IX Reunión Nacional de ESTALMAT
Castro Urdiales
30-31 Marzo 2012

APRENDIENDO DE EULER

Merche Sánchez

¿Te cuento un secreto?

¿Te cuento un secreto?

Escribimos n cartas dirigidas a n personas distintas, y escribimos n sobres con las correspondientes direcciones. Después metemos al azar una carta en cada sobre. Si nos preguntamos por el promedio de cartas que llegarán a su verdadero destinatario, la respuesta es muy sorprendente: por término medio tan sólo llegará **una** carta cualquiera que sea n.

¿Te cuento un secreto?

E – 201

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
d	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
f	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
g	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
h	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
i	-	-	-	-	-	-	-	- -	14833	148329
k	-	-	-	-	-	-	-	- -	- -	133496

E – 201

CALCUL DE LA PROBABILITÉ
DANS LE JEU DE RENCONTRE,
PAR M. EULER.

¿Te cuento un secreto?

E – 201

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
d	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
f	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
g	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
h	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
i	-	-	-	-	-	-	-	- -	14833	148329
k	-	-	-	-	-	-	-	- -	- -	133496

E – 201

CALCUL DE LA PROBABILITÉ
DANS LE JEU DE RENCONTRE,
PAR M. EULER.

The Solution of a curious Question in the Science of Combinations
Leonhard Euler*
Presented to the assembly 18 October 1779 Memoirs of the academy of sciences of St. Petersburg 3 (1809/10), 1811, p. 57-64

*Traducción de Richard J. Pulskamp,Department of Mathematics Computer Science, Xavier University. Cincinnati, OH. The Euler Archive:eulerarchive.maa.org/pages/E738.html

E-201 Serie I Volume 7 de Opera Omnia, on line a través de Euler Archive

COINCIDENCIAS
EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS
EL PROBLEMA DE LOS SOMBREROS

Cinco amigos se reúnen a cenar en un restaurante y encargan cinco platos diferentes. Al cabo de unos días vuelven al mismo restaurante y cenan los mismos platos pero ninguno de ellos repite la comida anterior. ¿De cuántas maneras puede hacerse la nueva elección?

Vamos a ver como un esquema conveniente ayuda a comprender y resolver mejor el problema. Fijamos un orden entre los comensales, y designamos por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, respectivamente, a los platos que pidieron en la primera reunión. Así, el pedido efectuado corresponde al esquema:

$$P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5$$

COINCIDENCIAS

Vamos a ver como un esquema conveniente ayuda a comprender y resolver mejor el problema. Fijamos un orden entre los comensales, y designamos por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, respectivamente, a los platos que pidieron en la primera reunión. Así, el pedido efectuado corresponde al esquema:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$$





COINCIDENCIAS

Vamos a ver como un esquema conveniente ayuda a comprender y resolver mejor el problema. Fijamos un orden entre los comensales, y designamos por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, respectivamente, a los platos que pidieron en la primera reunión. Así, el pedido efectuado corresponde al esquema:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$$

Cualquier otro pedido de los mismos 5 platos puede interpretarse como una elección ordenada de los símbolos precedentes, esto es, como una permutación de los mismos. Pero sólo nos interesan aquellas permutaciones que responden a la condición requerida, por ejemplo, la permutación

$$P_4 P_3 P_2 P_5 P_1$$

Vamos a ver como un esquema conveniente ayuda a comprender y resolver mejor el problema. Fijamos un orden entre los comensales, y designamos por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, respectivamente, a los platos que pidieron en la primera reunión. Así, el pedido efectuado corresponde al esquema:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$$

mientras que no nos sirve la siguiente ordenación:

$$P_3 P_5 P_1 P_4 P_2$$

pues describe una situación en la que el cuarto comensal no ha cambiado su plato.

