

Transmitiendo mensajes

María Jesús Vázquez Gallo (UPM)/Pablo Fernández Gallardo (UAM)
Seminario Estalmat 05-04-2025



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



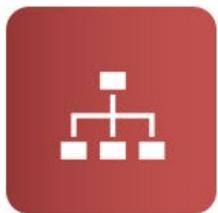
Segundo año: A vueltas con el azar + **Transmitiendo mensajes** *≈ 75 min.*



Aritmética modular



Probabilidad



Estructuras eficientes



Distancia



Motivación



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



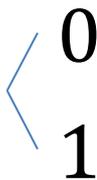
Imagina que tienes que transmitir instrucciones a un robot para que encienda o apague cierto sistema o para que se mueva en dirección Norte/Sur/Este/Oeste.

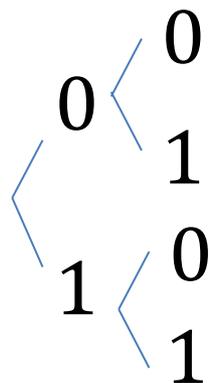


¿Cómo lo harías?

C. Shannon (1948):

unidad de información binaria: BIT (*binary digit*)

1 bit:  0
1 2 posibles valores/mensajes

2 bits:  0
1 4 posibles: 00, 01, 10, 11
1
0
1

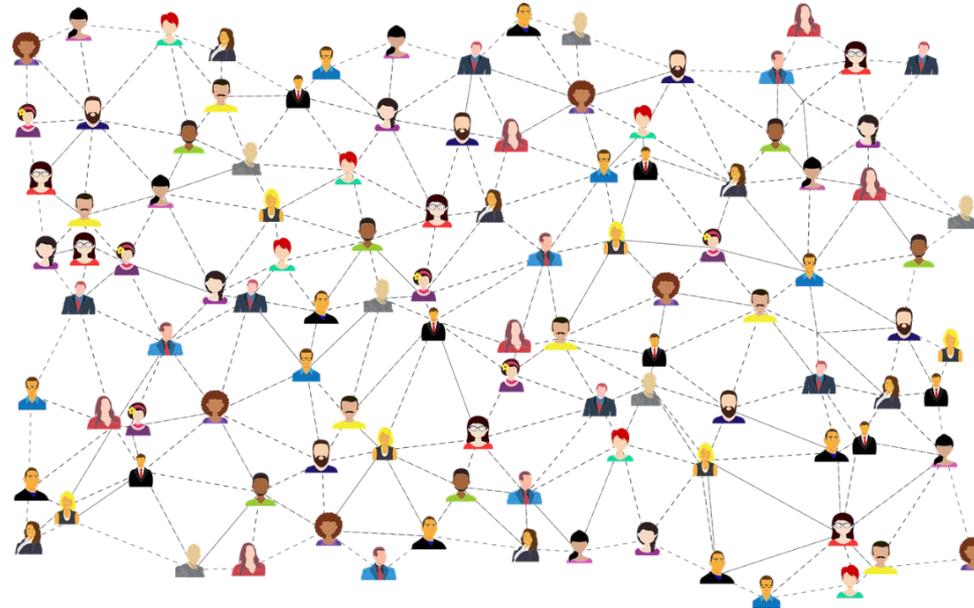
...

8 bits (1 BYTE) → 256 mensajes

...

n bits → ¿cuántos posibles mensajes?

En la era de la transmisión de la información:
millones de dispositivos comunicándose a través de la red.
Compras, secretos, transacciones... **Ruidos, interferencias...**



Si se producen **errores** en la transmisión...

¿Cómo detectar errores automáticamente?

¿Y cómo corregirlos?

¿Cómo transmitir información de manera fiable y eficiente?



Ingeniero y matemático C. Shannon (trabajó para la telefónica Bell, hoy AT&T):
“Teoría matemática de la comunicación” en 1948.
(Internet nació hacia 1970!!!)

