Las ecuaciones de 2ºgrado según Al-Jwarizmi

V Seminario Estalmat
Castro Urdiales

“Quienquiera que piense que el álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de incógnitas, piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el álgebra y la geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del álgebra son hechos geométricos que están demostrados.”

Omar Jayyam

(1048- 1131)

"Mientras el álgebra y la geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias se han unido, han intercambiado sus fuerzas y han avanzado juntas hacia la perfección."

Joseph-Louis Lagrange

(1736 - 1813)

Al-Jwarizmi

Abu Jafar Mohammet ibn Mose Al-Jwarizmi fue uno de los mejores matemáticos árabes de la Edad Media. Es considerado el padre del álgebra.

Conocemos su obra matemática gracias a las traducciones al latín que de ella se hicieron durante la Edad Media y el Renacimiento.

Al-Jwarizmi vivió del año 780 al 835.

Nació en una ciudad llamada Jwarizm (actualmente, Jiva, en Uzbekistán).

Se estableció en la corte del califa Abdulá al-Mamún, quien había fundado una academia de ciencias que se llamaba "La Casa de la Sabiduría".

En ella trabajaron los mejores científicos y matemáticos de la época, entre ellos, por supuesto, Al-Jwarizmi.

Su obra más importante es el Al-jabar wa´l Muqabala, que es un tratado sobre cómo plantear y resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones.

El libro empieza así:

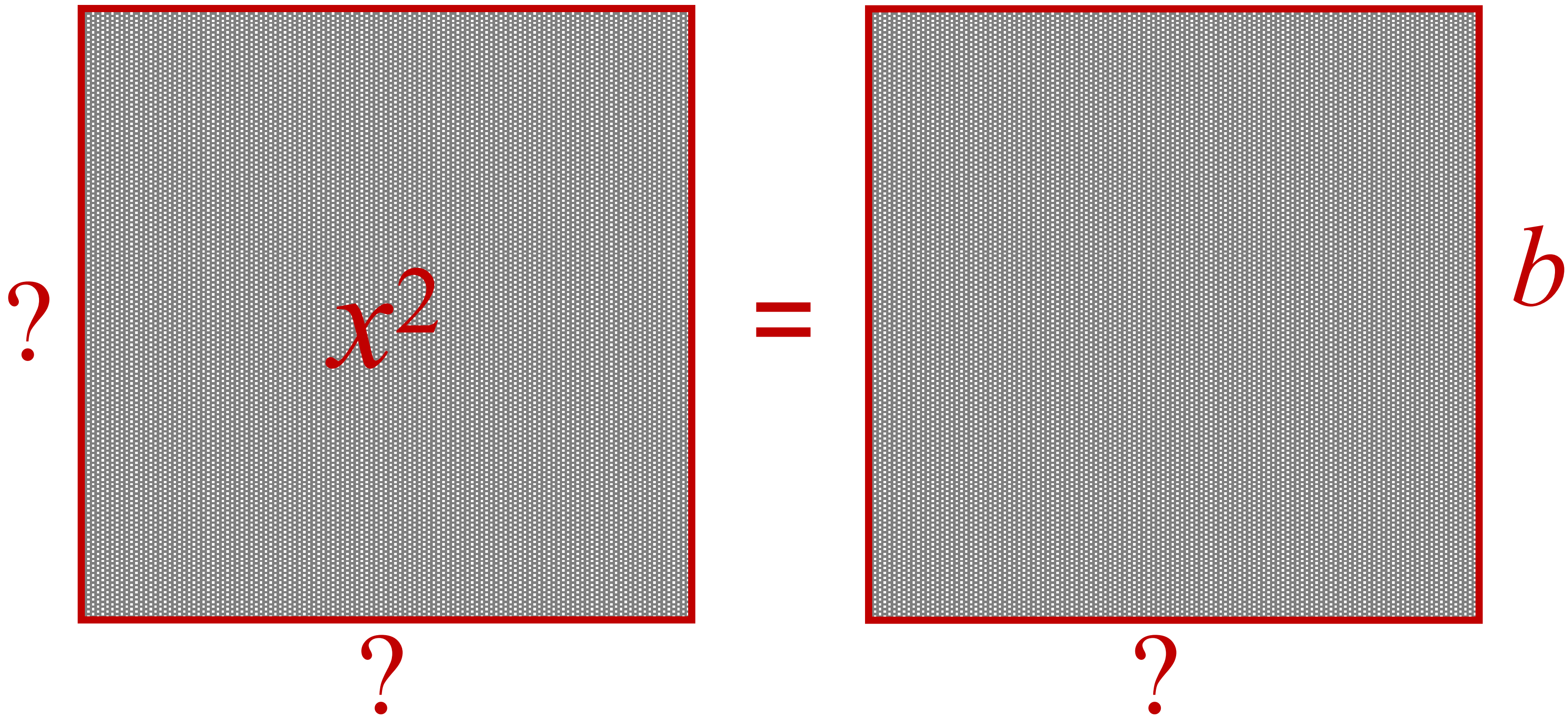
Este interés por la ciencia, con la que Alá ha dotado al califa Al-Mamún, caudillo de los creyentes, me ha animado a componer esta breve obra sobre el cálculo por medio del álgebra, en la que se contiene todo lo que es más fácil y útil en aritmética, como por ejemplo todo aquello que se requiere para calcular herencias, hacer repartos justos y sin equívocos, resolver pleitos, realizar comercio y transacciones con terceros, todo aquello en donde esté implicada la agrimensura, la excavación de pozos y canales, la geometría y varios asuntos más.

