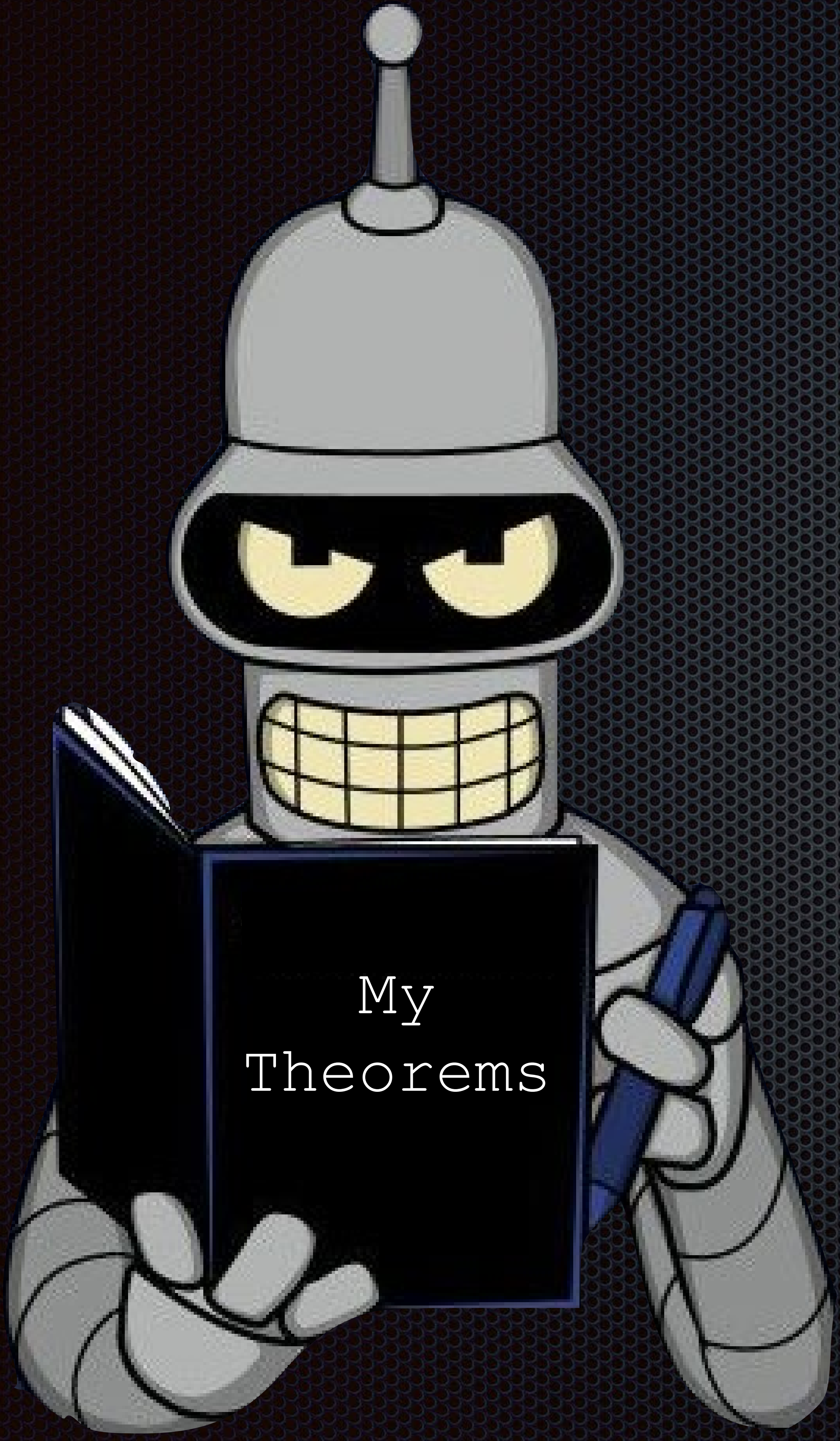
El Teorema de Futurama

Angélica Benito y Ana Granados



De bien nacidos es ser agradecidos…

ESTALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

FECYT
INNOVACIÓN

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

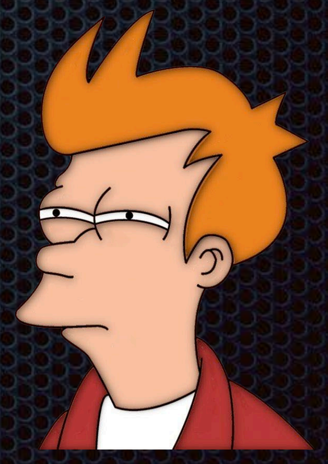
FUNDACIÓN REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE ESPAÑA

Softtek®

Primera parte: ¡permutemos!

- ¿Qué es una permutación?

- ¿Conoces algún ejemplo de permutación que no sea de números?



- Dados 4 objetos distintos, ¿cuántas posibles permutaciones hay? ¿Y si tenemos 7? ¿Y para *n* objetos distintos?

Primera parte: ¡denotemos!

Empecemos con un ejemplo:

1—> 4
3 —> 1
4 —> 3

Lo escribimos como una **matriz** de dos filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Notación de **ciclos**: Escribimos (1 4 3). ¿Qué quiere decir?

El 1 va al 4 que va al 3 que de vuelta va al 1, formando un ciclo.

Primera parte: ¡preguntemos!

1. ¿Cualquier permutación de cuatro elementos se puede escribir como un ciclo?

2. ¿Cómo podemos resolver este problema? Fíjate en el ejemplo que has pensado, ¿qué harías?

3. **Fijamos la notación de ciclos**: Empezamos por el elemento más pequeño que no se queda fijo hasta completar con cada ciclo.

Primera parte: ¡combinemos!

¿Qué pasa si queremos combinar varias permutaciones? ¿En qué situaciones de la vida real hacemos esto?

Un **ejemplo**: primero permutamos (1 2) y a continuación (1 3)

$$(1\ 2)\ (1\ 3) = \ ?$$

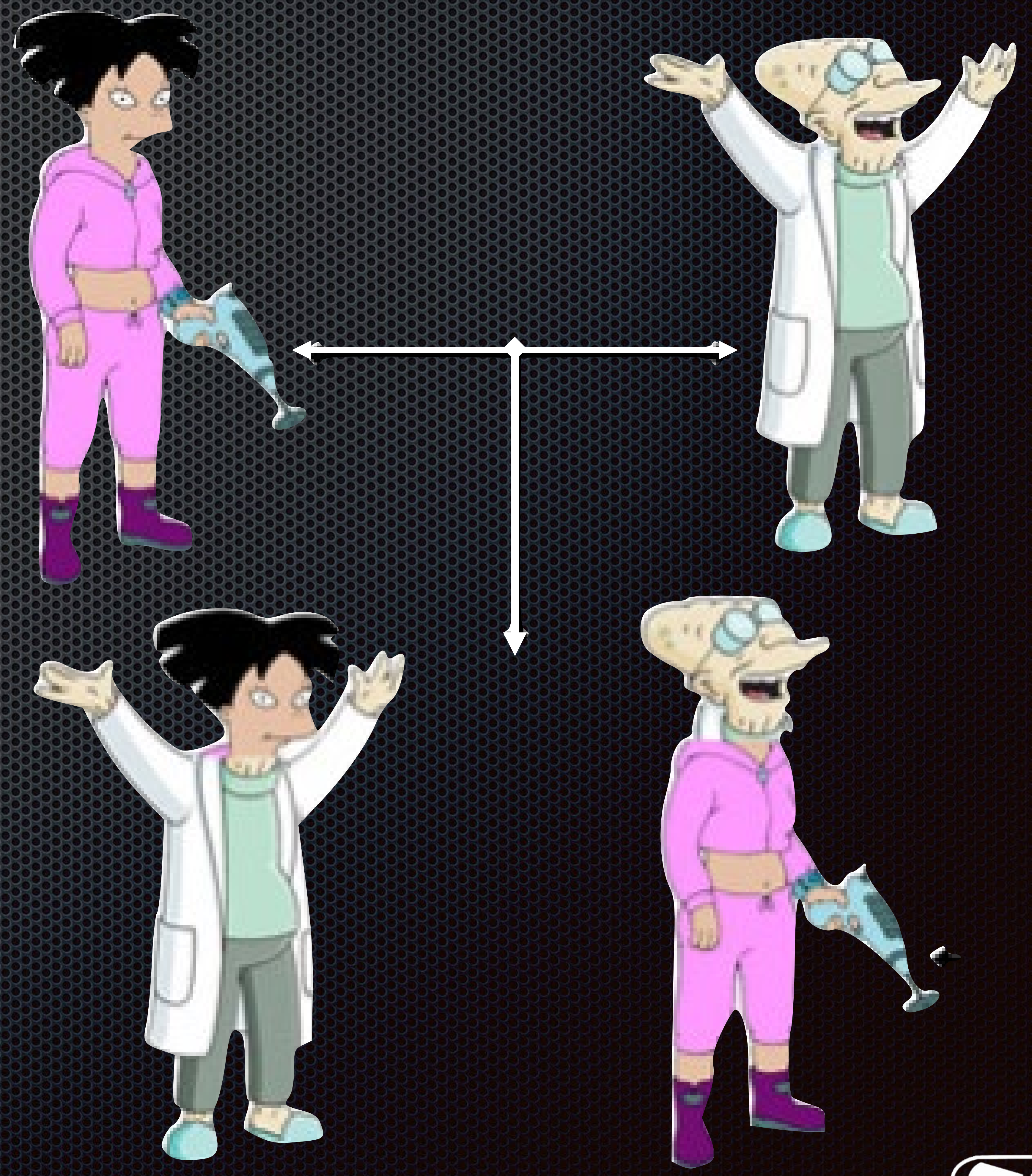
Propiedades de las permutaciones:

- ¿Conmutativo? ¿(1 2) (1 3) = (1 3) (1 2)?
- ¿Existe identidad?
- ¿Existe inversa? ¿cómo se construye?
- ¿Asociativo?

Segunda parte: **¡El Teorema de Futurama!**

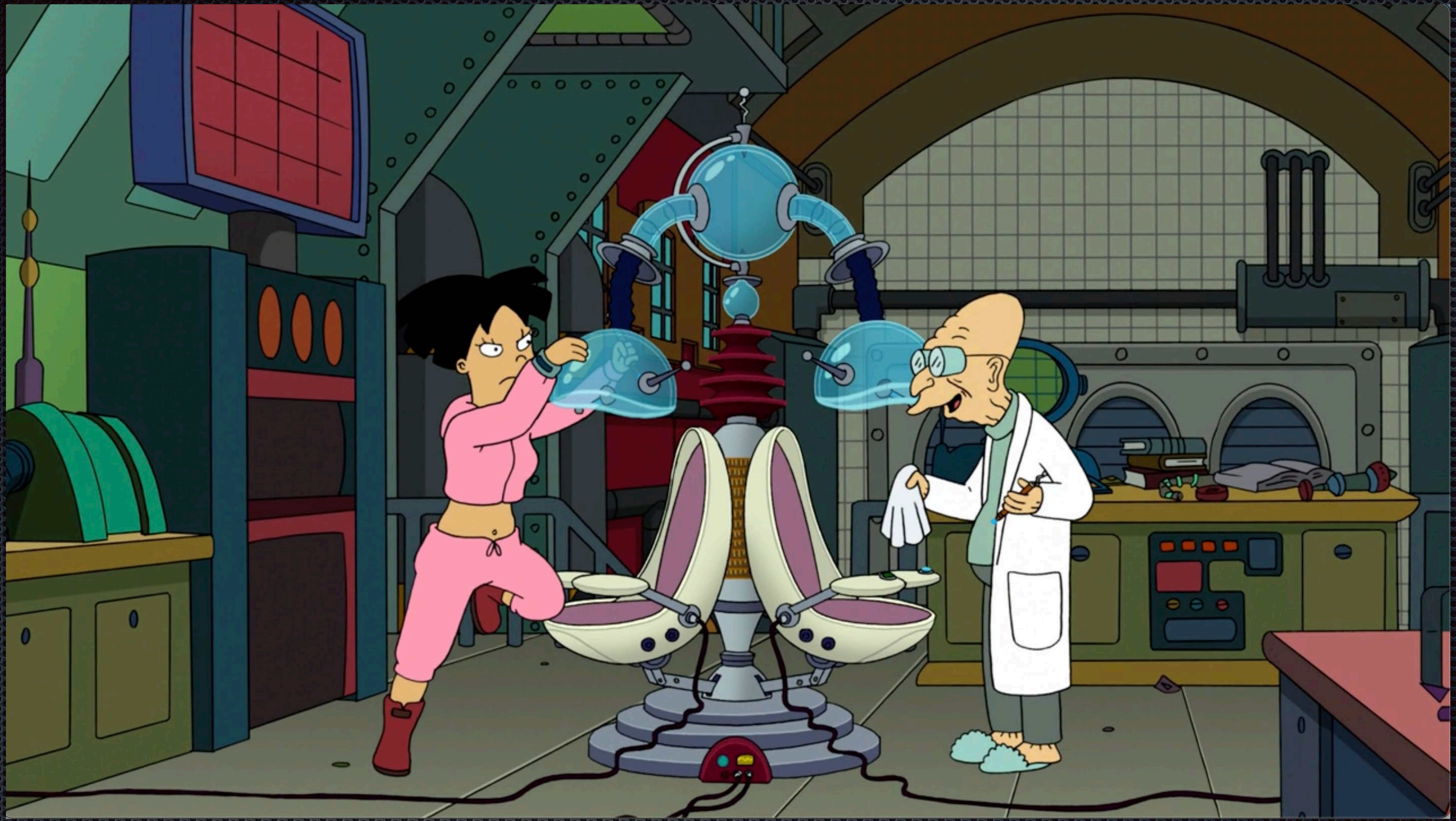
Segunda parte: El problema

El Profesor Farnsworth y Amy deciden probar su flamante "***máquina intercambiadora de mentes***" que acaban de inventar.

