LOS NÚMEROS METÁLICOS

REUNIÓN PROFESORES ESTALMAT MADRID 2009

María José Señas Pariente

Estalmat-Cantabria

1. ANTECEDENTES

- En las sesiones de enero se han visto semejanzas y proporciones.
- Dos semanas antes ha habido una sesión de Historia de las Matemáticas donde aparece el número de oro y la sucesión de Fibonacci en un contexto histórico.
- La semana previa se han trabajado las sucesiones, en particular la sucesión de Fibonacci.
- La semana siguiente se tratará una unidad de Geometría donde aparecerá en una actividad el número de oro.

2. INTRODUCCIÓN

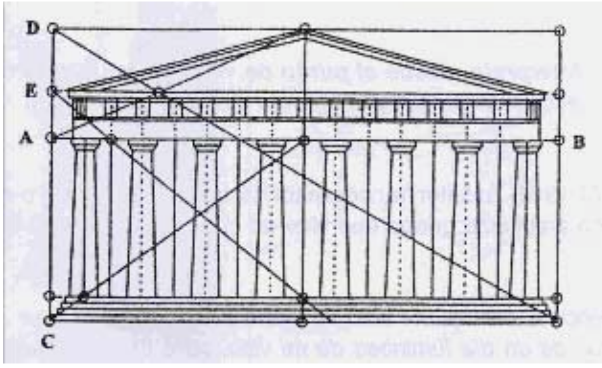
Presentación de los **números metálicos:** es el conjunto de números que tienen la propiedad, entre una serie de características comunes, de que llevan el nombre de un metal. El más famoso de la familia es el número de oro, que ha sido utilizado en muchas culturas antiguas como base de proporciones para componer música y diseñar esculturas, pinturas o edificios. Otros familiares son el número de plata, el de cobre, el de bronce, el de platino, el de níquel, y muchos otros más.

3. LA HISTORIA DEL NÚMERO DE ORO Y OTROS NÚMEROS METÁLICOS

- La Grecia Antigua: el Partenón. Las dimensiones y proporciones utilizadas en la fachada no fueron resultado de la casualidad, sino que los griegos pensaban que eran mucho más bellas y armoniosas si quedaban ajustadas a un número conocido en la actualidad como razón aúrea o número de oro.
- El número de oro está presente en multitud de obras de arte y elementos arquitectónicos, en los que produce una impresión de armonía lineal, de equilibrio en la desigualdad, más satisfactorio que el de cualquier otra combinación (Leonardo da Vinci).

ACTIVIDAD 1

Mide la anchura y la longitud de los siguientes rectángulos en milímetros. Haz el cociente entre la longitud y la anchura, aproximando hasta las milésimas.



	Longitud (l)	Anchura(a)	l/a
Partenón			
Carnet			

Podrás observar que todos estos cocientes se aproximan al número 1,618, llamado número de oro.

- El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides (c. 300-265 a. C.) en *Los Elementos*.
- Continuando con nuestro viaje a través de la historia de estos números tenemos que detenernos en la figura de Leonardo Fibonacci.

ACTIVIDAD 2

Una pareja de conejos da origen a otra pareja al cabo de un mes. Cada pareja necesita dos meses para ser capaces de procrear. ¿Cuántos conejos tendremos al cabo de los meses?

Inicialmente:	1 pareja	El 6º mes:	……. parejas
El 1er mes:	1 pareja	El 7º mes:	……. parejas
El 2º mes:	2 parejas	El 8º mes:	……. parejas
El 3er mes:	3 parejas	El 9º mes:	……. parejas
El 4º mes:	5 parejas	El 10º mes:	……. parejas
El 5º mes:	8 parejas	El 11º mes:	……. parejas

Lo interesante de este problema es que la solución es muy curiosa. Se trata de una secuencia de números en el que cada uno, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. COMPRUÉBALO

ACTIVIDAD 3

Efectúa las divisiones siguientes.

Nº de Fibonacci	N / n-1

1	
1	1 /1 = 1
2	2 / 1 = 2
3	3 / 2 =
5	5 / 3 =
8	8 / 5 =
13	
21	
34	
55	
89	

Si las cuentas están bien hechas, sí, se aproximan al valor 1,6180…, es decir, ¡al **número de oro**!