Clasificación de las ecuaciones

I	**Cuadrado de la cosa igual a cosas**	$x^2 = bx$
II	**Cuadrado de la cosa igual a número**	$x^2 = c$
IV	**Cuadrado de la cosa más cosas igual a número**	$x^2 + bx = c$
V	**Cuadrado de la cosa más número igual a cosas**	$x^2 + c = bx$
VI	**Cuadrado de la cosa igual a cosas más número**	$x^2 = bx + c$

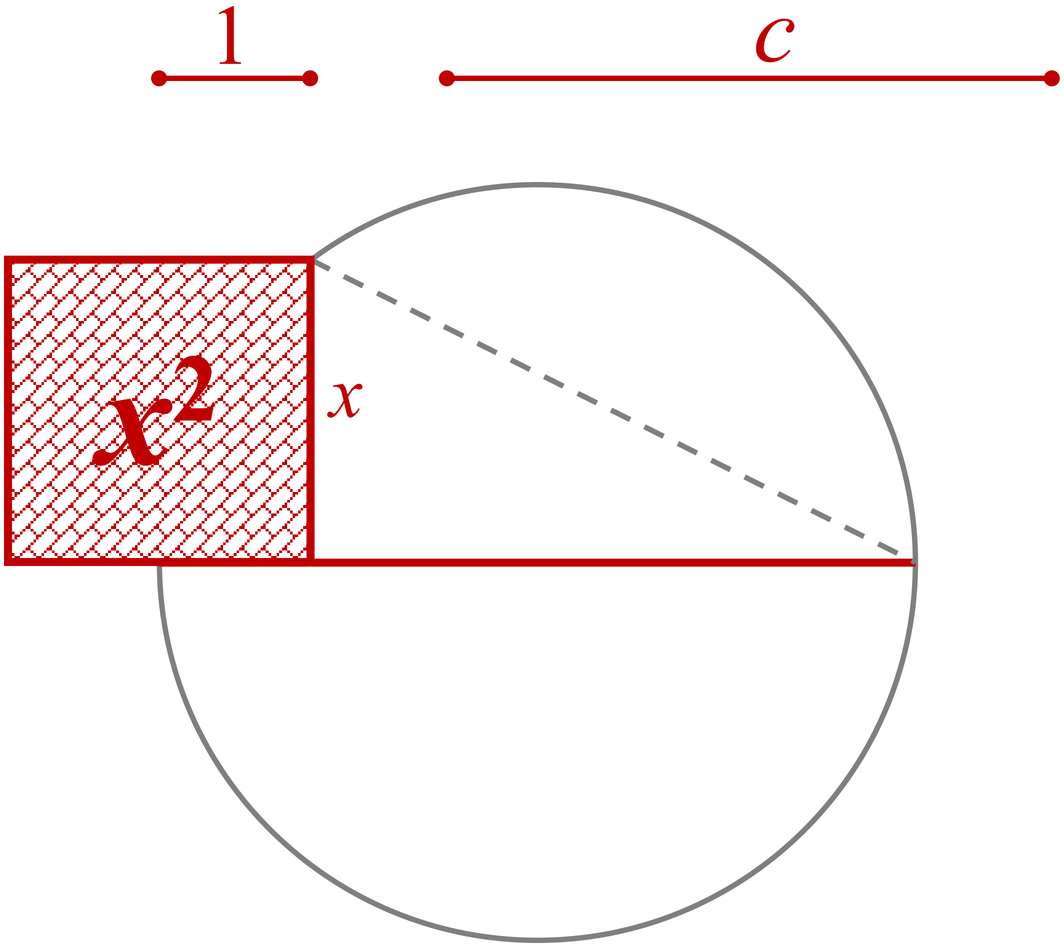
Con b y c positivos y solo buscamos soluciones positivas.