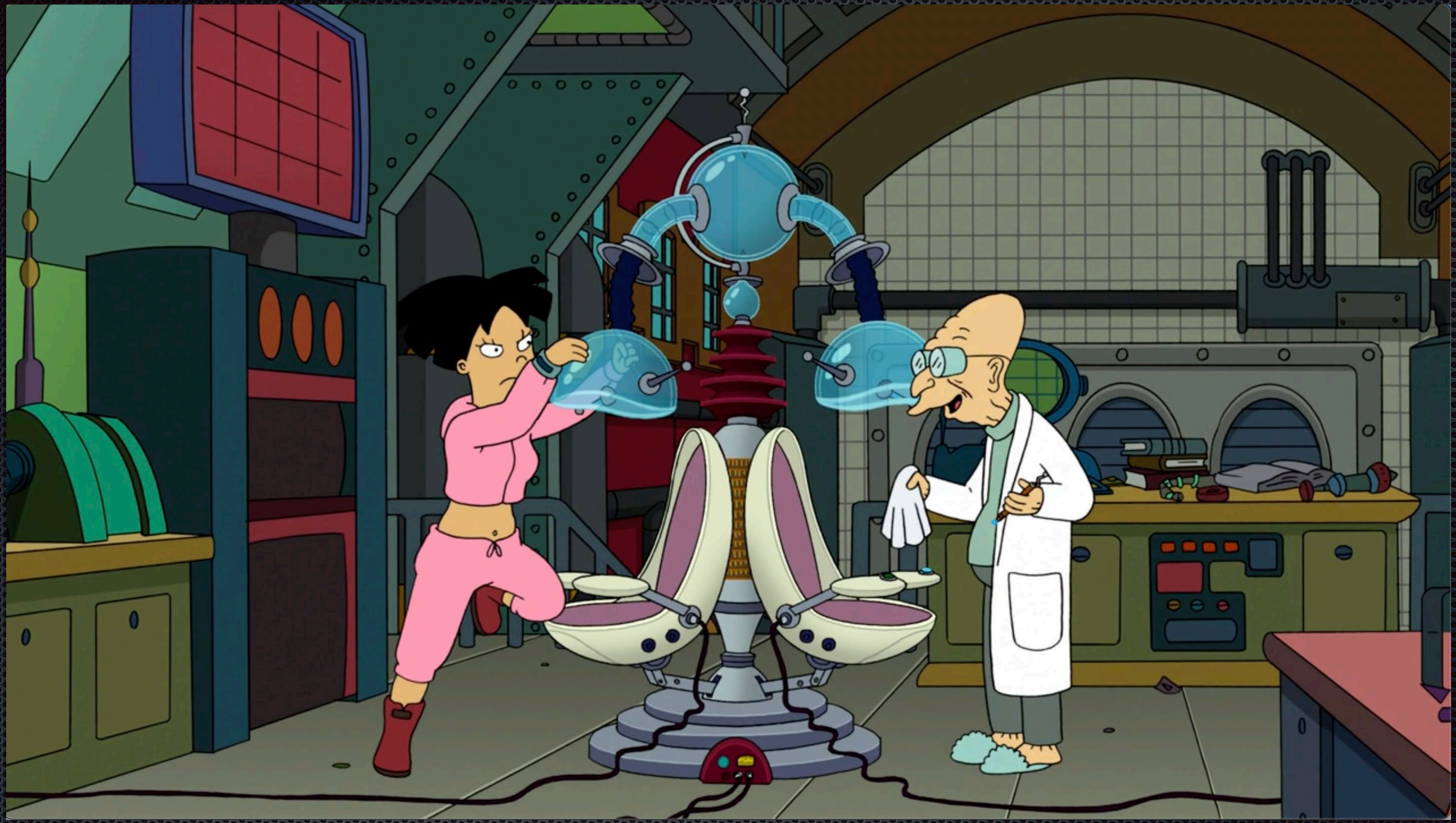


Cuando intentan volver a su cuerpo original, descubren un **error** en el diseño de la máquina: un mismo par de cuerpos **no** puede entrar en la máquina más de una vez.

Segunda parte: El vídeo



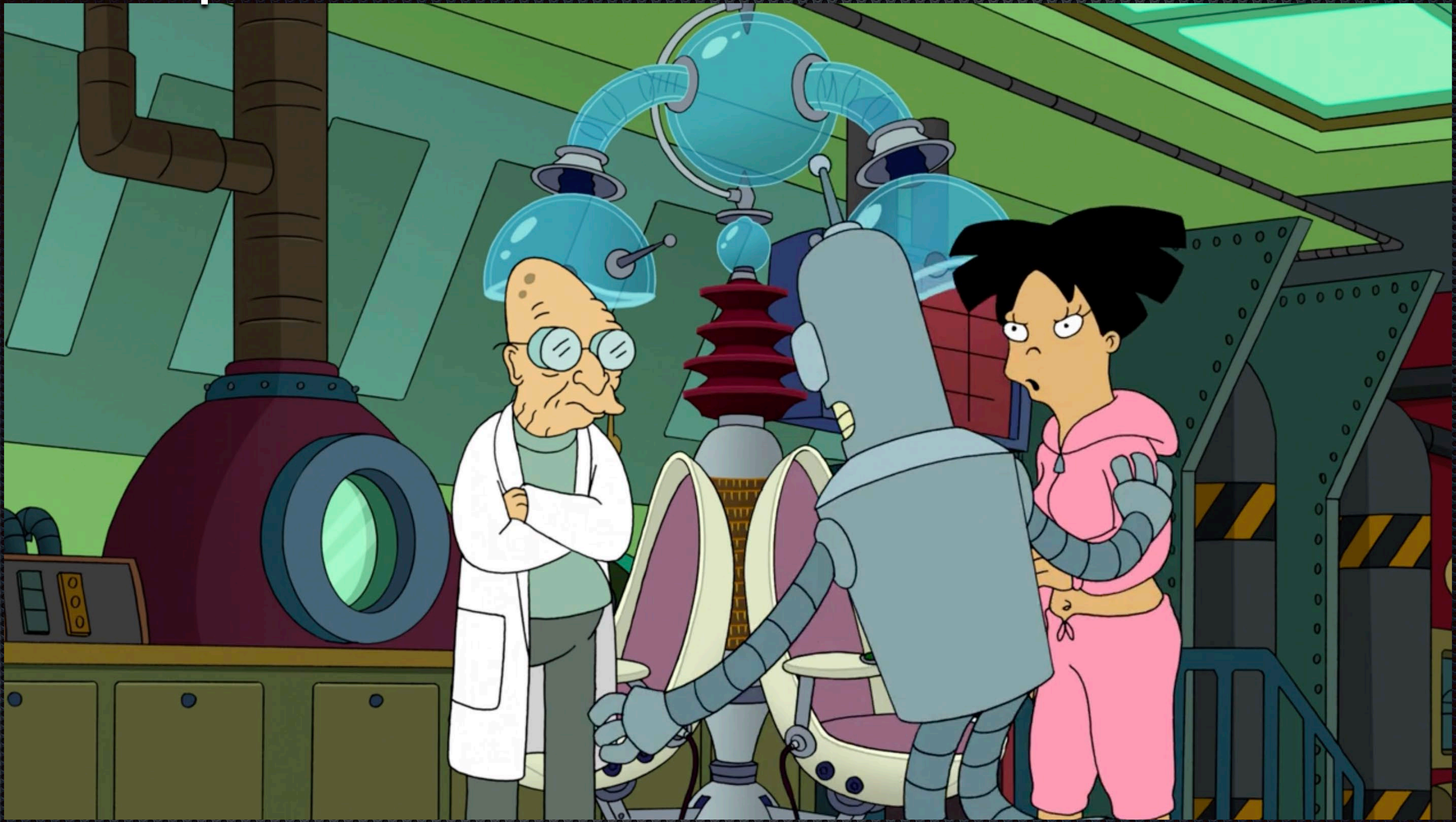
Segunda parte: El vídeo



Escribe lo que acaba de ocurrir en el lenguaje de las permutaciones.

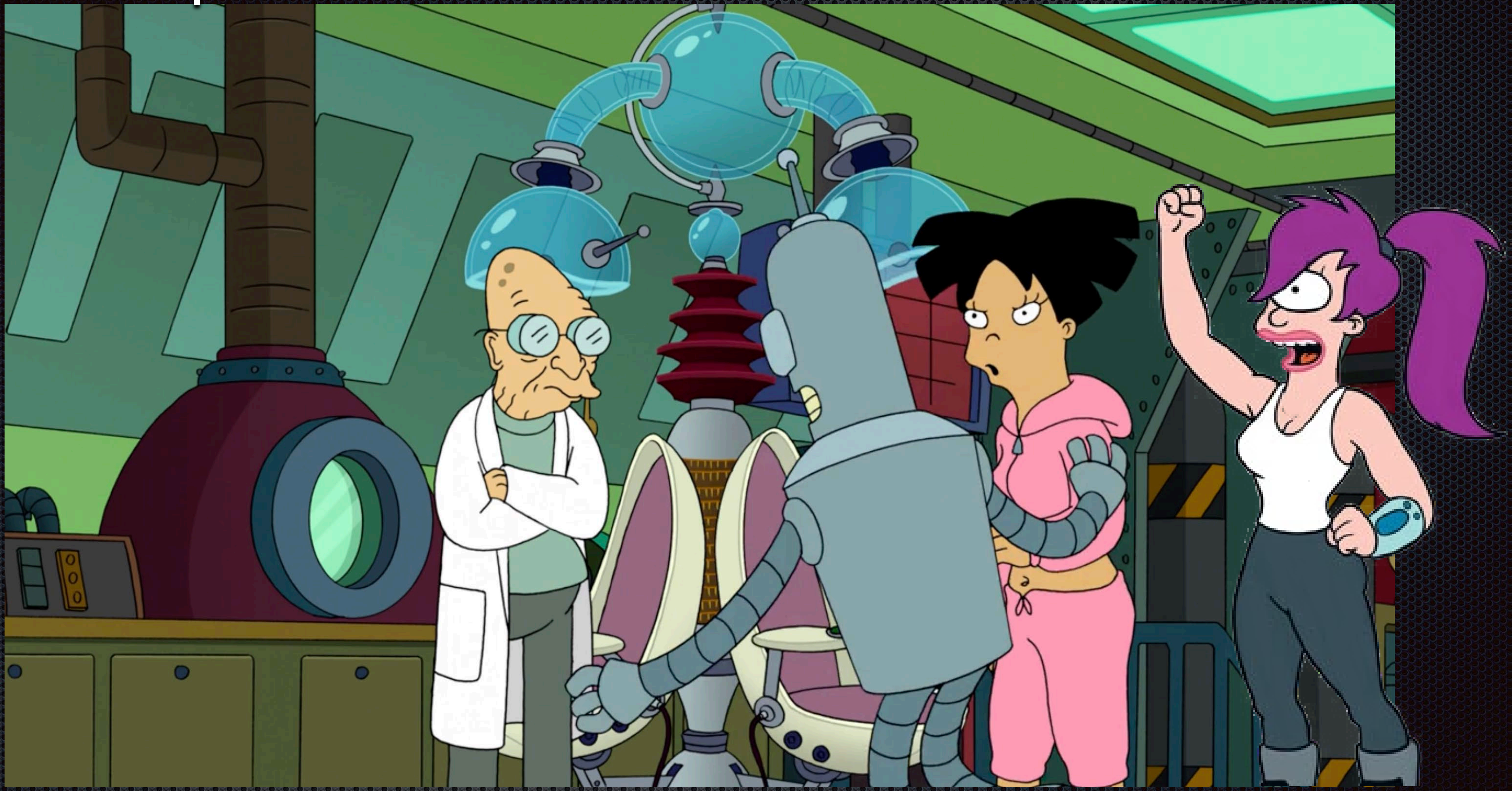
¿Pueden recuperar Amy y el Profesor su cuerpo original? ¿qué operación necesitan hacer en lenguaje matemático? ¿cuál sería?

