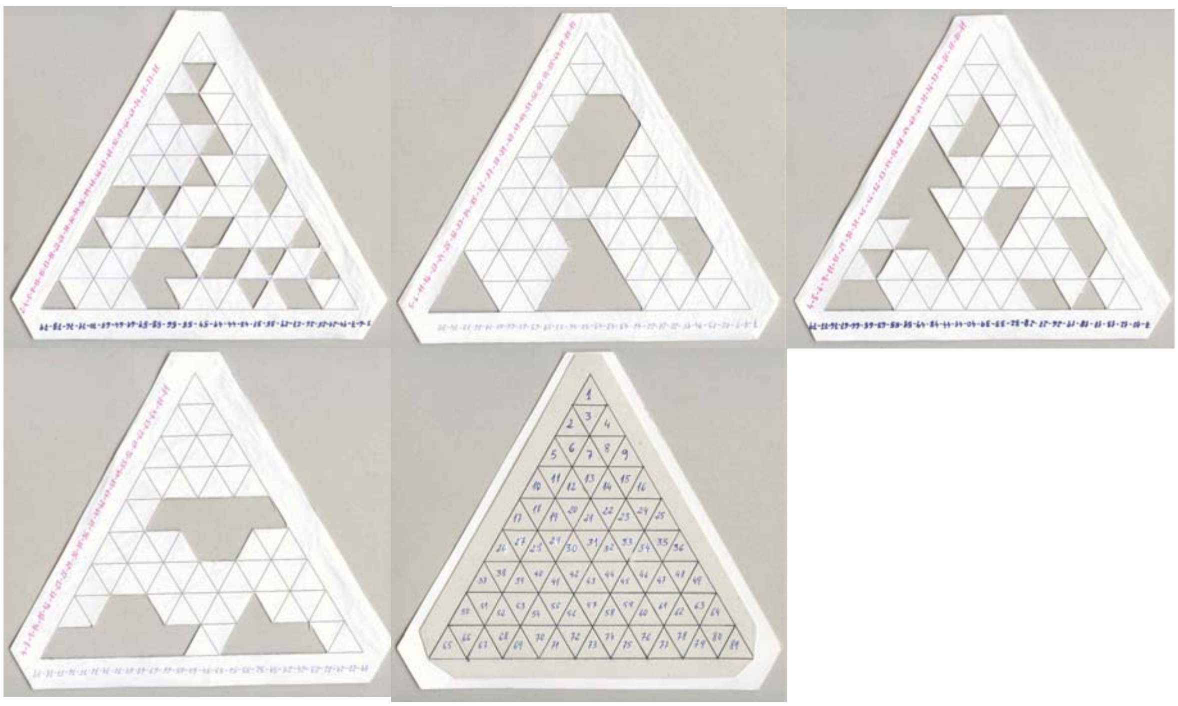
1	**2**	**3**	**4**
6	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

En estas tarjetas las zonas sombreadas son agujeros. Se trata de adivinar un número del 1 al 16. El espectador deberá entregarnos separadas las tarjetas donde aparece su número y las tarjetas donde no aparece. Colocaremos estas últimas disimuladamente boca abajo, detrás de las anteriores, y después todas encima de la tarjeta base. Veremos entonces como el aparato muestra en solitario el número elegido.
Pensando en la forma de adivinar (boca arriba y boca abajo) y en la unicidad final, es fácil construirse un modelo propio de tarjetas.