$$x^2 = bx$$

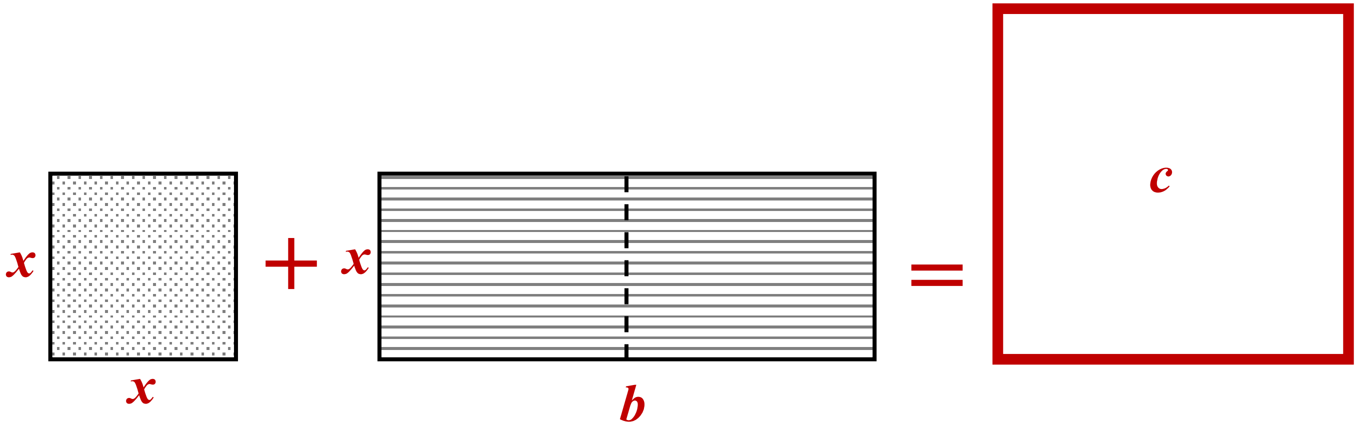


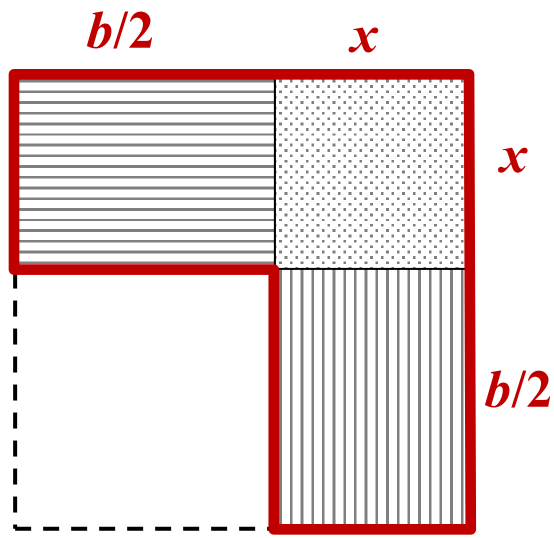
$$x = b$$

$$x^2 = c$$

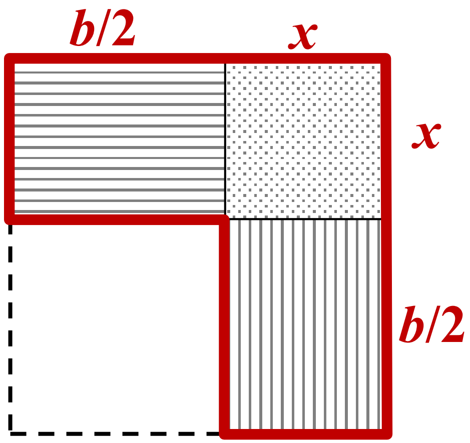


$$x^2 + bx = c$$



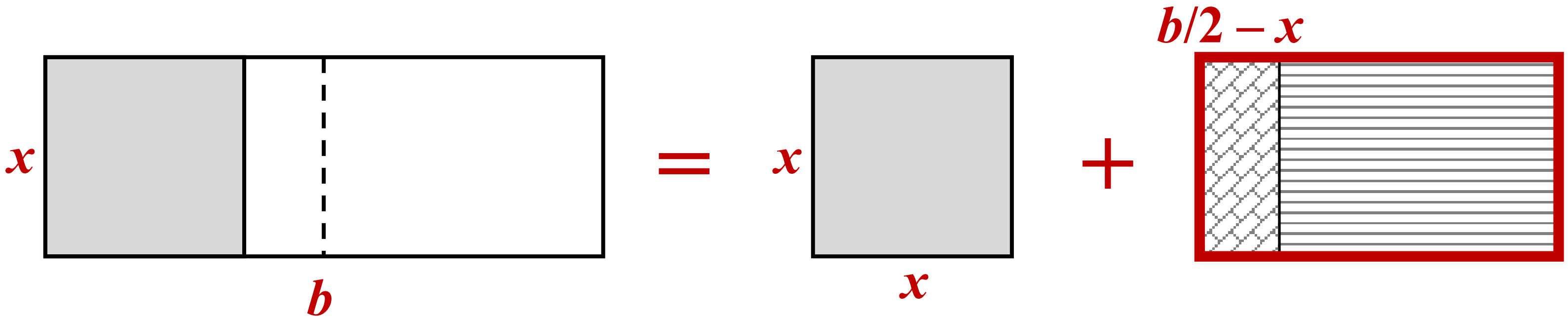


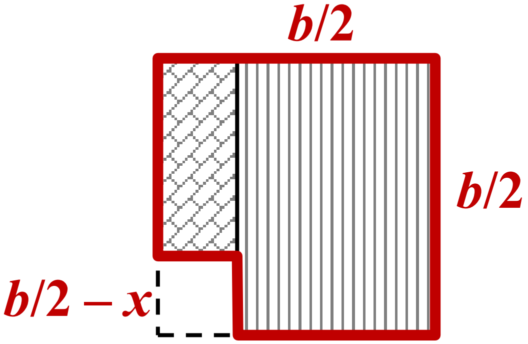
$$x^2 + bx = c$$



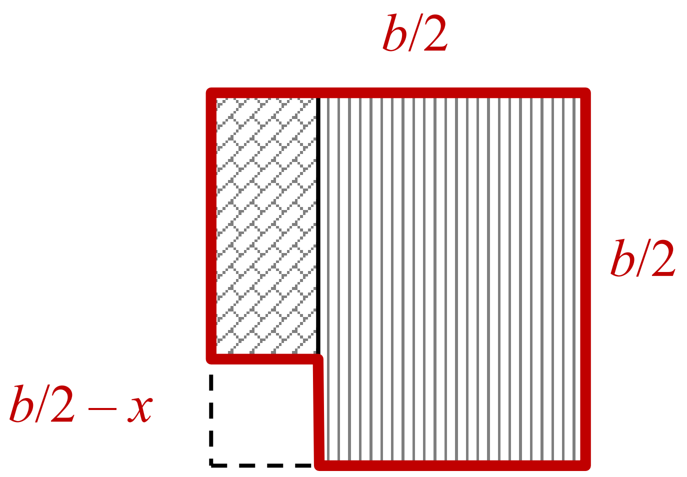
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + c = bx$$