Segunda parte: El vídeo



¿Qué pasa si le piden ayuda a Bender? ¿pueden recuperar los tres su cuerpo original? Es decir, se puede calcular $(1\ 2)^{-1}$ en {1, 2, 3} con las restricciones de la máquina.

Segunda parte: El vídeo

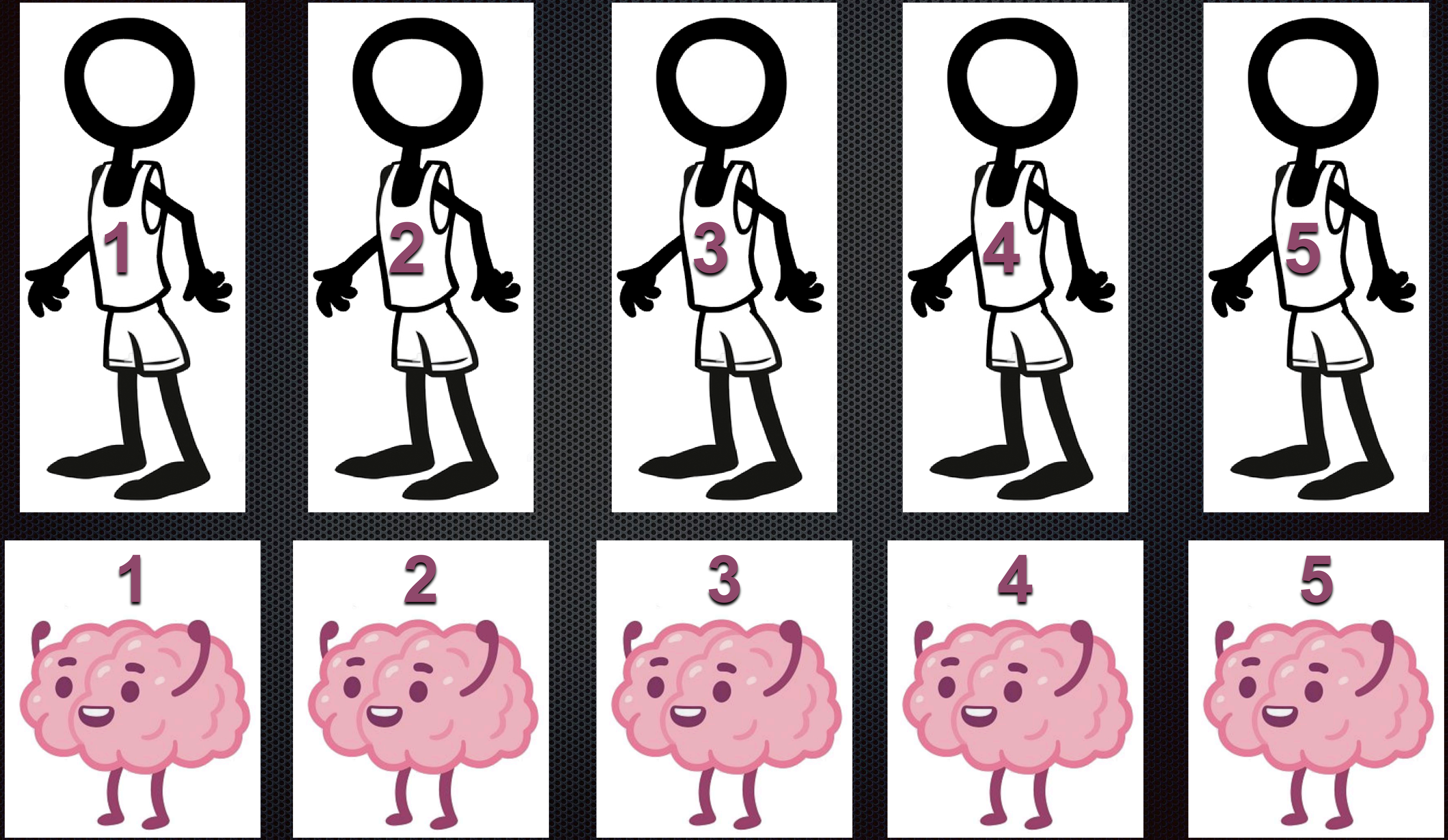


¿Y si entra ahora Leela? ¿podrán recuperar su cuerpo original los cuatro? Es decir, en {1, 2, 3, 4}, ¿existen las inversas de las permutaciones calculadas arriba?

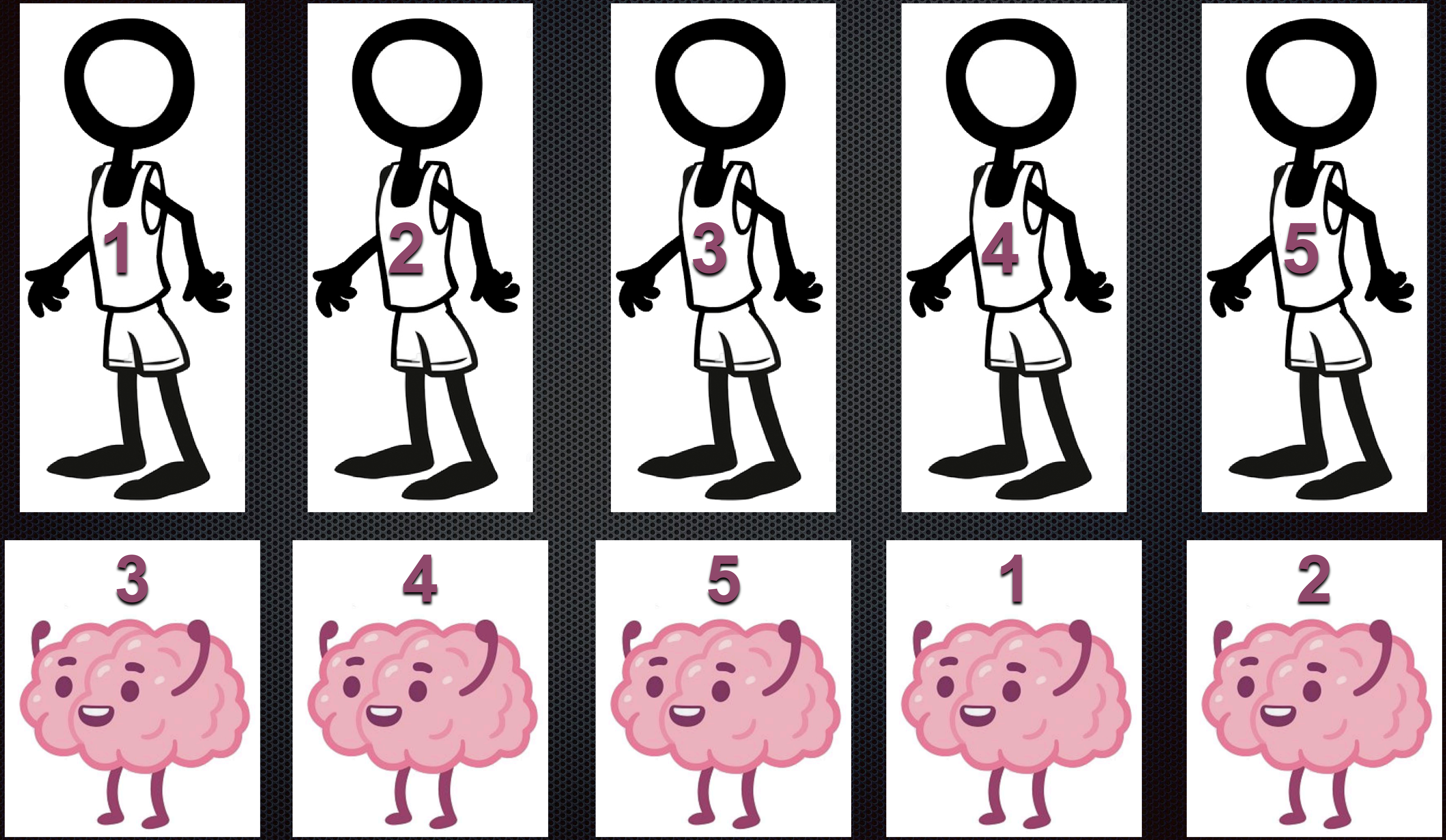
Segunda parte: El vídeo

Pregunta: *Si en la máquina entran 4 o más personas, ¿existe una manera para que cada uno recupere su cuerpo original?*