10. Y ahora en base tres.

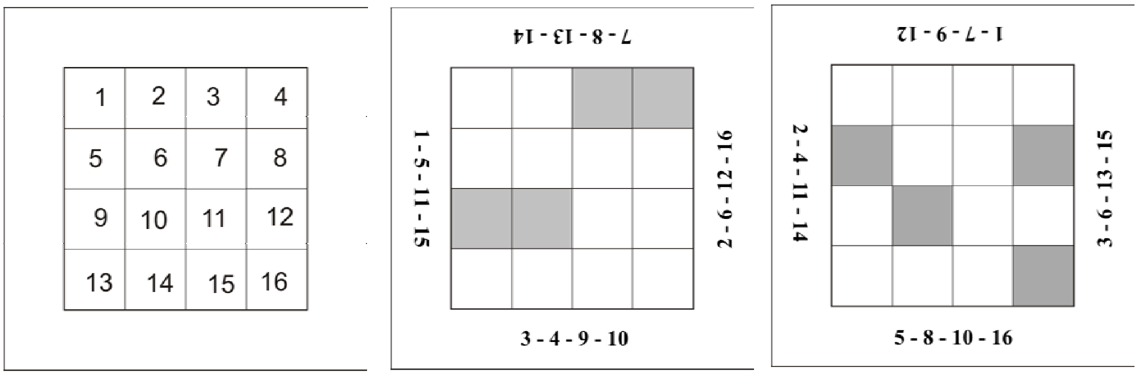
El juego anterior en su presentación no necesita la forma de cuadrado, sólo requiere simetría central, y por tanto una representación rectangular es posible. Así podemos crearnos un juego de adivinación de 4 números, de 8, de 16 , de 32,....

Sin embargo si nos planteamos un artilugio mecánico de base tres (el de tarjetas sumando no es esencialmente distinto al de base dos) parece inevitable acabar en el triángulo equilátero, que habrá que combinar con las potencias de tres. Una distribución de los triángulos equiláteros en un número cuadrado de triángulos equiláteros menores nos resuelve el problema para 9 números, para 81, ... Vemos a continuación un posible juego de "pesas":



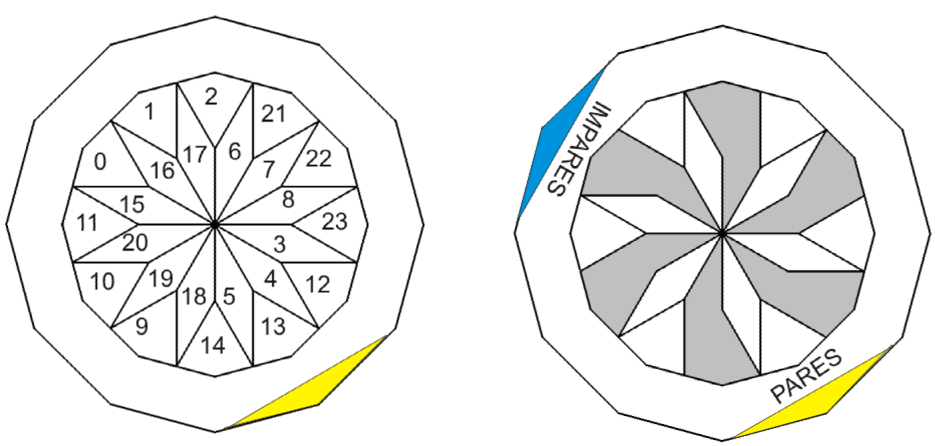
Si bien numéricamente no hay problemas en separar los números por su escritura en base tres, ahora las cosas se complican al tener que estar ligados los números por giros de 120º y tenerse que adaptar a la forma triangular. De hecho en el juego anterior la primera de las "pesas" contiene "islas" (piezas que no tienen – debido a los agujeros circundantes – ninguna arista de sujeción, y tienen que estar sostenidas por los vértices). Como siempre nuestras piezas apoyadas en una de sus bases dejan ver los números de ésta en el triángulo de apoyo. Es fácil y clarificador fabricarse dos tarjetas (más la base) para adivinar un número de entre nueve.