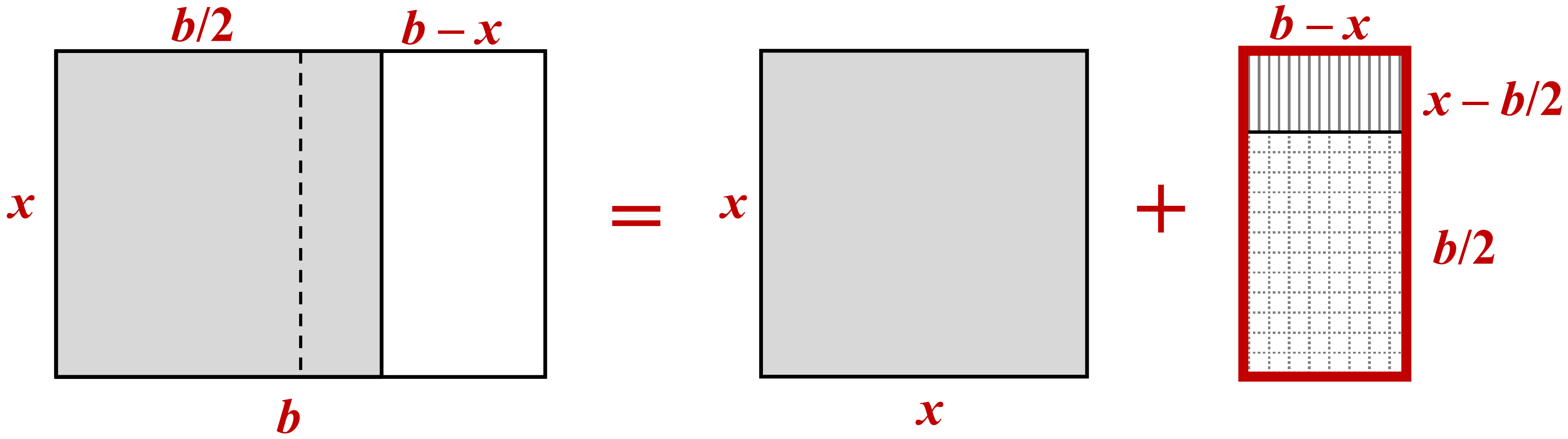


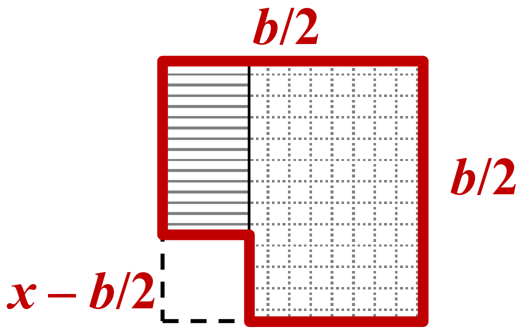
$$x^2 + c = bx$$



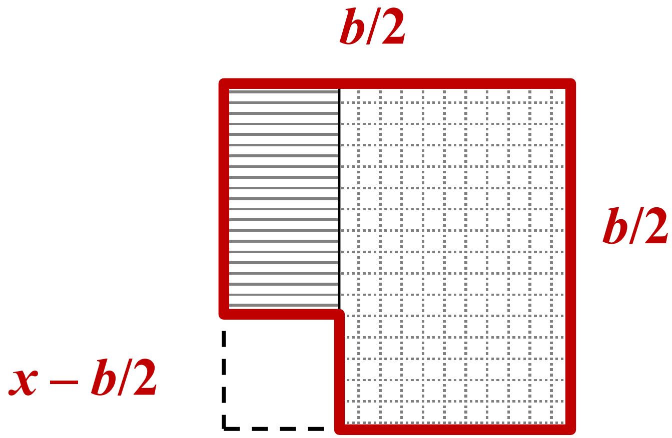
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$$