COINCIDENCIAS

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

Lo haremos, restando de 5! el número de las filas que fijan algún P_i.
¿Cuántas fijan P_1? Puesto que P_1 va en primer lugar, debemos permutar los otros cuatro símbolos en los cuatro lugares restantes, y lo podremos hacer de 4! maneras distintas. Evidentemente, lo mismo ocurre con las que fijan cualquiera de los otros P_i. En cada caso, el número hallado se debe restar del total y así obtenemos la respuesta (a todas luces precaria): $5! - 5 \times 4!$.

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

Ahora bien, ¿qué ocurre con aquellas permutaciones que fijan P_1 y P_2? Cada una de éstas, cuyo número total asciende a 3!,ha sido considerada tanto en las que fijan P_1 como en las que fijan P_2, y por lo tanto ha sido restada dos veces. Debemos entonces sumarlas una vez para equilibrar la cuenta. Pero lo mismo ocurre con las que fijan P_1 y P_3, con las que fijan P_2 y P_5 etc. En general, con todas las que fijan dos símbolos distintos cualesquiera. Como hay $\binom{5}{2}$ maneras de elegir dos símbolos distintos entre cinco, y el número de permutaciones que fijan P_i y P_j es 3! en todos los casos, el análisis anterior nos conduce a la nueva respuesta :$5! - 5 \times 4! + \binom{5}{2}3!$; mejor lo escribimos así

$$\binom{5}{0} \cdot 5! - \binom{5}{1} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3!$$

.

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

Continuando con este método de ajuste sucesivo de la solución, consideremos ahora aquellas permutaciones que fijan tres símbolos, por ejemplo, P_1, P_2 y P_3. En la expresión de arriba, cada una de ellas ha sido descontada tres veces, pues es una de las que fijan a P_1, es una de las que fijan a P_2, y también a P_3. Pero también ha sido sumada tres veces, a saber: entre las que fijan P_1 y P_2, entre las que fijan P_1 y P_3, y finalmente entre las que fijan a P_2 y P_3. Por lo tanto, debemos descontarlas una vez. Teniendo en cuenta que hay 2! de ese tipo, y que lo mismo se aplica para las $\binom{5}{3}$ formas de elegir los tres símbolos distintos entre los cinco, ajustamos la solución en la forma.

$$\binom{5}{0} \cdot 5! - \binom{5}{1} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2!$$

.

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

El proceso recurrente que estamos efectuando finalizará cuando hayamos examinado todas las formas posibles de contar elementos repetidos, para lo cual falta considerar los casos de permutaciones que fijan cuatro y cinco símbolos. Mediante un análisis muy similar a los que ya hemos efectuado, se obtiene la respuesta definitiva:

$$\binom{5}{0} \cdot 5! - \binom{5}{1} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - \binom{5}{5} \cdot 0! = 44$$

COINCIDENCIAS

Debemos contar el número de permutaciones en las cuales ningún símbolo conserva su lugar inicial.

Es decir nuestros comensales pueden hacer su pedido de 44 maneras diferentes. Como se puede ver, la expresión obtenida presenta un aspecto muy agradable y regular. Haciendo abstración del enunciado particular que la originó, resulta que hemos encontrado una fórmula para calcular el número de permutaciones de cinco objetos distintos en las cuales ningún objeto conserva su lugar inicial. Por ejemplo, de los 120 números de cinco cifras distintas que se obtienen permutando los dígitos 13524, hay exactamente 44 que no mantienen ninguna cifra en su posición original.

¿Cuántas permutaciones de $1, 2, \cdots, n$ no conservan ningún número en su posición natural?

Cada una de ellas se denominará un "desbarajuste", y su número lo designaremos por D_n. La generalización de la fórmula anterior es la siguiente:

$$D_n = \binom{n}{0} \cdot n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 0!$$

es decir:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Cuatro señores, cada uno con su sombrero, van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa. A la salida cada uno toma al azar un sombrero. ¿ Cuál es la probabilidad de que ninguno de los señores reciba su sombrero?

COINCIDENCIAS

Cuatro señores, cada uno con su sombrero, van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa. A la salida cada uno toma al azar un sombrero. ¿ Cuál es la probabilidad de que ninguno de los señores reciba su sombrero?