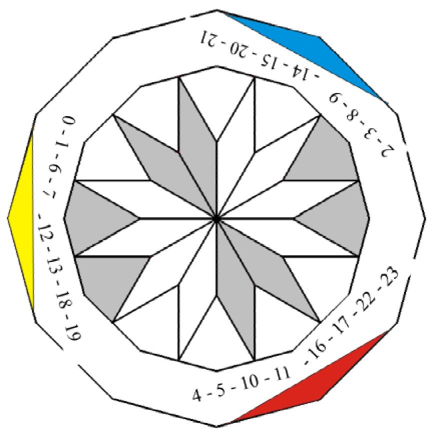
11. Y en base cuatro.

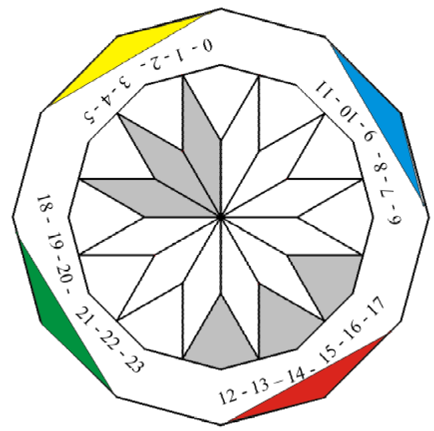


12. Un sistema de numeración que no es de base

Todo número natural puede ser "pesado" con las pesas factoriales: 1!, 2!, 3!, ...
Si queremos unicidad bastará con imponer que la pesa $n!$ no pueda aparecer más de n veces. Tendremos así un sistema de numeración que no es de base. El número 2301_F será nuestro número decimal $2\cdot 4! + 3\cdot 3! + 0\cdot 2! + 1\cdot 1!$. Los primeros números en este sistema serán: 0_F, 1_F, 10_F, 11_F, 20_F, 21_F, 100_F, 101_F, 110_F, 111_F, 120_F, 121_F, 200_F, 201_F, 210_F, 211_F, 220_F, 221_F, 300_F, 301_F, 310_F, 311_F, 320_F, 321_F, 1000_F, ...
Así $54321_F + 1 = 6!$. En este sistema de numeración hay $n!$ números que tienen menos de n cifras (para $n > 1$)
La forma de un artilugio mecánico para adivinar un número con estas pesas va a depender de la cantidad de números en escena, ya que el número de pesas a usar depende de la posición. Para seis números, podemos usar dos pesadas con balanzas hexagonales (dos posibilidades para las "unidades" y tres para las "decenas"). Para 24 precisamos al menos de dodecágonos regulares, ya que el m.c.m. de 2, 3 y 4 es 12, si bien deberemos dividirlos en 24 regiones equivalentes. Exponemos a continuación una posible forma de las balanzas:







13. Un problema de mínimos.

Vamos con nuestra balanza romana de dos brazos a vender melones en un mercado. Queremos poder llegar hasta pesar melones de 6 Kg con una precisión de 100g. ¿Cuál es el menor número de pesas que debemos llevar?
Si nuestras pesas fueran de base 10, necesitaríamos:
9 pesas de 100 g
6 pesas de 1 Kg
15 pesas
En cambio si nuestras pesas son de base 2, tendríamos que llevar:
1 pesa de 100 g
1 pesa de 200 g
1 pesa de 400 g
1 pesa de 800 g
1 pesa de 1600 g
1 pesa de 3200 g
6 pesas

La base dos minimiza el número de pesas a llevar si nuestras pesas sólo las vamos a poner en uno de los dos platillos. La idea de la demostración es que para escribir números del 1 al 60 en base diez se precisan 9 cifras no nulas para las unidades y 6 para las decenas, mientras que para que la suma $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$ supere o iguale a 60, basta que n sea mayor que 5.

Y también cualquier otra base exige más cifras que la base 2.
Si $c \cdot a^n \le m < (c+1) \cdot a^n$ (con 0< c < a -1) entonces para pesar hasta m en base a necesitamos a –1 pesas unidades, a –1 pesas“decenas”, ..., a -1 pesas “potencias (n – 1)” y c pesas “potencias n”. Así para pesar hasta 234 necesitamos:

$2 \cdot 9 + 2$ pesas en base 10,
$2 \cdot 8 + 2$ pesas en base 9,
$2 \cdot 7 + 3$ pesas en base 8,
....