$$x^2 + c = bx$$



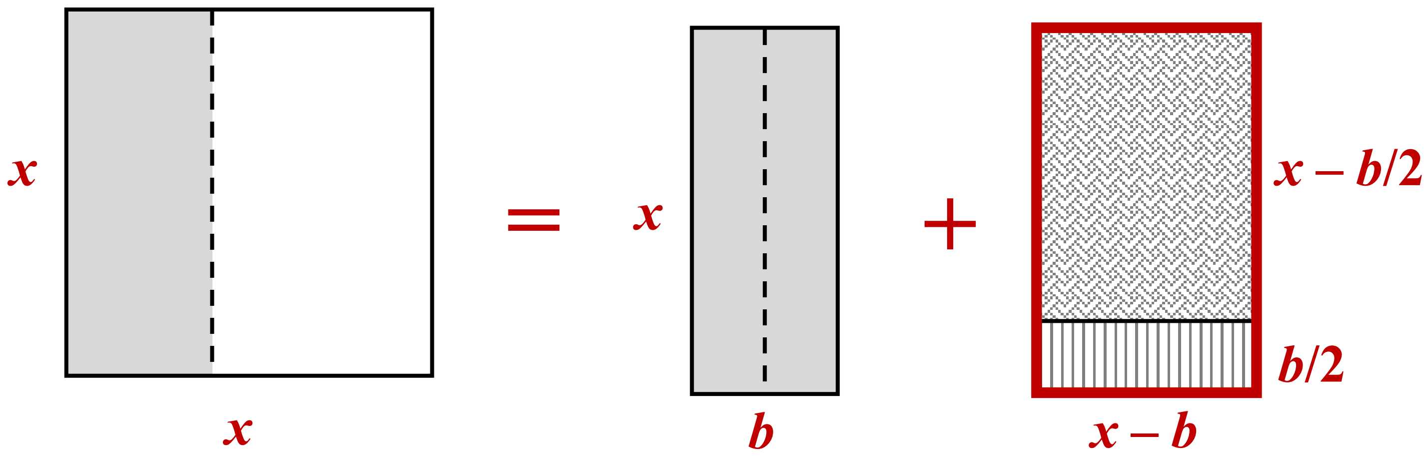


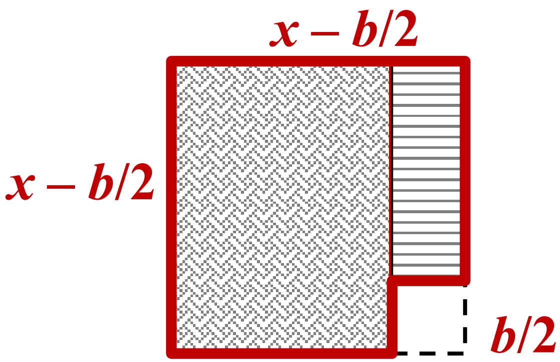
$$x^2 + c = bx$$



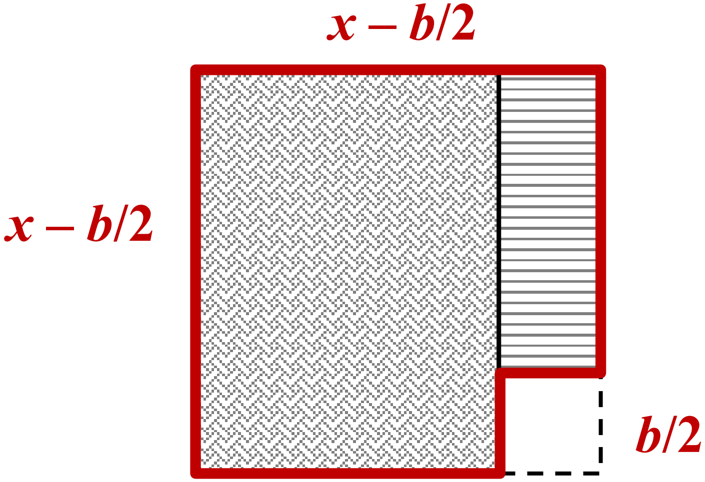
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 = bx + c$$





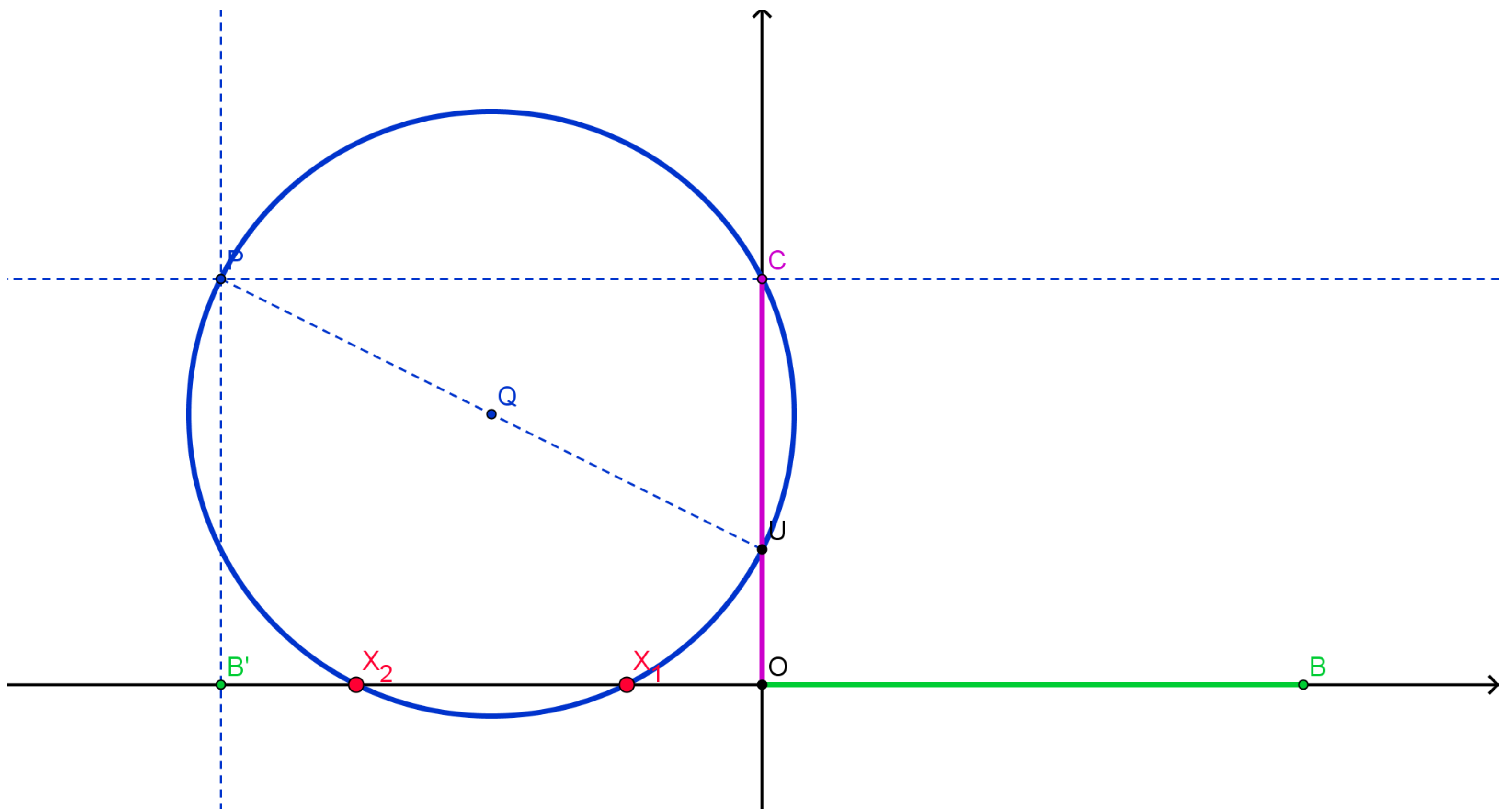
$$x^2 = bx + c$$



$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Resolución con regla y compás

$$x^2 + bx + c = 0$$



Anónimo babilónico.
Problema de la época seleúcida, siglo II a.C.

Desde el tercer milenio antes de Cristo los pueblos que habitaron entre los ríos Tigris y Eufrates nos han dejado miles de tablillas de arcilla. En más de 500 de ellas aparecen manifestaciones matemáticas que nos han permitido descubrir desde su sistema de numeración en base 60 a sus conocimientos sobre geometría. Conocían el teorema de Pitágoras ¡mil años antes de que naciera Pitágoras!

Tablilla Plimpton con las ternas pitagóricas

He sumado el área y el lado de un cuadrado [y he obtenido]: 3/ 4

Al – Jwarizmi.
Al - jabar wa´l Muqabala, 825

Divide diez en dos partes. Multiplica una parte por la otra y, entonces, multiplica una parte por sí misma. Este cuadrado es cuatro veces el producto de la una por la otra.

Gerolamo Cardano.
Ars Magna, 1545.