¿ Cuál es la primera impresión? Será algo, poco, bastante o muy probable?

Cuatro señores, cada uno con su sombrero, van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa. A la salida cada uno toma al azar un sombrero. ¿ Cuál es la probabilidad de que ninguno de los señores reciba su sombrero?

¿ Cuál es la primera impresión? Será algo, poco, bastante o muy probable?
El problema es igual al anterior.
Posteriormente veremos una simulación hecha con Geogebra.

EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS

Preparamos n cartas dirigidas a n personas distintas, y n sobres con las correspondientes direcciones. Metemos al azar una carta en cada sobre. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a su destinatario correcto exactamente k cartas ($k = 0, 1, \ldots, n$)?

EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS

Preparamos n cartas dirigidas a n personas distintas, y n sobres con las correspondientes direcciones. Metemos al azar una carta en cada sobre. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a su destinatario correcto exactamente k cartas ($k = 0, 1, \ldots, n$)?

Con este enunciado, el problema (y su primera solución) ha cumplido ya 250 años (Nicolás Bernoulli, Leonardo Euler).

EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS

El problema admite otros muchos enunciados: n matrimonios que van a un baile donde se sortean las parejas etc.; todos ellos, lo mismo que el original, se dejan representar por el siguiente modelo matemático cuya abstracción lo hace más claro de analizar:

¿Cuál es la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $1, 2, \ldots, n$, haya exactamente k elementos fijos ($k = 0, 1, \ldots, n$), es decir, k números que permanezcan en su posición natural?

EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS

El problema admite otros muchos enunciados: n matrimonios que van a un baile donde se sortean las parejas etc.; todos ellos, lo mismo que el original, se dejan representar por el siguiente modelo matemático cuya abstracción lo hace más claro de analizar:

¿Cuál es la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $1, 2, \ldots, n$, haya exactamente k elementos fijos ($k = 0, 1, \ldots, n$), es decir, k números que permanezcan en su posición natural?

Así, 53241 es una permutación de 12345 en la que hay exactamente un elemento fijo (el 4).

El problema admite otros muchos enunciados: n matrimonios que van a un baile donde se sortean las parejas etc.; todos ellos, lo mismo que el original, se dejan representar por el siguiente modelo matemático cuya abstracción lo hace más claro de analizar:

¿Cuál es la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $1, 2, \dots, n$, haya exactamente k elementos fijos ($k = 0, 1, \dots, n$), es decir, k números que permanezcan en su posición natural?

Vamos a denotar por $d(n, k)$ al número de las permutaciones de $12 \dots n$, con k elementos fijos exactamente; y en particular al número $d(n, 0)$ lo denotaremos (por su importancia para calcular los demás) simplemente por d_n (número de *permutaciones desbarajustadas* de n elementos).

Por ejemplo, cuando $n = 4$ tenemos

perm.	fijos	perm.	fijos	perm.	fijos	perm.	fijos
1234	4	2134	2	3124	1	4123	0
1243	2	2143	0	3142	0	4132	1
1324	2	2314	1	3214	2	4213	1
1342	1	2341	0	3241	1	4231	2
1423	1	2413	0	3412	0	4312	0
1432	2	2431	1	3421	0	4321	0

de manera que $d(4,4) = 1$; $d(4,3) = 0$; $d(4,2) = 6$; $d(4,1) = 8$; $d_4 = d(4,0) = 9$.

Podemos construir una tabla:

n	d_n	$d(n,1)$	$d(n,2)$	$d(n,3)$	$d(n,4)$
1	0	1			
2	1	0	1		
3	2	3	0	1	
4	9	8	6	0	1

Observemos en primer lugar que, como el número total de permutaciones de $1, 2, \ldots, n$ es $n!$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} d(n,k) = n! \tag{1}$$

Por otra parte, una permutación de n elementos con k fijos exactamente se obtiene eligiendo los k elementos fijos de cualquier manera entre los n y obligando a que la permutación de los restantes $n-k$ elementos sea *desbarajustada*, luego:

$$d(n,k) = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k} \, , \qquad (2)$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Con las fórmulas (1) y