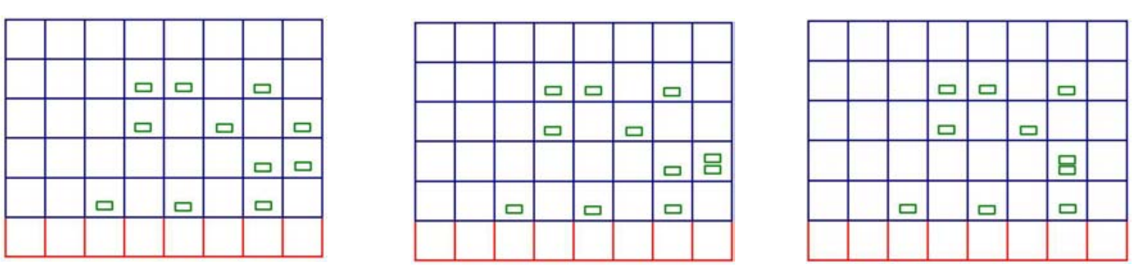
$4 \cdot 2 + 2$ pesas en base 3,
$7 \cdot 1 + 1$ pesas en base 2.

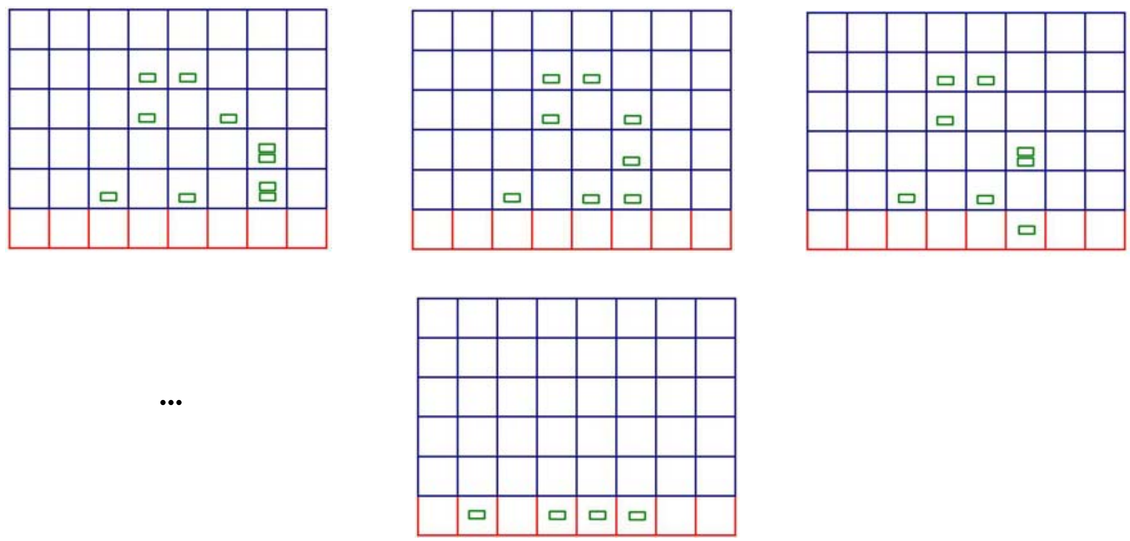
La eficacia de un sistema de pesada puede ser medida a partir del número de pesas que son necesarias para pesar, aunque haya que tener en cuenta también la facilidad de la pesada. Así entre los sistemas puros de base, es la base 2 la más eficaz, en el sentido de que para pesar hasta una cierta cantidad natural, emplea el menor número de pesas. Sin embargo si se nos permite usar las pesas en ambos platillos, es la base tres la que requiere menos pesas, pero a cambio de complicar la forma de pesar. El problema equivale a escribir un numero en base tres sin emplear la cifra 2, pero a cambio podemos usar cifras con significado negativo. Así $10\bar{1}\bar{1}10_3 = 243 + 0 - 27 - 9 + 3 + 0 = 210$. Es fácil pasar de base 3 a este sistema de cifras con signo sin 2 en base 3, pero no lo es tanto, obtener (pesar) un número decimal en este nuevo sistema de numeración. Veamos cómo hacerlo con 210.
Hallamos el primer número formado exclusivamente por unos en base 3 que supera o iguala a 210. Estos números son mitades de números formados por doses, y por tanto mitades de pesas menos 1: 1, 4, 13, 40, 121, 364, ... En la serie, 364 es el sexto y ésa es la posición (sexta y potencia quinta) de la cifra significativa 1 de 210 en base 3 ($243 = 3^5$). Como nuestro número es menor que 210 hayamos la diferencia, 33, y la aproximamos por exceso con cuasimedias pesas en el otro platillo, es decir con 40 (posición 4ª) y así la cifra 5ª desde las unidades es 0 y $\bar{1}$ es la 4ª. Como 243 – 27 = 216 sigue siendo mayor que nuestro número en 6 unidades debemos seguir descontando. La primera cuasimedia pesa que sobrepasa 6 es 13. Un nuevo $\bar{1}$ en la posición 3ª. Nueva cuenta: 243 – 27 – 9 = 207. Ahora nos faltan 3 para llegar a nuestro número. La cuasimedia pesa 4 nos indica que la cifra 2ª es 1, y ahora ya se ha acabado la pesada, pues 243 – 27 – 9 + 3 = 210.
Así el melonero matemático coloca el melón en el platillo de la izquierda y de forma ordenada acumula en el otro lado de la balanza las pesas 1, 3, 9, 27, ... , hasta vencer al melón. Fija la última pesa, quita las otras, y observa hacia donde se inclina la balanza. Si pesa más el melón, volverá a añadir en la balanza de la derecha las pesas 1, 3, 9, ..., hasta vencer de nuevo al melón, fijando una segunda pesa, la última colocada. Quita las restantes y observa de nuevo la inclinación de la balanza. Si ésta se sigue inclinando del lado del melón se repite el proceso en el platillo de la derecha, pero si ganan las pesas fijadas, el proceso se realiza en el platillo del melón, ..., así hasta equilibrar la balanza.