Ejemplos sencillos



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



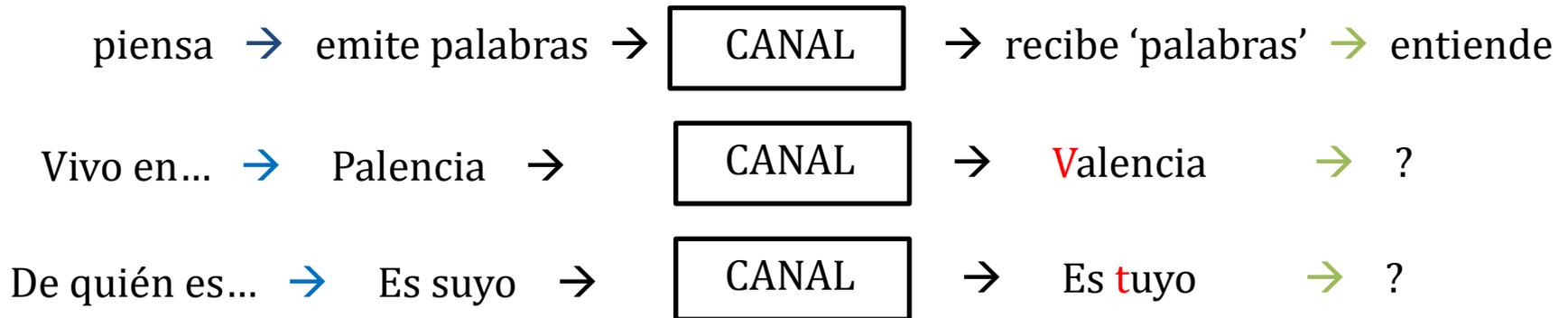
C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



Ejemplo: Al comunicarnos en un idioma usamos palabras del diccionario –código–.

EMISOR
CODIFICA

RECEPTOR
DECODIFICA



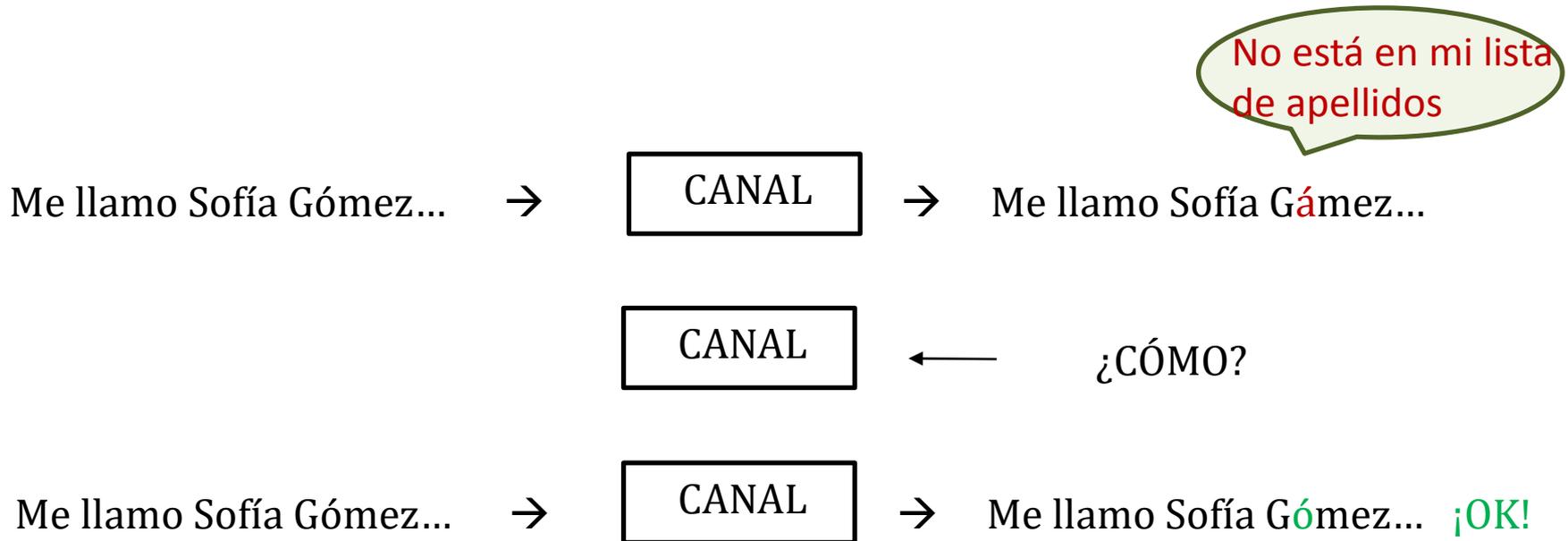
Queremos **codificar** y **decodificar** para detectar y corregir errores automáticamente

¿Cómo hacerlo?