(2) podríamos ahora proseguir nuestra tabla anterior:

n	d_n	$d(n,1)$	$d(n,2)$	$d(n,3)$	$d(n,4)$	$d(n,5)$
5	44	45	20	10	0	1

$$d(n,k) = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k}\,, \tag{2}$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Con las fórmulas (1) y (2) podríamos ahora proseguir nuestra tabla anterior:

n	d_n	$d(n,1)$	$d(n,2)$	$d(n,3)$	$d(n,4)$	$d(n,5)$
5	44	45	20	10	0	1

Pues es claro que $d(5,5) = 1$ y $d(5,4) = 0$; $d(5,3) = \binom{5}{3} d_2 = 10$; $d(5,2) = \binom{5}{2} d_3 = 20$; $d(5,1) = 5d_4 = 45$; y finalmente $d_5 = 5! - (45 + 20 + 10 + 1) = 120 - 76 = 44.$

Prosiguiendo un par de filas más, obtenemos una tabla como la siguiente:

n	d_n	$d(n,1)$
1	0	1
2	1	0
3	2	3
4	9	8
5	44	45
6	265	264
7	1854	1855

Basta un golpe de vista para observar que en todas las filas de esta tabla se cumple $d_n - d(n,1) = (-1)^n$, o bien, dado que $d(n,1) = nd_{n-1}$ según la fórmula (2), observamos que los números d_n cumplen la ley de recurrencia (para $n \geq 2$):

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n. \tag{3}$$

EULER

¿Podemos demostrar que la ley (3) se cumple para todo n?

A mediados del siglo XVIII, Euler razonó así (su argumentación original se refería al enunciado con cartas y sobres):
Y es aquí donde EULER nos muestra su genialidad.

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación desbarajustada de $1, 2, \ldots, n$ (es decir, se tiene que $a_j \neq j \ \forall j$). El primer número a_1 será uno cualquiera de los $n-1$ números $2, 3, \ldots, n$. Pongamos que $a_1 = 2$. Entonces hay dos posibilidades:

- $a_2 = 1$, en cuyo caso $a_3, \ldots, a_n$ será una de las d_{n-2} permutaciones desbarajustadas de $3, \ldots, n$.
- $a_2 \neq 1$, en cuyo caso $a_2, a_3, \ldots, a_n$ será una de las d_{n-1} permutaciones desbarajustadas de los $n-1$ elementos $1, 3, \ldots, n$.

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación desbarajustada de $1, 2, \ldots, n$ (es decir, se tiene que $a_j \neq j \ \forall j$). El primer número a_1 será uno cualquiera de los $n-1$ números $2, 3, \ldots, n$. Pongamos que $a_1 = 2$. Entonces hay dos posibilidades:

- $a_2 = 1$, en cuyo caso $a_3, \ldots, a_n$ será una de las d_{n-2} permutaciones desbarajustadas de $3, \ldots, n$.
- $a_2 \neq 1$, en cuyo caso $a_2, a_3, \ldots, a_n$ será una de las d_{n-1} permutaciones desbarajustadas de los $n-1$ elementos $1, 3, \ldots, n$.

Luego $d_n = (n-1)\,(d_{n-2} + d_{n-1})$ para todo $n \geq 3$. Y entonces resulta:

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= -\big(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}\big) \\ &= (-1)^2\big(d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}\big) \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{n-2}(d_2 - 2d_1) = (-1)^n, \end{aligned}$$

Además, escribiendo la ley de recurrencia (3) para n, $n-1$, ..., 2, dividiendo respectivamente por $n!$, $(n-1)!$, ..., $2!$, y sumando las $n-1$ igualdades así obtenidas se obtiene la fórmula general para $\mathbf{d_n}$:

$$d_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

(con un pequeño esfuerzo se puede ver que d_n es el número entero más próximo a $\frac{n!}{e}$.)