14. Un ábaco de base 2.

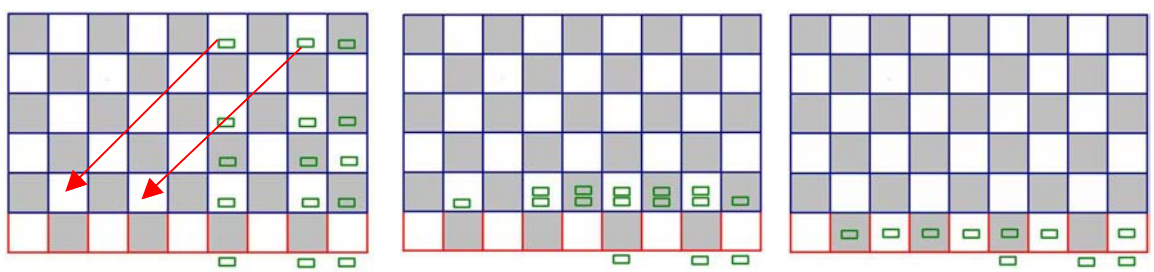
Las tablas de sumar y multiplicar en base dos se reducen a $1+1=10_2$. Ello invita a usar tableros con fichas para sumar varios números o multiplicar dos números:

Suma





Producto



[1] Nuevos pasatiempos matemáticos. Martin Gardner. Alianza Ed[al]. El libro de bolsillo 391
[2] The gentle art of mathematics. Dan Pedoe. Ed[al]. Dover 1973
[3] Mathematical recrations and essays. W. W. Rouse Ball / H.S. M. Coxeter. Ed[al]. Dover 1978