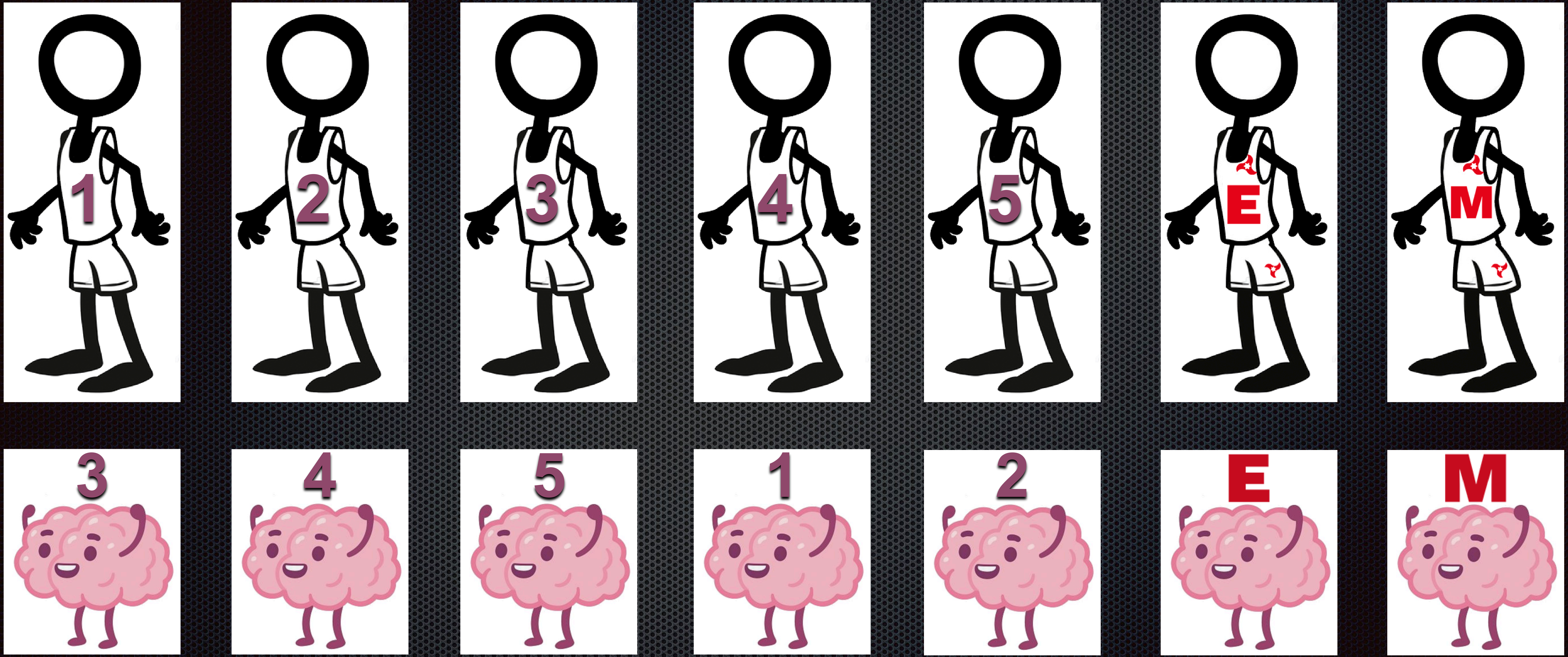
Segunda parte: El juego



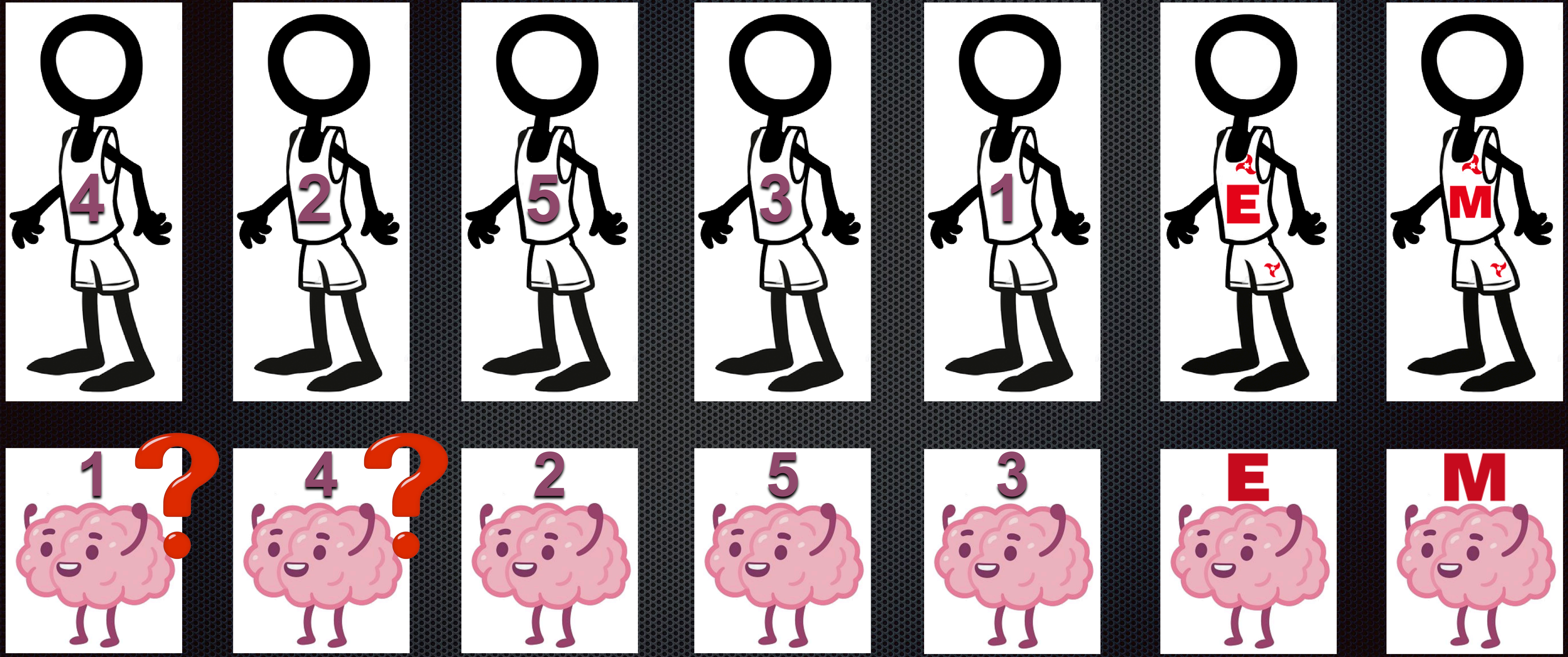
Segunda parte: El juego



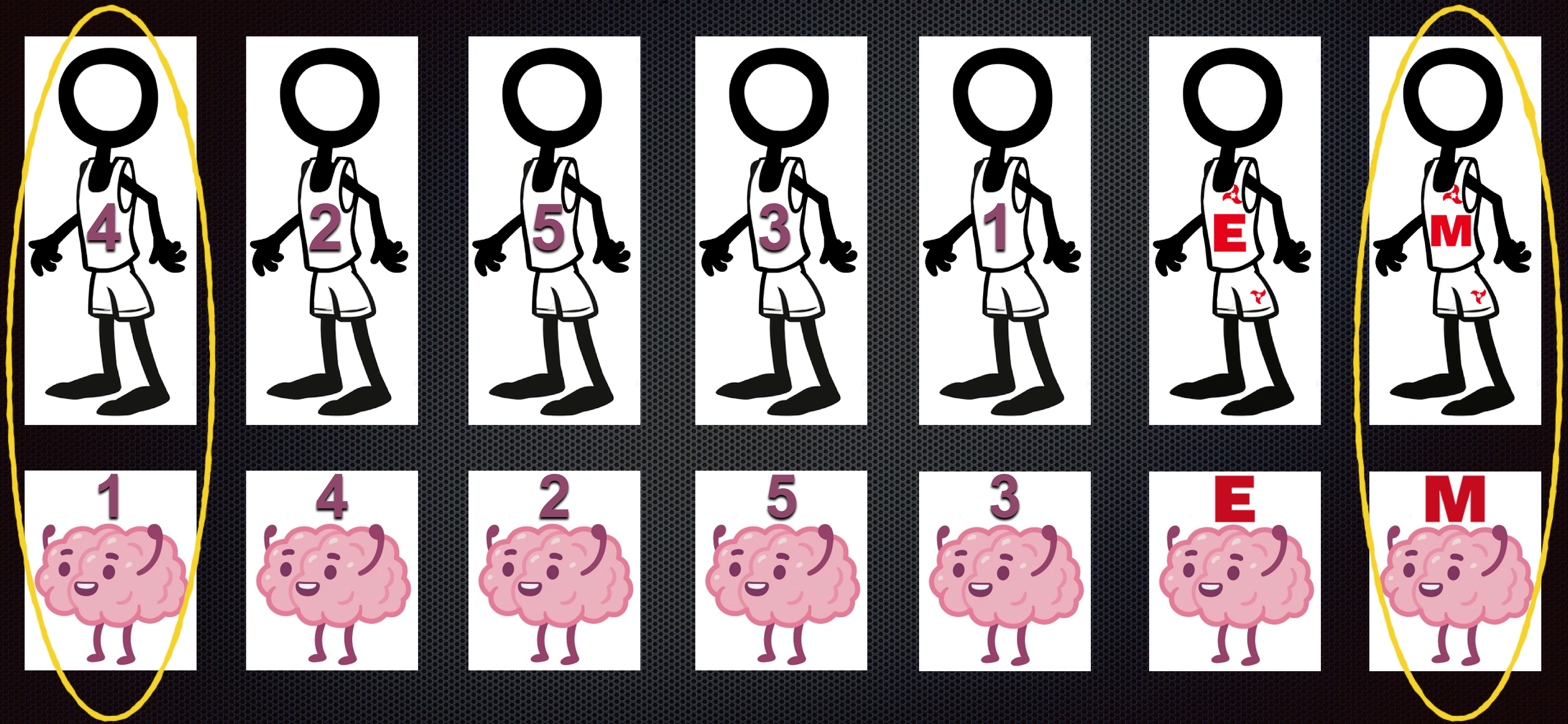
La solución: fichajes estrella



La solución: ordenamos

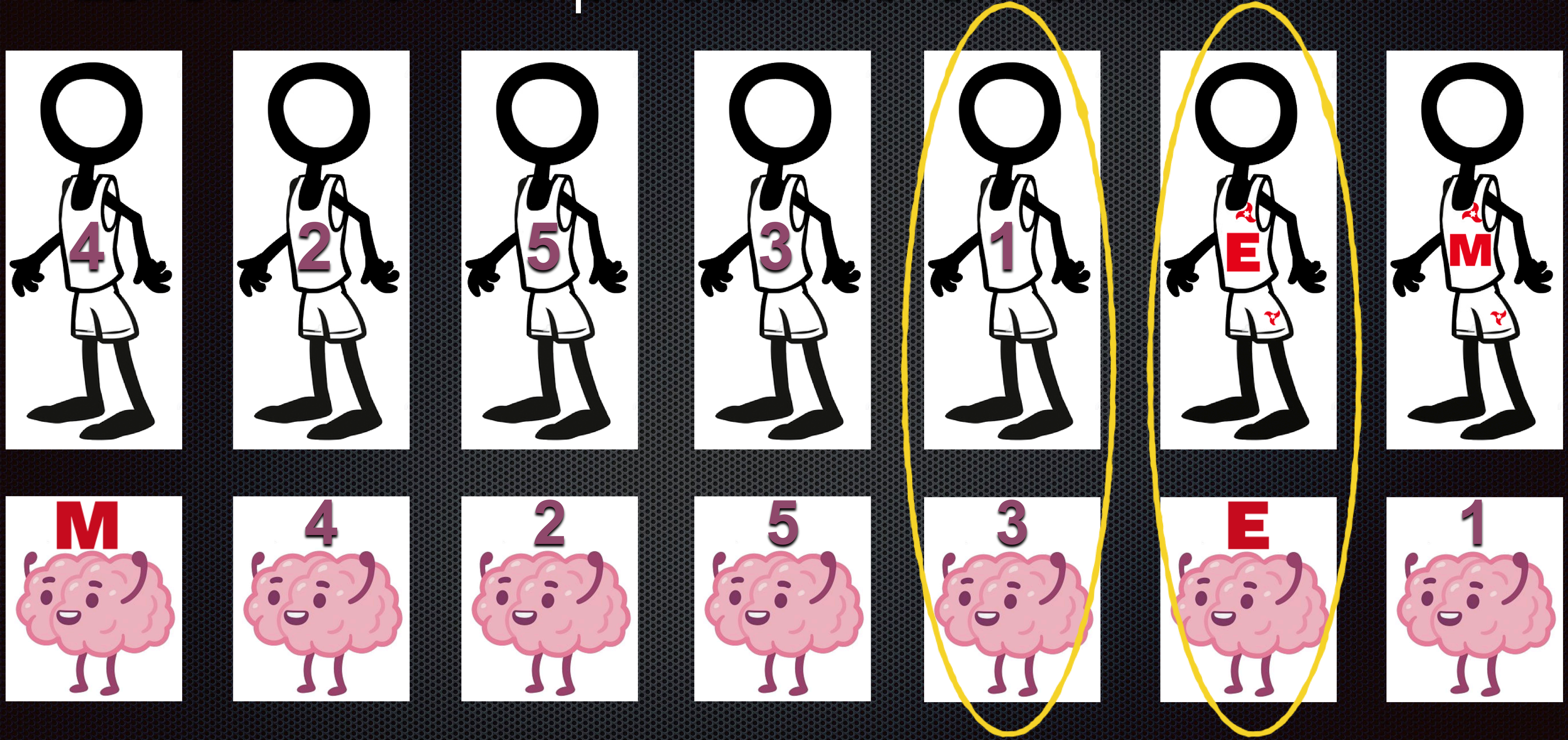


La solución: M a por el cerebro del 1

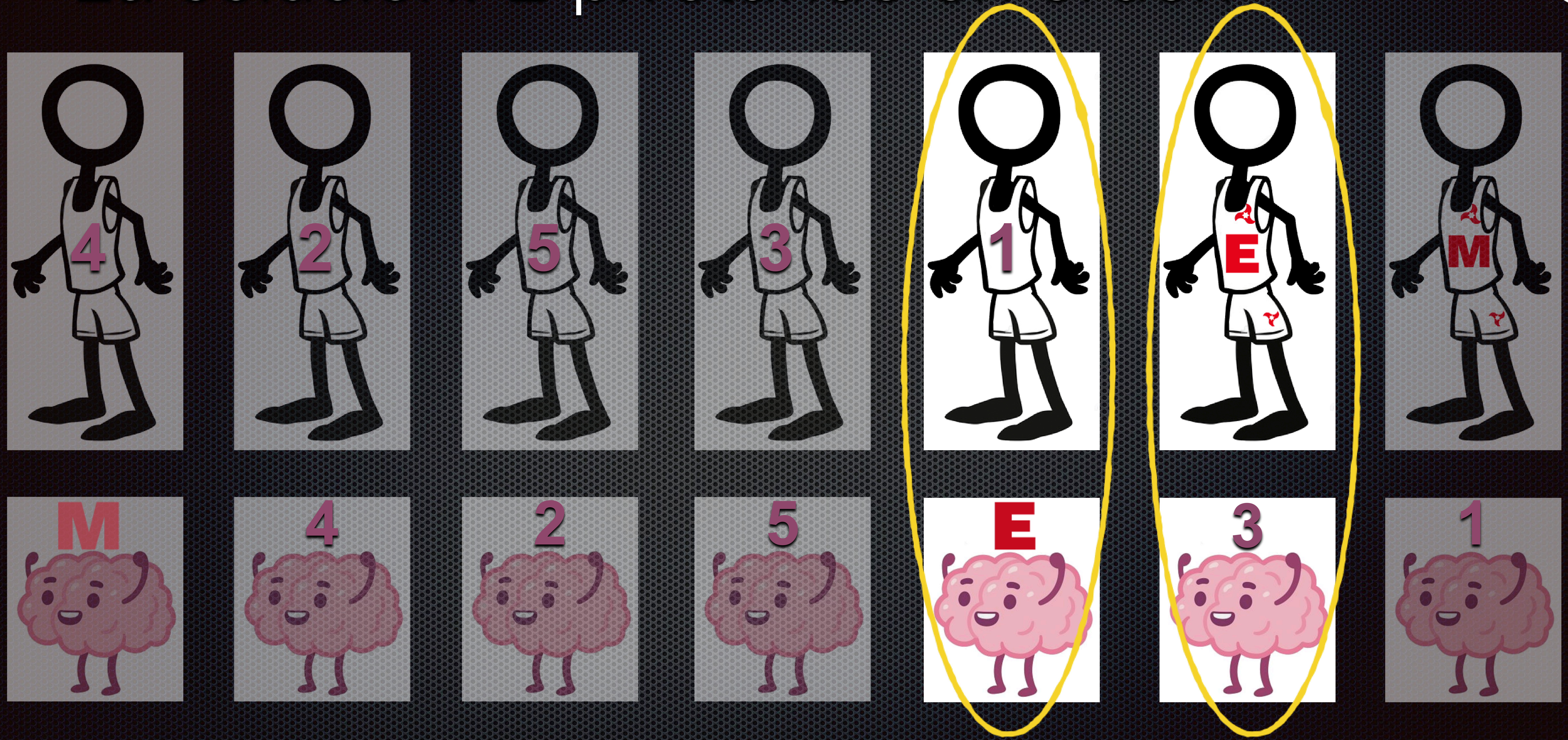


La solución: M a por el cerebro del 1

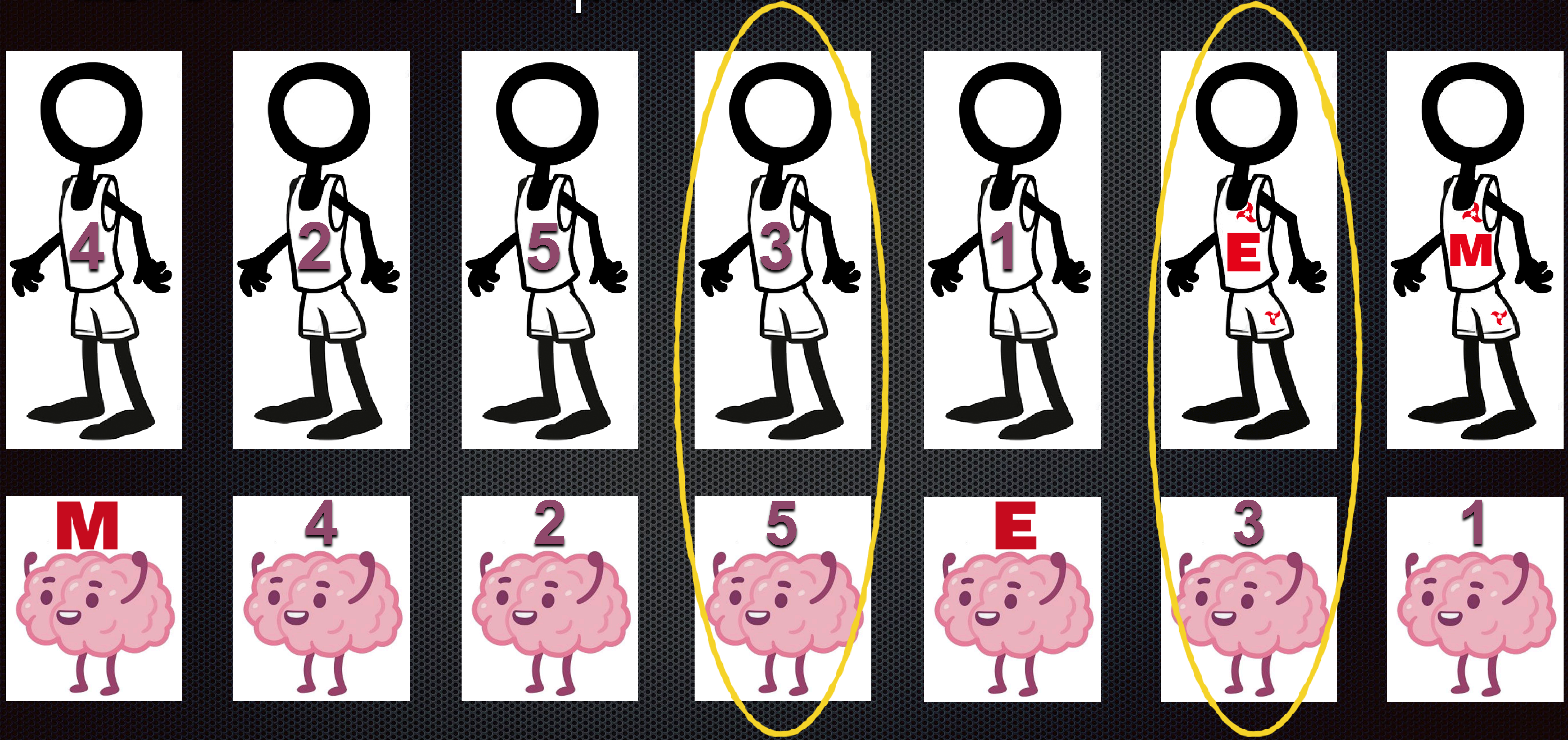
La solución: E pivotando en orden