Cardano, que era un gran admirador de Al – Jwarizmi al que consideraba el padre del álgebra, publicó en su Ars Magna la forma de resolver las ecuaciones de tercer grado. Deberías leer algo de la historia de la resolución de la cúbica, es fascinante. En ella encontramos todos los elementos de una película policíaca: secretos, rivalidades, traiciones, enfrentamientos, escarnio público.

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Había dos jefes, cada uno de ellos repartió 48 monedas entre sus soldados. Uno de ellos tenía dos soldados más que el otro, y a los soldados del grupo menor le tocaron 4 monedas más que al grupo mayor. ¿Cuántos soldados tenía cada jefe?

Juan Pérez de Moya.
Aritmética práctica y especulativa. 1562

Esta obra es, probablemente, el mejor libro de matemáticas de España del siglo XVI, no tanto por la originalidad de los resultados sino por su acierto a la hora de exponerlos. Su éxito fue tal que ha conocido treinta ediciones, la última en 1875 ¡más de dos siglos después de su primera publicación! El problema que te proponemos está en el castellano antiguo original.


ARISMETICA, PRATICA, Y ESPECVLATIVA, DEL BAchiller Iuan Perez de Moya.

AGORA NVEVAMENTE corregida, y añadidas por el mismo autor muchas cosas, con otros dos libros: y vna tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contiene.

CON LICENCIA.
En Madrid, Por Luis Sanchez.

Dame vn numero que juntandole 5 y por otra parte quitandole 2 y multiplicando la suma por la resta, monte 98.

De las construcciones de Al-Jwarizmi al "*menos be mas menos*"

$$x^2 + bx = c$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + c = bx$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 = bx + c$$

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La ecuación cúbica

$$x^3 + mx = n$$

Si la ecuación es de la forma $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$

dividimos entre a *y obtenemos* $y^3 + By^2 + Cy + D = 0$

Completamos el cubo

$$(y + B/3)^3 - B^2/\,9y - B^3/\,27 + Cy + D = 0$$

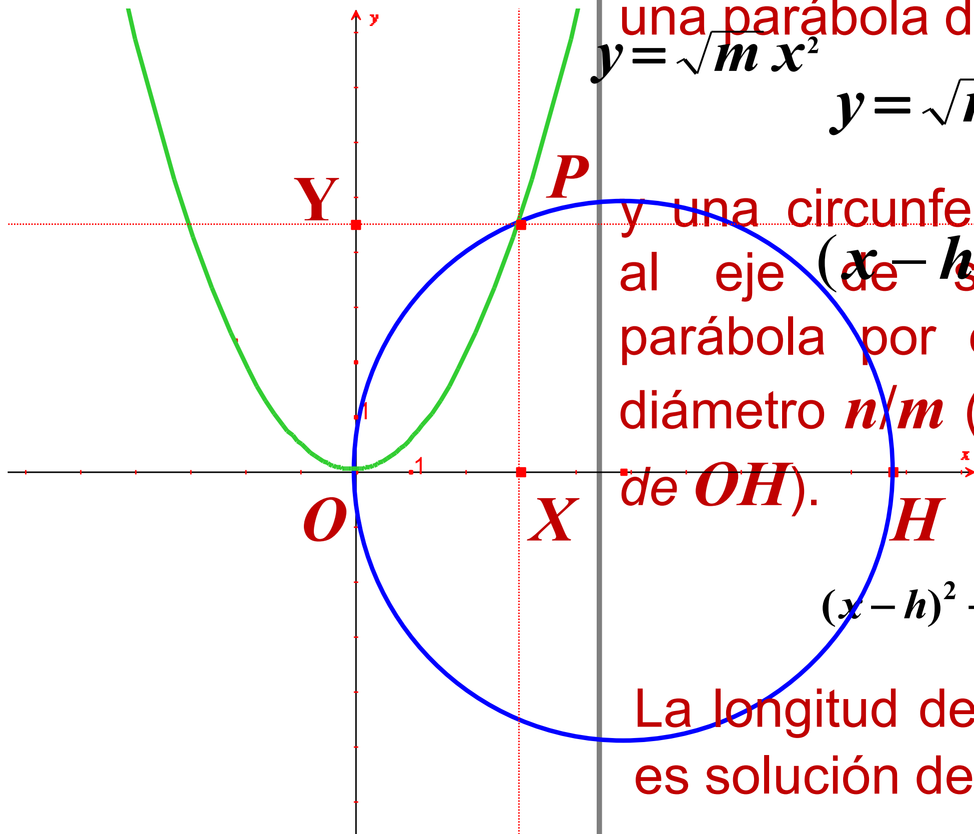
Llamando $x = y + B/3$ *obtenemos una ecuación de la forma* $x^3 + mx = n$

Omar Jayyam y las cúbicas

Uno de los que estudió las ecuaciones cúbicas fue Omar Jayyam (1048-1131) y usaba para ello métodos geométricos parecidos a los de Al–Jwarizmi, pero que involucran cónicas. Como él, dividía el problema en distintos casos, ¡14 nada menos!, y para cada uno de ellos hacía una construcción diferente.

Veamos alguna de sus construcciones

$$x^3 + mx = n$$



El método consiste en trazar una parábola de ecuación

$$y = \sqrt{m}\, x^2$$

$$y = \sqrt{m}\, x^2$$

y una circunferencia tangente al eje de simetría de la parábola por el vértice y de diámetro n/m (= $2h$ = *longitud de* OH).