Con esto, la solución del problema: la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $12\ldots n$ haya exactamente k elementos fijos ($k = 0, 1, \ldots, n$) es

$$p(n,k) = \frac{d(n,k)}{n!} = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right). \quad (4)$$

Se obtiene la siguiente tabla:

n	$p(n,0)$	$p(n,1)$	$p(n,2)$	$p(n,3)$	$p(n,4)$	$p(n,5)$	$p(n,6)$
1	0	1					
2	0.5	0	0.5				
3	0.333	0.5	0	0.167			
4	0.375	0.333	0.250	0	0.042		
5	0.367	0.375	0.167	0.083	0	0.008	
6	0.368	0.367	0.188	0.056	0.021	0	0.001
7	0.368	0.368	0.183	0.063	0.014	0.004	0
8	0.368	0.368	0.184	0.061	0.016	0.003	0.001

A medida que n aumenta, los valores en cada columna $p(n,k)$ se van estabilizando rápidamente en torno a su valor límite $\dfrac{1}{e\,k!}$.

Finalmente, el promedio, $\overline{f}$, del número de elementos fijos entre las $n!$ permutaciones de $12\ldots n$ es

$$\overline{f} = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k)}{n!} = 1,$$

pues se tiene también que

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k) = n!, \tag{5}$$

cosa que se puede probar contando los elementos fijos en el total de las $n!$ permutaciones de $1, 2 \ldots n$ de dos maneras:

- por un lado, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, el elemento j es fijo en $(n-1)!$ permutaciones, luego el total de fijos es $n(n-1)! = n!$.
- y por otro lado es obvio que el total de fijos es $\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k)$.

En la siguiente dirección web de la Universidad de Florencia:
$http://www.ds.unifi.it/VL/VL_EN/urn/urn6.html$
además de desarrollar las matemáticas del problema tienen un simulador interactivo del experimento consistente en repetir un número N grande de veces el reparto de las n cartas en los n sobres, para $n \leq 20$.
Hay una web en el portal de la MAA de ED SANDIFER How Euler Did It: $http://www.maa.org/howeulerdidit.html$
Otras páginas de interés: $http://www.eulerarchive.org/$

Bibliografía

L. Euler (1753)
Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre.
Mém. Acad. Sci. Berlin 7 (1753) 1966, pp.255-270

Bibliografía

- L. Euler (1753)
- William Dunham (1999)
  Euler. The Master of Us All
  The Mathematical Association of America

Bibliografía

- L. Euler (1753)
- William Dunham (1999)
- William Dunham (2000)
  Euler. El Maestro de todos los matemáticos
  Nivola

Bibliografía

- L. Euler (1753)
- William Dunham (1999)
- William Dunham (2000)
- D. Hanson, K. Sveyffarth, J.H. Weston (1983)
  Matchings, Derangements, Rencontres.
  Mathematics Magazine, vol 56, No.20 (sep 1983) pp.224-229

Bibliografía

- L. Euler (1753)
- William Dunham (1999)
- William Dunham (2000)
- D. Hanson, K. Sveyffarth, J.H. Weston (1983)
- Gabriela R. Sanchis (1998)
  Swapping Hats: A Generalization of Montmort's Problem.
  Mathematics Magazine, Vol. 71, No. 1 (Feb., 1998), pp. 53-57

FIN

LOS CLÁSICOS NUNCA FALLAN!!!

Son esos libros tenaces que aunque pasen décadas y siglos siguen susurrándonos cosas al oído.

Italo Calvino dice que *un clásico es un libro que nunca termina de decir lo que tiene que decir.*

Cuando leo algún trabajo de Euler, tengo esa sensación, siempre me parece que me dice algo nuevo.

LOS CLÁSICOS NUNCA FALLAN!!!

Son esos libros tenaces que aunque pasen décadas y siglos siguen susurrándonos cosas al oído.

Italo Calvino dice que *un clásico es un libro que nunca termina de decir lo que tiene que decir.*

Cuando leo algún trabajo de Euler, tengo esa sensación, siempre me parece que me dice algo nuevo.

Muchas gracias!