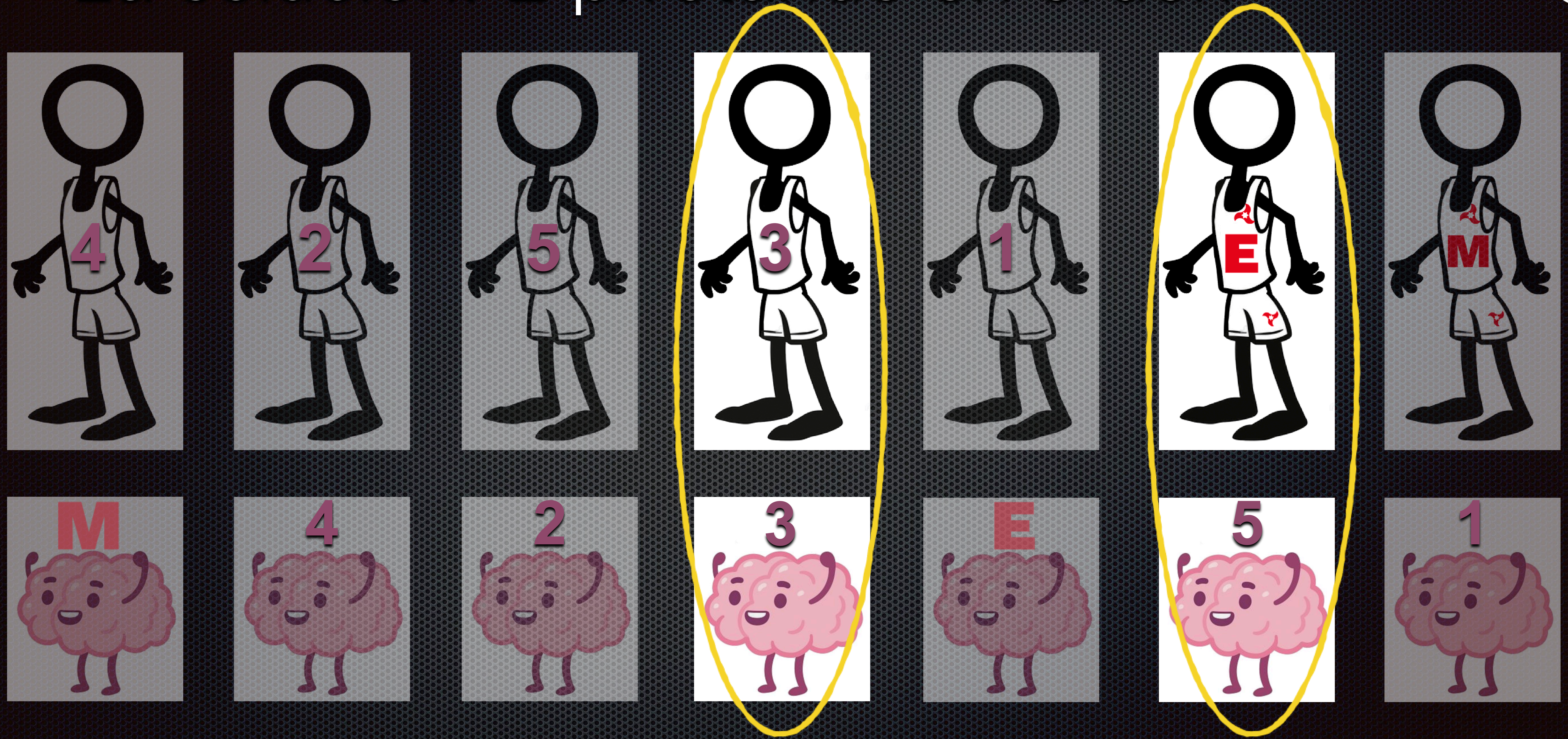
La solución: E pivotando en orden



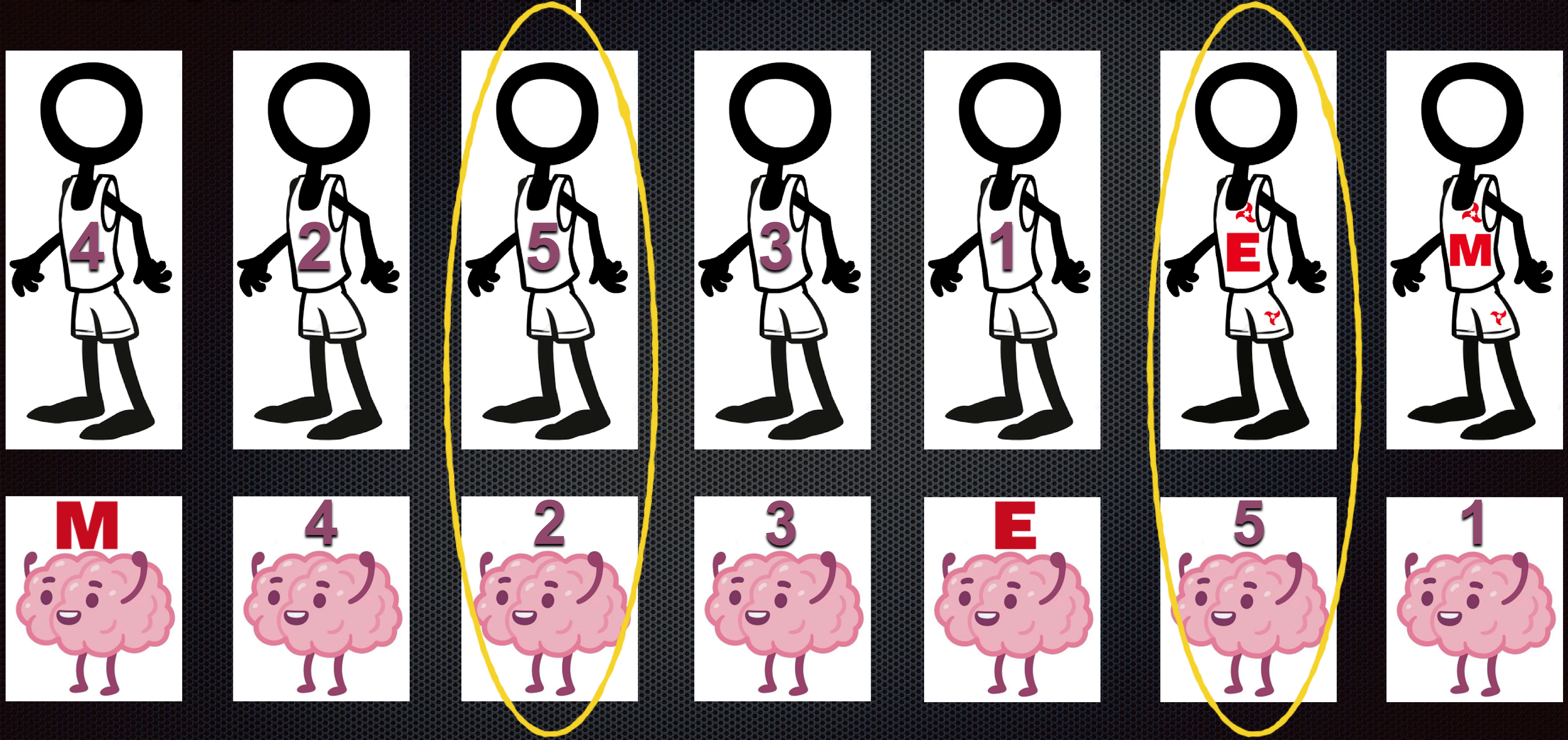
La solución: E pivotando en orden



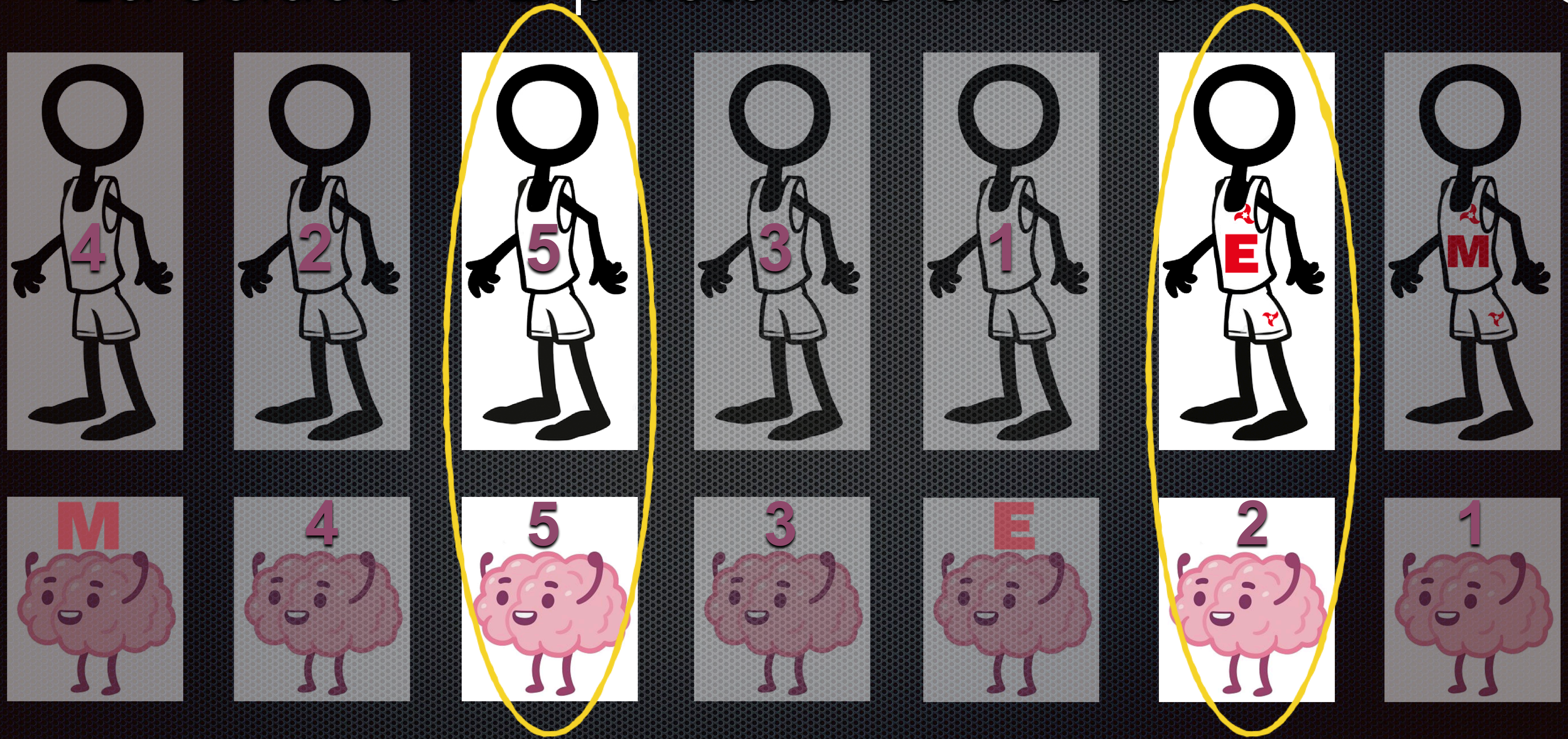
La solución: E pivotando en orden



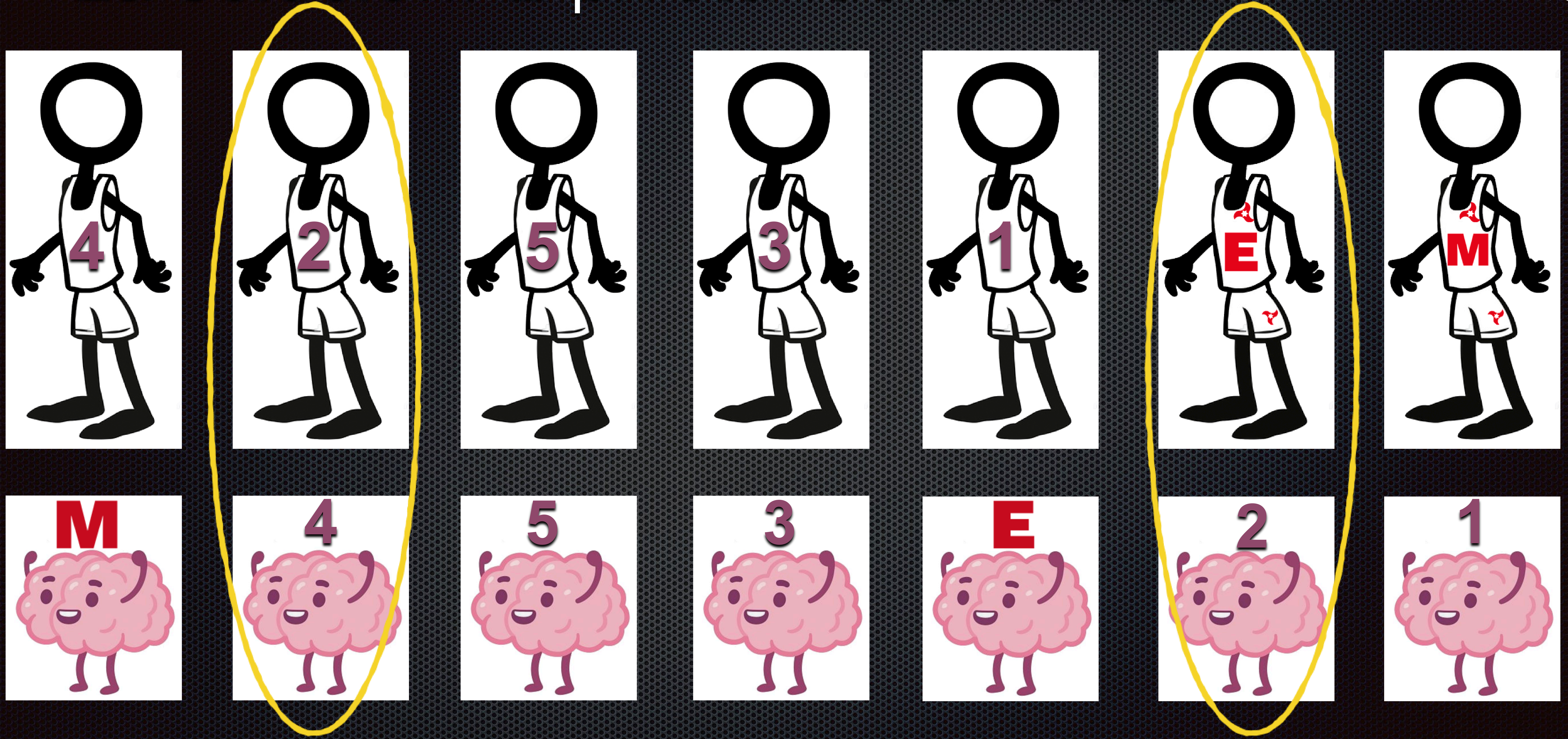
La solución: E pivotando en orden



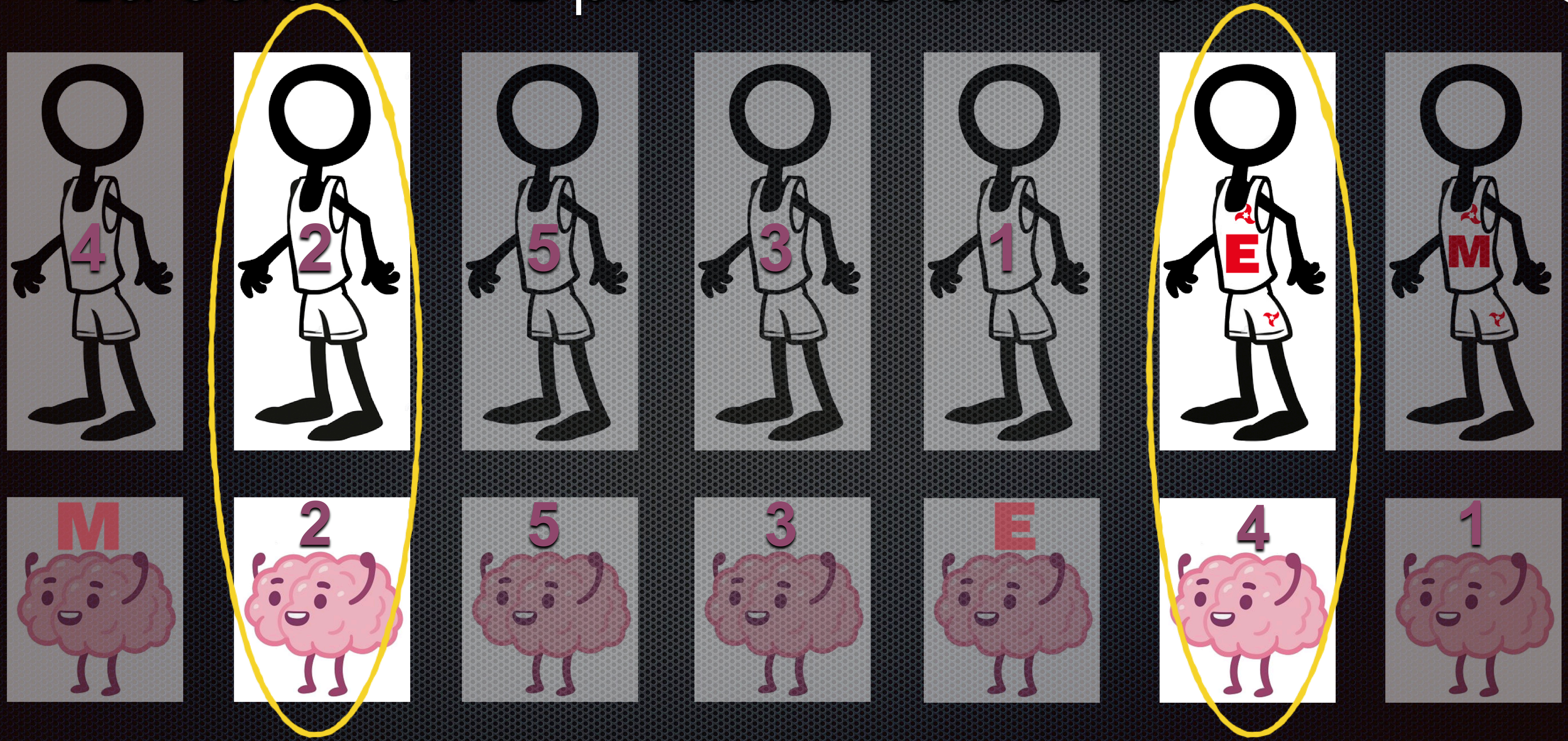
La solución: E pivotando en orden



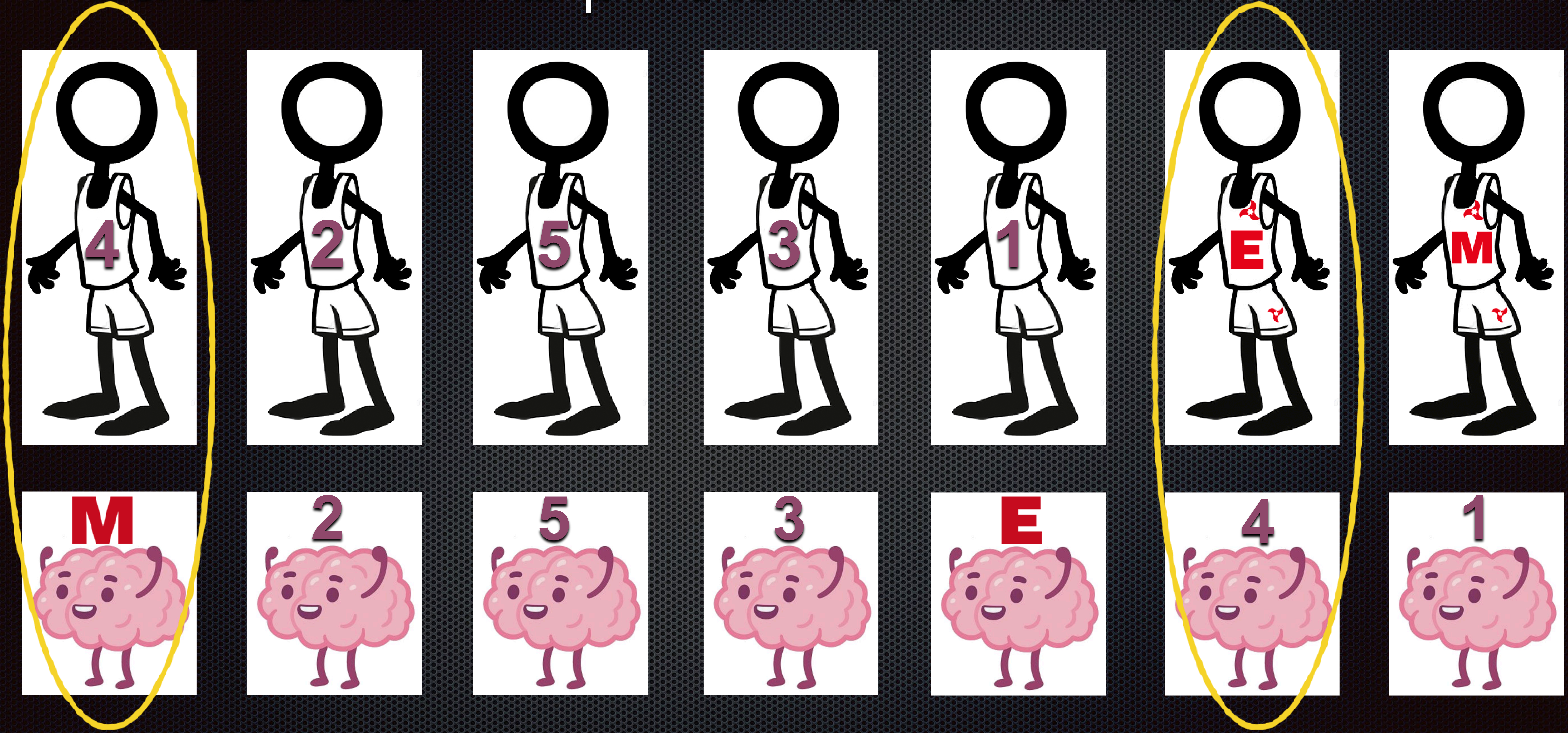