Imagina que te han invitado a un concierto privado y tienes que dar tu nombre en la entrada...



¿Cómo detectamos y corregimos errores al comunicarnos?



Ideas del lenguaje común:

Detecta errores si una palabra no está en diccionario.

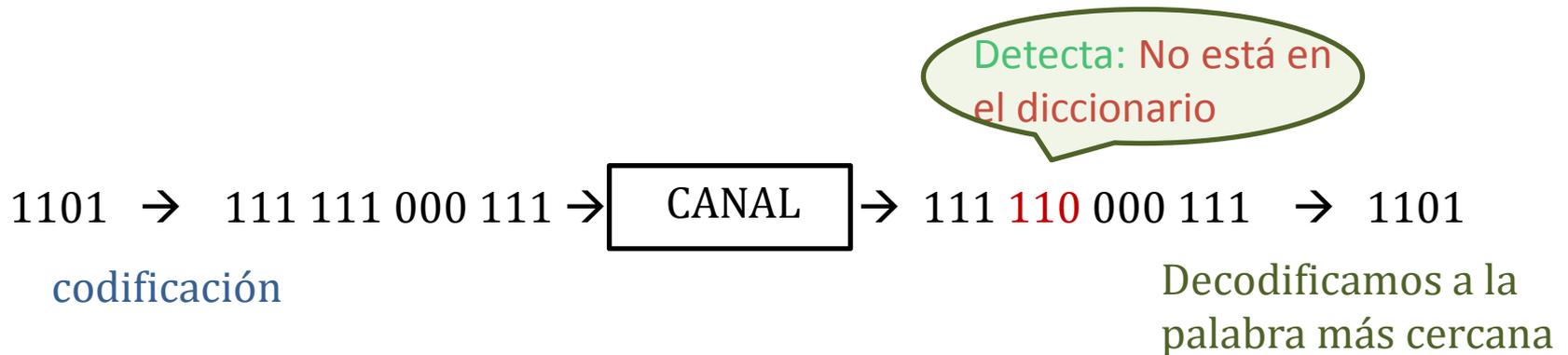
Corrige errores repitiendo, añadiendo redundancia.

Idea: ¡repetir!

- **Codificar:** $0 \rightarrow 00, 1 \rightarrow 11$. **Código de repetición 2 :** $\{00,11\}$



- **Codificar:** $0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 111$. **Código de repetición 3 :** $\{000,111\}$



También en un idioma:

Mi **bisidleta** es negra...

Pues mi **bicicleta** es azul...

Idea: **detectamos** error si no está en diccionario y **corregimos con la palabra más cercana.**

¡Detección y corrección automática!

Ejercicio 1:

Código de repetición 3 para transmitir no (0) o sí (1).
¿Qué mensajes se pueden recibir? ¡Decodifícalos!



Ejercicio 1:

Código de repetición 3 para transmitir no (0) o sí (1).

¿Qué mensajes se pueden recibir? ¡Decodifícalos!

decodificación

000	→	000
100	→	000
010	→	000
001	→	000
110	→	111
101	→	111
011	→	111
111	→	111

¡OJO! Cuanta más repetición, **mejor detección y corrección**, pero ocupamos más espacio



Reflexión



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



¿Siempre podemos corregir con la palabra más cercana?

Me dejas tu **cafa** ...

¿casa?, ¿caja?, ¿cama?, ¿gafa?...

Detectamos que ha habido un **error** pero
no siempre podemos corregir automáticamente

Idea: no sabemos corregir porque
hay varias palabras a *distancia mínima*
(y el contexto no decide).