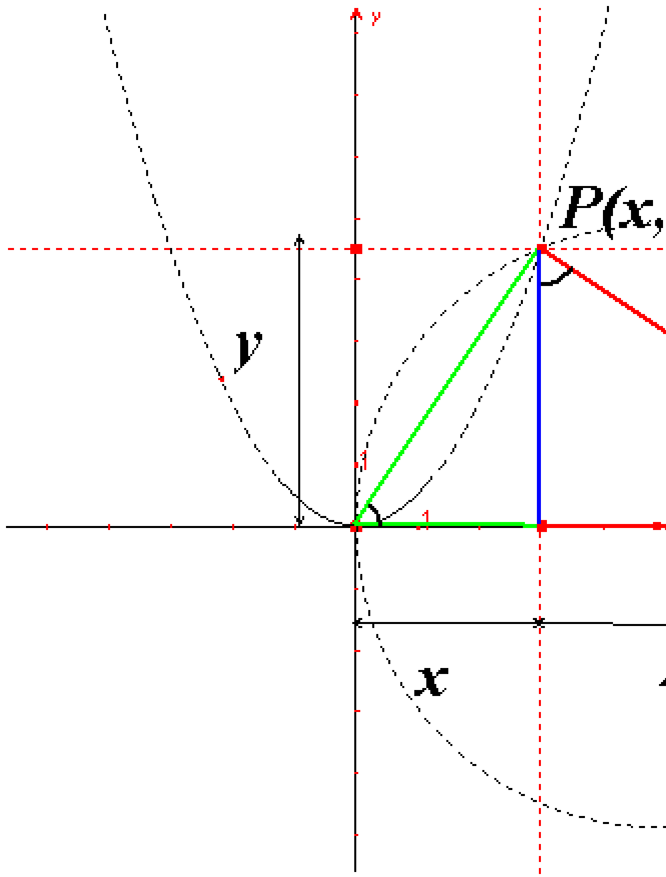
$$(x-h)^2 + y^2 = h^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 = h^2$$

La longitud del segmento OX es solución de la ecuación.

Veamos por qué

$x^3 + mx = n$



Por semejanza de triángulos

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2h - x}$$

$$x^3 = b\,(2h - x)$$

Y por ser $P(x, y)$ un punto de la parábola

Por último recordemos que

$2h = n/m$ y obtenemos

$$x^2 = \sqrt{m}\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{m}}{x}$$

Usando ambas igualdades:

$$x^3 + mx = n$$

$$\frac{m}{x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2h - x} = \frac{x}{2h - x}$$

$2h - x$

Luego

$$x^3 = m\,(2h - x)$$

Cardano y Tartaglia

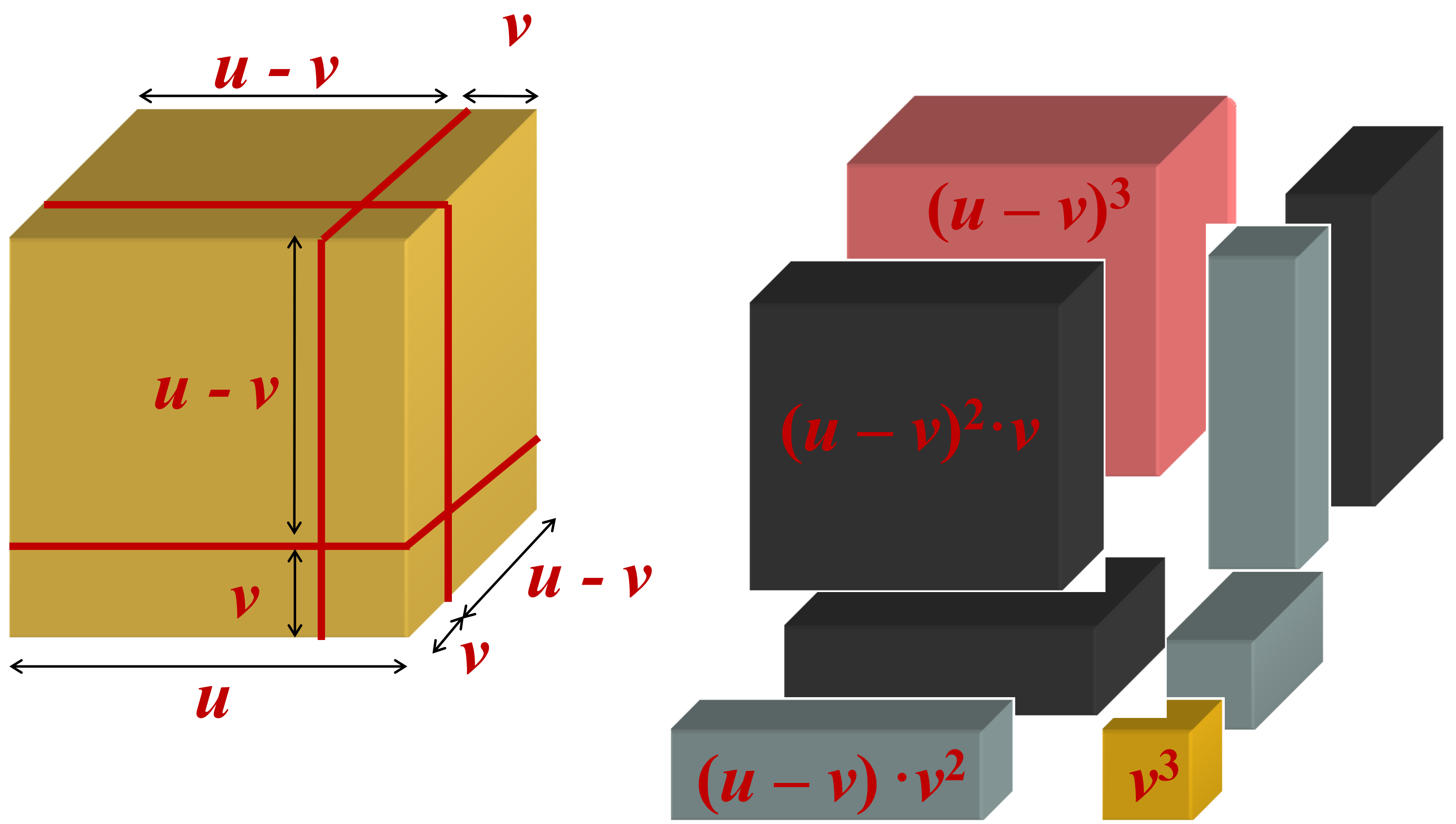
La solución general de la cúbica no se encontró hasta el siglo XVI. La historia de la resolución de esta ecuación es digna de una novela de amistades, intrigas y traiciones.