La solución: E pivotando en orden



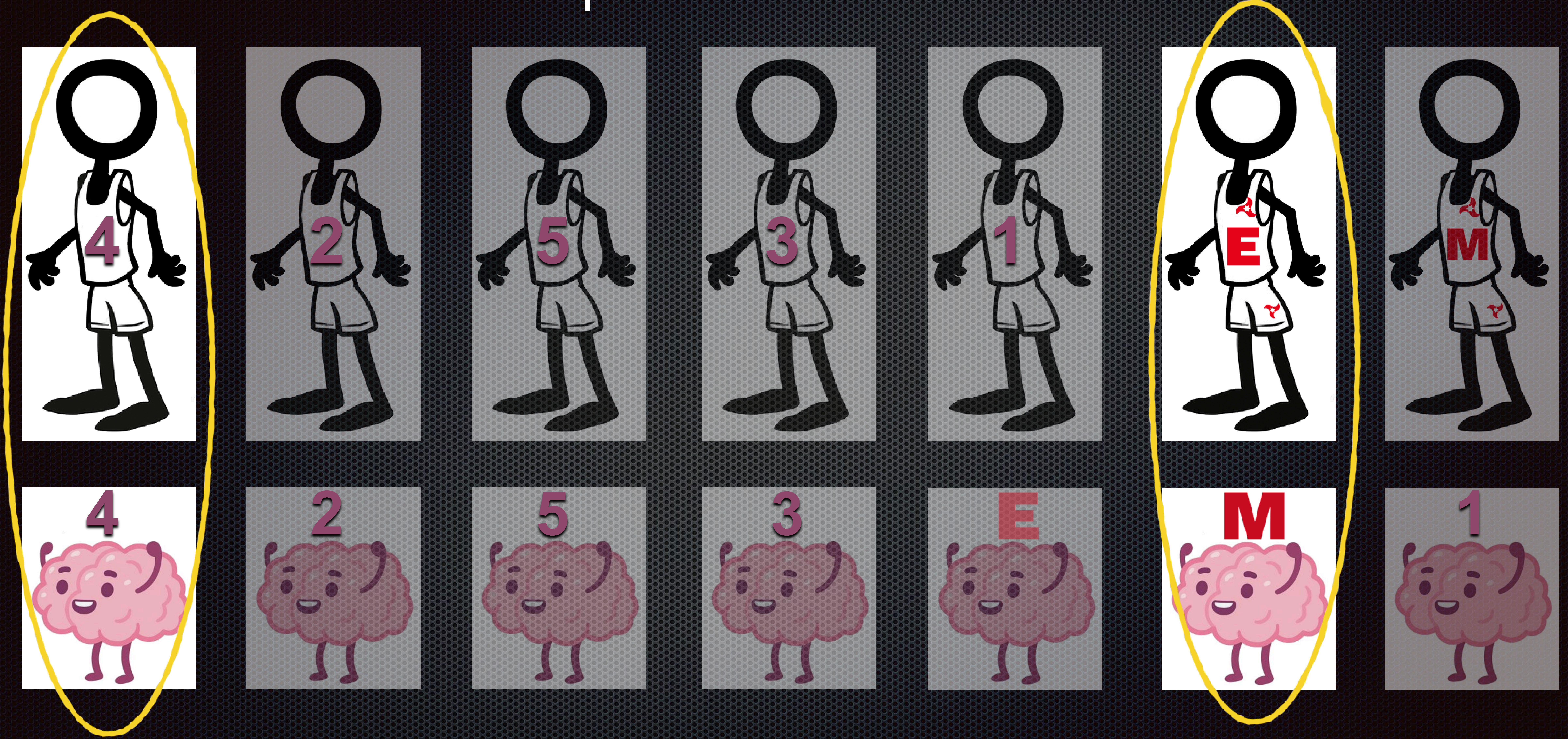
La solución: E pivotando en orden



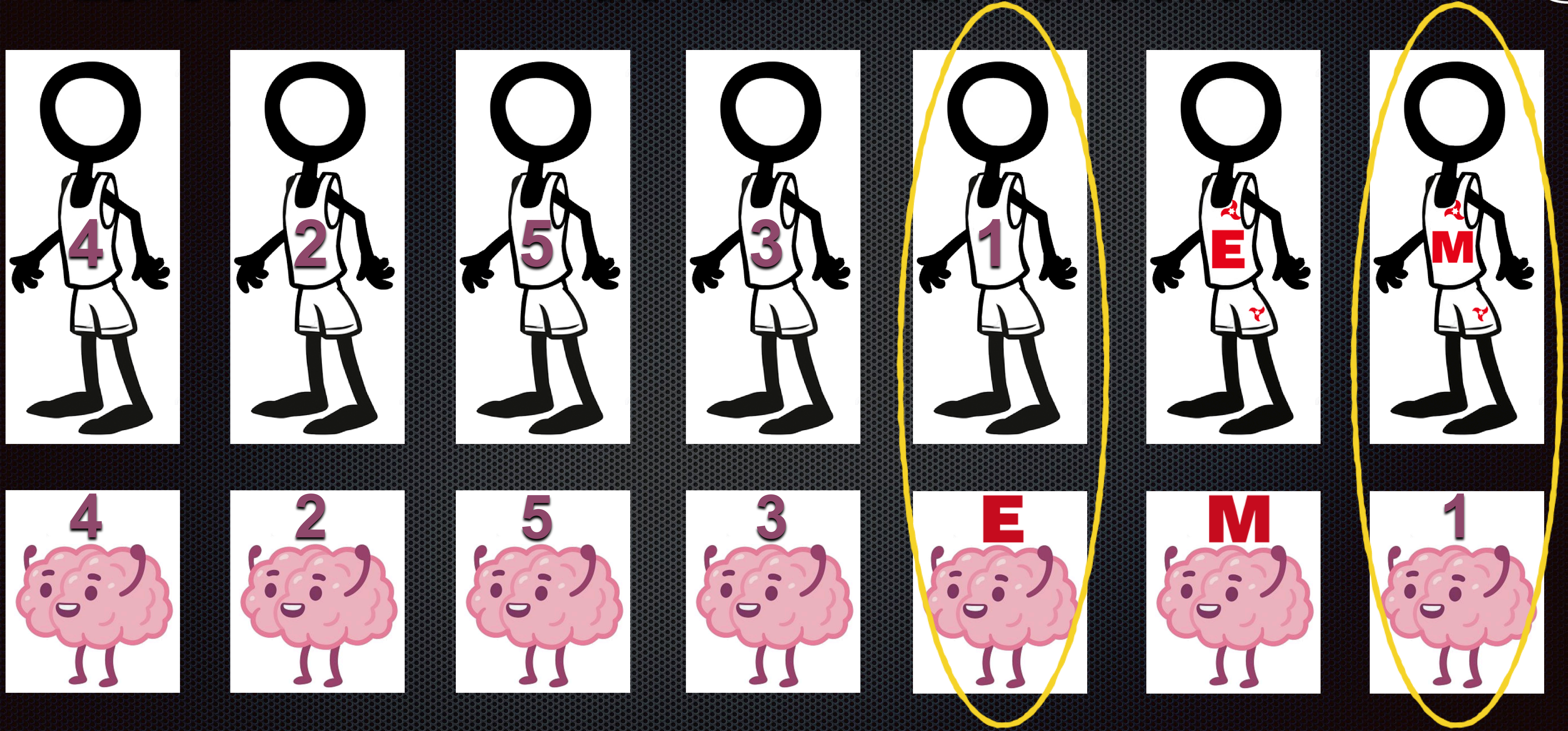
La solución: E pivotando en orden



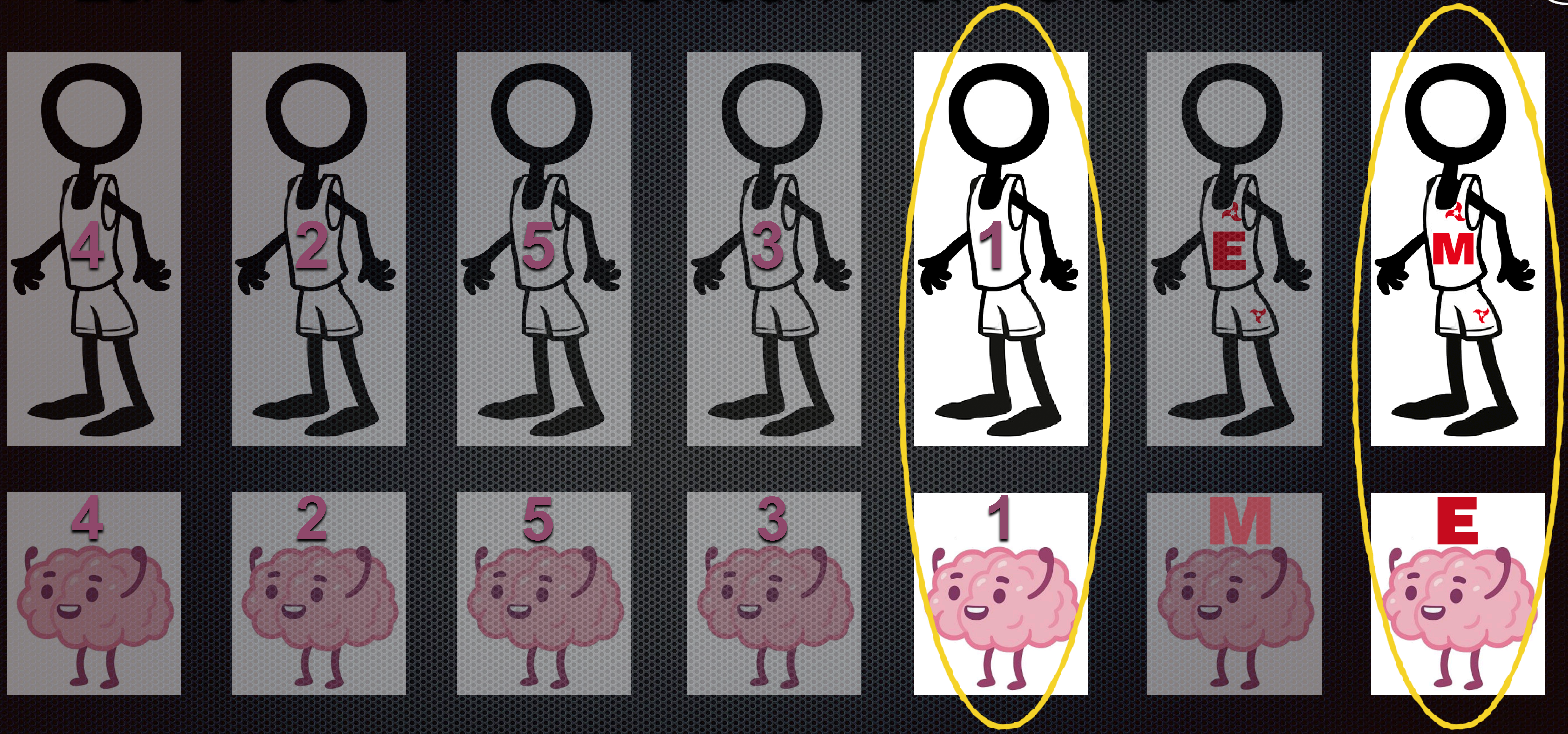
La solución: E pivotando en orden



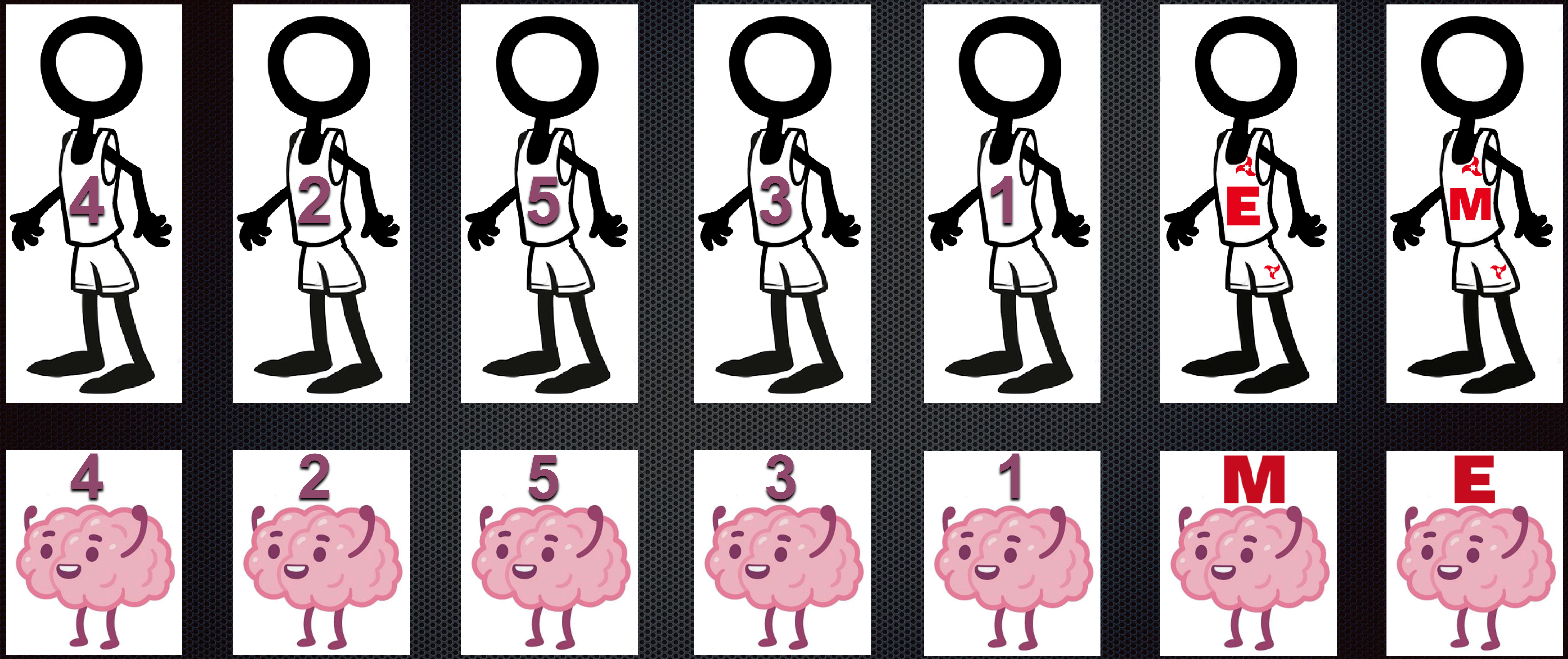
La solución: M devuelve el cerebro a 1



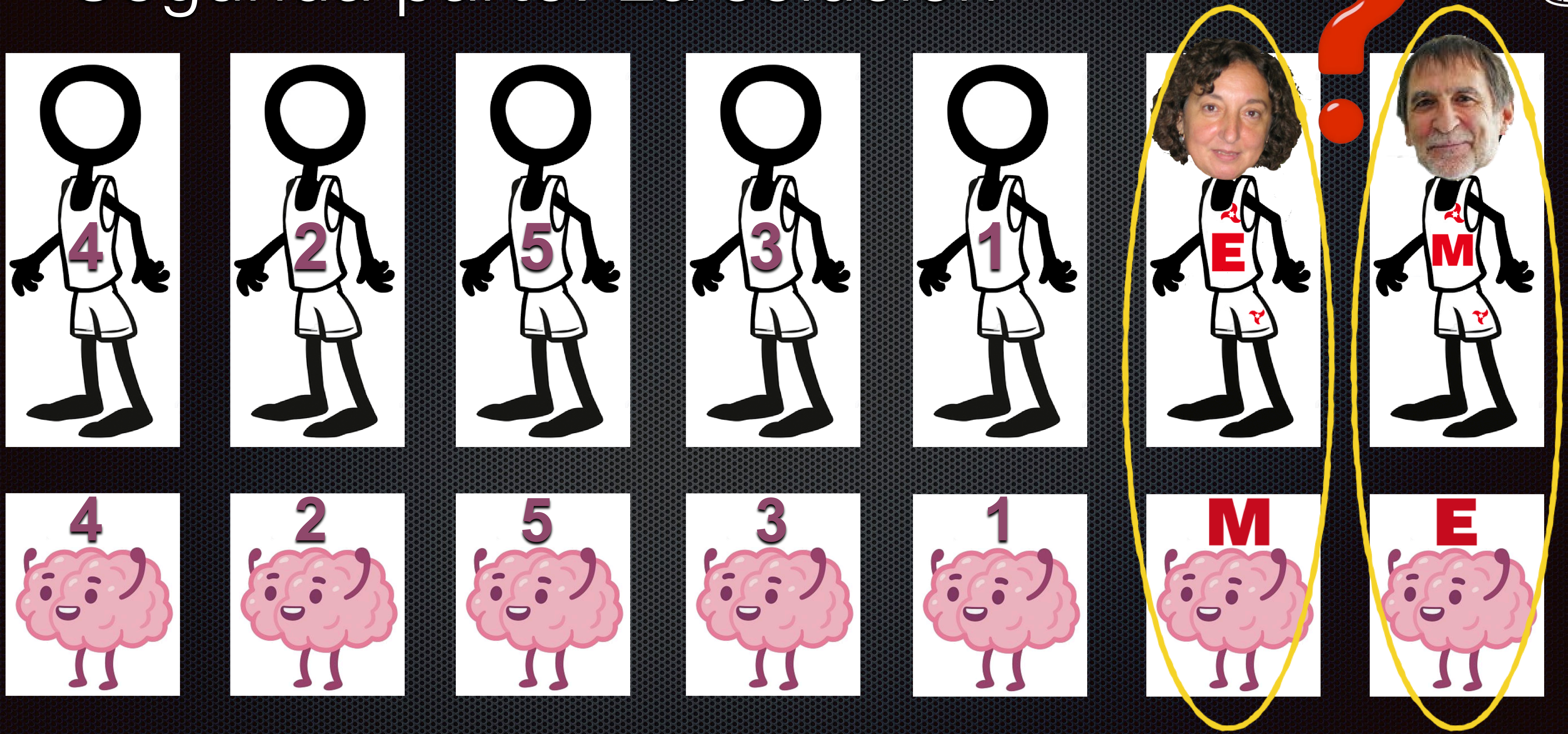
La solución: M devuelve el cerebro a 1



Segunda parte: La solución