ACTIVIDAD 4

Tomemos ahora la secuencia 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99… Se trata de una sucesión de Fibonacci generalizada donde ¿puedes encontrar el mecanismo para obtener nuevos términos?
Si procedemos como en la actividad anterior y realizamos las sucesivas divisiones…

Nº de Fibonacci	N / n-1
1	
1	1 /1 = 1
3	3 / 1 = 3
7	7 / 3 =
17	17 / 7 =
41	41 / 17 =
99	

En este caso, los cocientes se aproximan al valor 2,414…, que es el **número de plata**.

Análogamente se podrían obtener otros números metálicos modificando las condiciones de la sucesión. Por ejemplo, si tomásemos cada término como el "triple del anterior más el anterior de éste" y tomásemos los cocientes respectivos, se obtendría el número de bronce 3,3027…

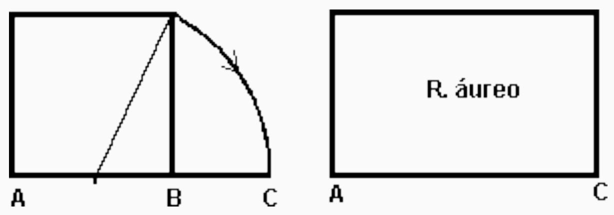
4. RECTÁNGULOS DE MÓDULO LOS NÚMEROS METÁLICOS

Un rectángulo es áureo cuando, una vez cortado el cuadrado construido sobre el lado menor, el rectángulo que queda es semejante al de partida. Es decir, un rectángulo es áureo si cumple:

$$\frac{lado - mayor}{lado - menor} = 1{,}6180...$$ Construyamos un rectángulo áureo.

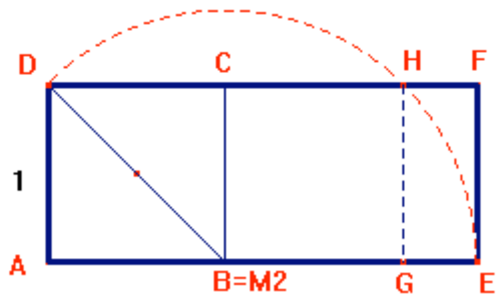
ACTIVIDAD 5

Dibujamos un cuadrado de lado 5 cm. Haciendo centro con el compás en el punto medio de la base con abertura la distancia de este punto al vértice del lado opuesto, trazamos un arco que intercepte la prolongación de la base, tal como se muestra en la figura. Esta propiedad se usa para construir rectángulos áureos conocido el lado menor.



Si quisiéramos construir un rectángulo áureo conocido el lado mayor, habría que recurrir a Euclides y las cosas se complican.

Para construir un rectángulo de módulo el número de plata, el procedimiento es similar. Se dibujaría un rectángulo de lados N y 2N (es decir, el doble de largo que de ancho, como dos cuadrados iguales unidos). Colocando el compás en el punto medio de la base y tomando como abertura la distancia de este punto al vértice opuesto (diagonal de cada cuadrado), trazamos un arco que intercepte la prolongación de la base.



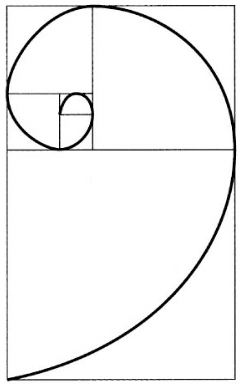
Evidentemente, para construir un rectángulo de módulo el número de bronce, se comenzaría dibujando un rectángulo Nx3N (tres cuadrados iguales unidos).

5. LA ESPIRAL ÁUREA

Si se reitera el proceso comenzando por un rectángulo áureo y cortando cada vez un cuadrado, obtenemos una serie de rectángulos áureos. A partir de esta secuencia de rectángulos se puede obtener la espiral áurea o de Durero, que es una falsa espiral pues está formada por arcos de circunferencia.