Pero: ¿Y si se produce más de un error?
Si al codificar 1 bit con repetición 3, se recibe 110
¿decodificamos a 111 o a 000?

Incertidumbre... recuerda las ideas de **probabilidad**

Ejemplo: Sabemos que en cierto canal el 99% de los bits se transmiten correctamente.

Al aplicar un código de repetición 3 y decodificar a la palabra más cercana:

¿Nuevo porcentaje de transmisión correcta?



Ejemplo: Canal con transmisión correcta del **99%** de los bits.

Sin código: Emitiendo

Probabilidad p : número entre 0 y 1

- **1 bit:** probabilidad(transmisión correcta) = **0.99**

(probabilidad(error en 1 bit) = $1 - 0.99 = 0.01 = p$).

- **100 bits:** transmisión correcta en los 100 bits

$$0.99^{100} \approx 0.3660 \rightarrow \mathbf{36.60\%}$$

- **200 bits:** transmisión correcta en los 200 bits

$$0.99^{200} \approx 0.1334 \rightarrow \mathbf{13.34\%}$$



Ejemplo: Canal con transmisión correcta del 99% de los bits.

Con código de repetición 3: Emitiendo

- **1 bit:** probabilidad(transmisión correcta)=
$$p(0 \text{ errores}) + p(1 \text{ error}^*) =$$
$$0.99^3 + 3 \cdot 0.99^2 \cdot 0.01 =$$
$$0.970299 + 0.029403 = 0.999702 \rightarrow \approx \mathbf{99.97\%}$$

* Decodificamos a la palabra más cercana.

- **100 bits:** transmisión correcta en los 100 bits
$$0.999702^{100} \approx 0.9706 \rightarrow \approx \mathbf{97.06\%}$$
- **200 bits:** transmisión correcta en los 200 bits
$$0.999702^{200} \approx 0.9421 \rightarrow \approx \mathbf{94.21\%!!!}$$

Mucho mejor que el $\approx 13.34\%$ sin código



Buscando soluciones más eficientes



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos





Problema 1 :

Quieres enviar al Perseverance en Marte:
muévete en dirección Sur
(N: 00, S: 01, E: 10, O:11)

Sur → 01 → CANAL → 11 → Oeste ¡GLUB!

Codifica para ser capaz de detectar 1 error,
minimizando la longitud de los mensajes.

Pista: no es un código de repetición.

00 → ? 01 → ? 10 → ? 11 → ?

Problema 1: Posible idea añadir un solo bit que controla la “paridad” de la suma de dígitos

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ (impar+impar=par)}$$

Codificamos:

00 \rightarrow 000, 01 \rightarrow 011, 10 \rightarrow 101, 11 \rightarrow 110



En general: $a_1 a_2 \rightarrow a_1 a_2 a_3$ con $a_3 \equiv a_1 + a_2 \pmod{2}$

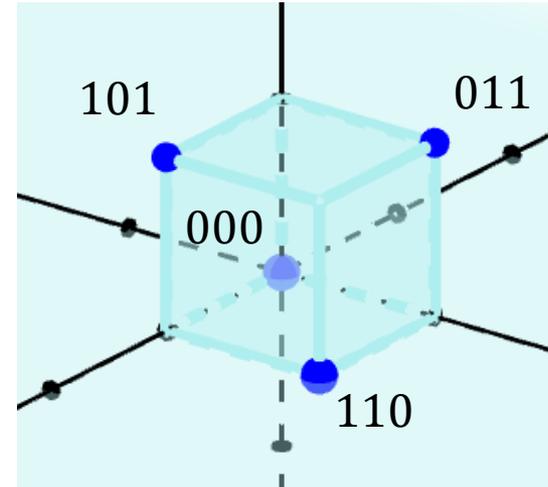
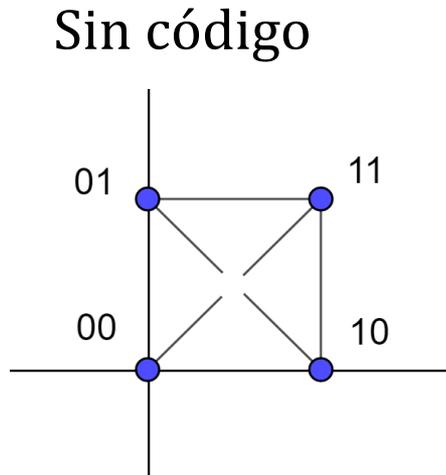
Visualizando