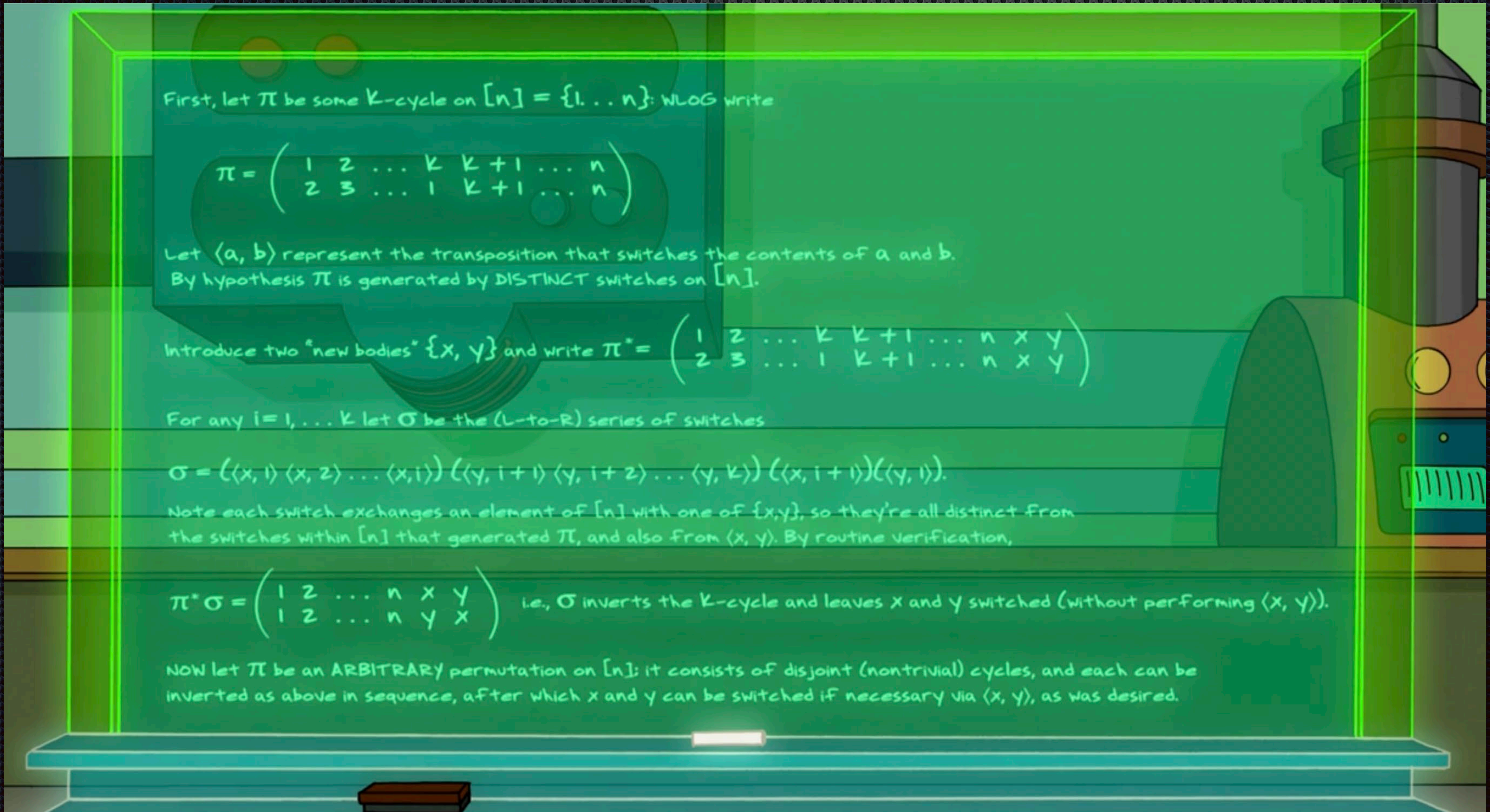


Segunda parte: La solución



El Teorema

No importa cómo un grupo de gente haya intercambiado sus mentes y sus cuerpos, siempre es posible que cada persona recupere su cuerpo usando como mucho **dos personas extra**.




GRACIAS

La solución en términos de permutaciones

Comentarios: los nuevos cambios de cuerpos se componen por la izquierda (leyendo de izda a derecha la composición, como siempre).

En el ejemplo (1 3 5 2 4)

Empezamos con el pivote (4 M) (aquí 4 es el último)

(4 M) (1 3 5 2 4) = (1 3 5 2 4 M)

Y ahora empezaremos a pivotar con E, con los números de izda a dcha

(1 E) (1 3 5 2 4 M) = (1 E 3 5 2 4 M); (3 E) (1 E 3 5 2 4 M) = (1 E 5 2 4 M)

(5 E) (1 E 5 2 4 M) = (1 E 2 4 M); (2 E) (1 E 2 4 M) = (1 E 4 M);

(4 E) (1 E 4 M) = (1 E M)

Ahora volvemos al primer pivote que entra con el que queda (el primero de la lista)

(1 M) (1 E M) = (E M) y ya los pivotes.