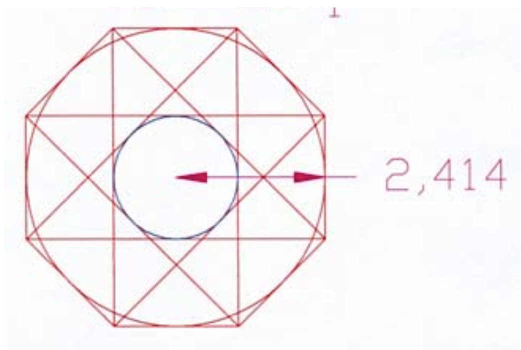
ACTIVIDAD 6

Sobre el rectángulo aúreo que has dibujado vamos a construir una espiral aúrea



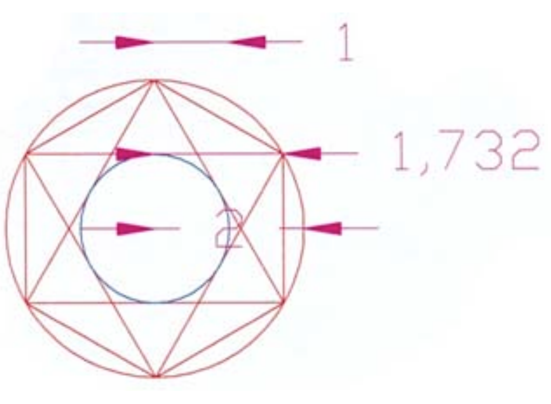
6. POLÍGONOS ASOCIADOS A NÚMEROS METÁLICOS

El pentagrama, estrella de cinco puntas, fue el símbolo distintivo de los pitagóricos. En esta figura tan emblemática también está presente la razón áurea. Si os fijáis bien, en el centro de la estrella aparece de nuevo un pentágono regular. Sobre él también se podría construir un pentagrama. Se podría proseguir así indefinidamente, en una técnica que se denomina autorreproducción. El número de plata estaría asociado al octógono, donde de nuevo se aprecia la propiedad reproductiva.



Los Códigos Secretos de la Arquitectura

El número de platino quedaría vinculado al hexágono, quizá el más prolífico en la historia de la arquitectura.



Los Códigos Secretos de la Arquitectura

7. LAS PROPORCIONES ANTROPOMÓRFICAS

- Canon griego en las esculturas humanas.
- Renacimiento: se estudiaron con profundidad las proporciones del cuerpo humano. Leonardo da Vinci, en su Tratado de Pintura recoge: la longitud de la mano debe ser 1/3 del brazo; la distancia entre el corte de la boca y la base de la nariz debe ser 1/7 del rostro… y así miles de medidas diferentes para todas las partes del cuerpo.
- A mediados del siglo XIX se comprobó estadísticamente que el ombligo divide áureamente al cuerpo humano adulto en sección áurea.

En la imagen, el Hombre de Vitrubio, canon de Leonardo da Vinci. Como actividad te propongo que compruebes haciendo las medidas correspondientes dicha división.

ACTIVIDAD 7

Y sobre vosotros mismos? Medir vuestra altura y vuestra distancia del ombligo al suelo. ¿Qué ocurre, más o menos?

NOMBRE	ALTURA (a)	OMBLIGO (o)	a/o

8. PROPORCIONES EN LA MÚSICA Y LA NATURALEZA

MÚSICA: Las proporcionen también desempeñan una función importante en la música. Los antiguos encontraron la ley de las razones sencillas operando con una cuerda vibrante cuya longitud se hacía variar con un cursor. Tomando un sonido como base (tono) y pisando la cuerda en distintos puntos se obtenían los tres sonidos consonantes fundamentales: la octava, la cuarta y la quinta. Los sonidos obtenidos al pisar otros puntos de la cuerda serían discordes. El arte de encadenar acordes sucesivos en una frase es la armonía musical. En opinión de algunos expertos, en la 5ª Sinfonía de Beethoven podemos encontrar que el compás "la llamada del destino" divide la obra en su sección áurea.

NATURALEZA: Veamos algunos ejemplos…
La concha del Nautilus crece en forma de espiral áurea.

El número de oro también aparece en la distribución de las ramas, de las hojas y de las semillas. Si se calcula qué ángulo constante deben formar entre sí las hojas o las ramas de una planta (dispuestas en hélice ascendente sobre la rama o el tronco) para asegurar el máximo de exposición a una luz vertical, se encuentra que es el ángulo ideal, que es el menor de los dos que resultan al dividir áureamente la circunferencia completa. Además, si tomamos la hoja de un tallo y contamos el número de hojas consecutivas (supongamos que son 'n') hasta encontrar otra hoja con la misma orientación, este número es, por regla general, un término de la sucesión de Fibonacci. Además, si mientras contamos dichas hojas vamos girando el tallo (en el sentido contrario a las agujas del reloj, por ejemplo) el número de vueltas 'm' que debemos dar a dicho tallo para llegar a la siguiente hoja con la misma orientación resulta ser también un término de la sucesión.

La serie de Fibonacci se puede encontrar también en ciertas flores, que tienen un número de pétalos que suelen ser términos de dicha sucesión; de esta manera el lirio tiene 3 pétalos, algunos ranúnculos 5 o bien 8, las margaritas y girasoles suelen contar con 13, 21, 34, 55 o bien 89.