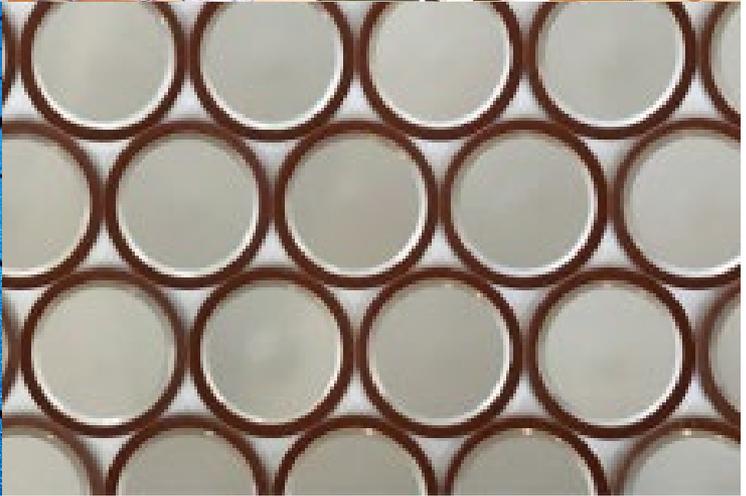
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



Problema 2: Código de paridad = {000, 011, 101, 110}



1. ¿Por qué este código detecta 1 error?
2. ¿Puede corregirlo?
3. ¿Puede detectar 2 errores?



Abstrayendo



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



Definición: La DISTANCIA (de Hamming) de un código es el mínimo n° de diferencias entre dos palabras cualesquiera.

Ejemplo: Código de paridad tiene “distancia 2”:

00 \rightarrow 000, 01 \rightarrow 011, 10 \rightarrow 101, 11 \rightarrow 110

Ejemplo: Código de repetición 3 {000,111} tiene distancia 3

0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 111

000 — — 111 $d = 3$

Idea: A mayor distancia mayor **capacidad de detección**, pero si d es muy grande puede haber pocas palabras disponibles.

Ejercicio 3:

¿Cuántos errores podrá detectar un código de distancia n ?

Ejercicio 3

¿Cuántos errores podrá detectar un código de distancia n ?

Un código de distancia n
detecta como máximo $n - 1$ errores,

Entre dos palabras del código hay al menos n diferencias, luego:

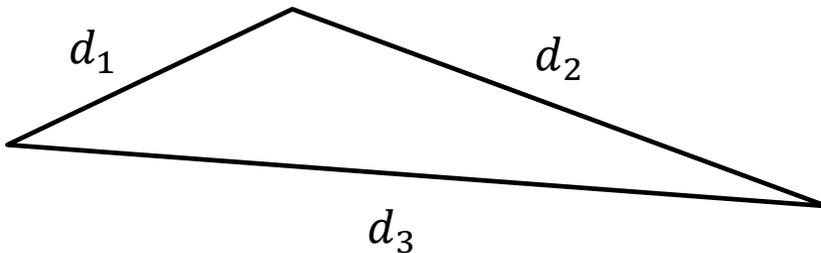
- si hay hasta $n - 1$ errores, la palabra recibida no está en código.
- si hay n errores o más: la palabra recibida puede estar el código (podemos haber saltado de una palabra del código a otra).

Observación:

La distancia de un código es una **distancia de verdad** (una buena manera de medir).