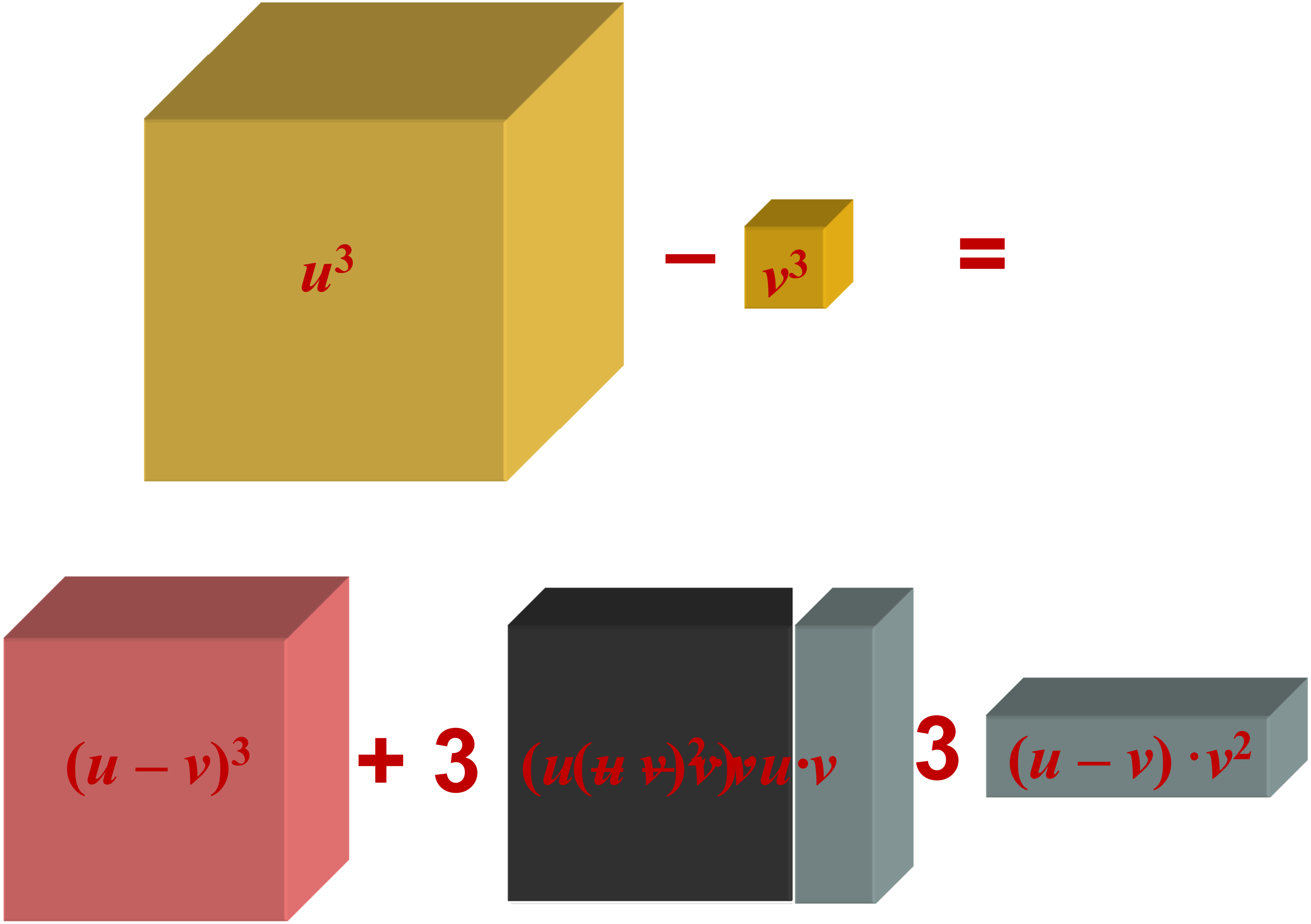
"Si quieres resolver la ecuación $x^3 + mx = n$, encuentra dos números cuya diferencia sea n y cuyo producto sea $(m/3)^3$.

La solución será la diferencia de las raíces cúbicas de esos dos números."

Tartaglia

La cúbica $\quad x^3 + mx = n$





u^3
$-$
v^3
$=$
$(u-v)^3$
$+\ 3$
3
$(u-v)\cdot v^2$

$$x^3 + mx = n$$

$$u^3 - v^3 = (u - v)^3 + 3(u - v)uv$$

Llamando $x = u - v$

$$x^3 + 3uv\,x = u^3 - v^3$$

$x^3 + mx = n$

$$x^3 + 3uv\,x = u^3 - v^3$$

$$\begin{cases} 3uv = m \\ u^3 - v^3 = n \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \left(\dfrac{m}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 = n \end{cases}$$

"Si quieres resolver la ecuación $x^3 + mx = n$ ***, encuentra dos números cuya diferencia sea n y cuyo producto sea*** $(m/3)^3$ ***.***

La solución será la diferencia de las raíces cúbicas de esos dos números."

$$\begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \left(\dfrac{m}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 = n \end{cases}$$

$$v^3 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} \qquad u^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Algunos de los problemas que del Fiore propuso a Tartaglia

- *Determina por dónde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en tierra sea la raíz cúbica de la parte superior cortada.*
- *Encuentra un número que se convierte en 6 cuando se le suma su raíz cúbica.*
- *Un hombre vende un zafiro por 500 ducados, obteniendo así un beneficio de la raíz cúbica del precio que pagó por él. ¿A cuánto asciende el beneficio?*