Explica por qué:

- ¡Nunca es negativa!
- La distancia entre dos ... no depende del orden en la pareja.
- Se cumple la desigualdad *triangular*



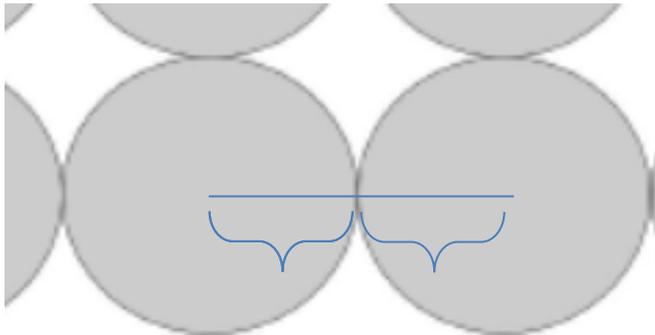
$$d_i \leq d_j + d_k$$



Problema 4: Capacidad de corrección

En general, dado un código con distancia d impar.
¿Cuántos errores será capaz de corregir?

000 _____ 111





Problema 4: ¿Cuántos errores corrige un código con d impar?

Como $d = 2k + 1 = k + (k + 1)$, entonces:

- Hasta k errores, la palabra más cercana a la recibida es la original;
- Si hay $k + 1$ errores o más, puede haber otra palabra distinta de la original que sea su palabra más cercana.

Código corrige hasta $k = \frac{d-1}{2}$ errores.

Ejemplo: $d=3$ corrige 1 error, $d=5$, corrige 2 errores, etc.

000 — — 111

Obs: Si d par, $d = 2m$, corrige $\frac{d-2}{2}$ err. 0000 — — — 1111

En general, corrige la **parte entera** de $\frac{d-1}{2}$.

Problema 5: **Escribe** demostración con desigualdad triangular.

Saber más



**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA**



Financiado por
la Unión Europea
NextGenerationEU



GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO PARA LA TRANSFORMACIÓN DIGITAL
Y DE LA FUNCIÓN PÚBLICA
Secretaría de Estado
de Transformación Digital



Plan de
Recuperación,
Transformación
y Resiliencia



incibe_
INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD



UC | Universidad
de Cantabria



**Purposeful
Ventures**



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



EXCMO. AYUNTAMIENTO
DE CASTRO URDIALES



Otros códigos en la vida cotidiana:



Código de barras: Sistema *EAN-13* identifica cada producto con 13 dígitos: El último dígito, a_{13} se calcula de forma que:

$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + 3(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_{13}$ sea 0 (pero en la aritmética módulo 10).

Calcula a_{13} para estas 12 cifras 1 8 4 7 4 0 3 7 0 3 6 0. **Comprueba.** (Excel).

Código QR: (Quick Response) formado por cuadrados negros (0) y blancos (1).

El mensaje se codifica en conjuntos de 8 cuadrados, (llamados codewords) que incluyen información y control de paridad.



Código letra NIF 00053224W **Explora...**

Y haciéndonos preguntas:

¿Cómo sistematizar los códigos de paridad? ¿Matrices?

¿Eficiencia al almacenar código?

¿Buenos códigos en relación con tasas como distancia/longitud?

¿Buenos códigos con palabras 'bien' colocadas?

¿Bit cuántico? ¿Continuo frente a discreto?

REFERENCIAS

- FERNÁNDEZ GALLARDO, Pablo; GIL ÁLVAREZ, Omar (2001): “Una introducción a los códigos detectores y correctores de errores”.
- GIL, Omar (2011): *Matemáticamente tenemos chance*. Montevideo: Ed. Fin de Siglo.
- HAMMING, Richard W. (1950): “Error Detecting and Error Correcting Codes” en *The Bell System Technical Journal*, Vol. XXIX, N° 2, 147-160.
- HAMMING, Richard W. (1980b): “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics” en *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, N° 2, pp. 81-90.
- SHANNON, Claude E. (1948): “A Mathematical Theory of Communication” en *The Bell System Technical Journal*, Vol. XXVII, pp. 379-423 (Julio), 623-656.

Jugando



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



Terminamos **jugando**:

Damos un número de 4 cifras a cada persona de un grupo.

Los números son: 1024, 2005, 3130, 2113, 1600, 5020, 4210, 7232, 1544, 8411, 9230...

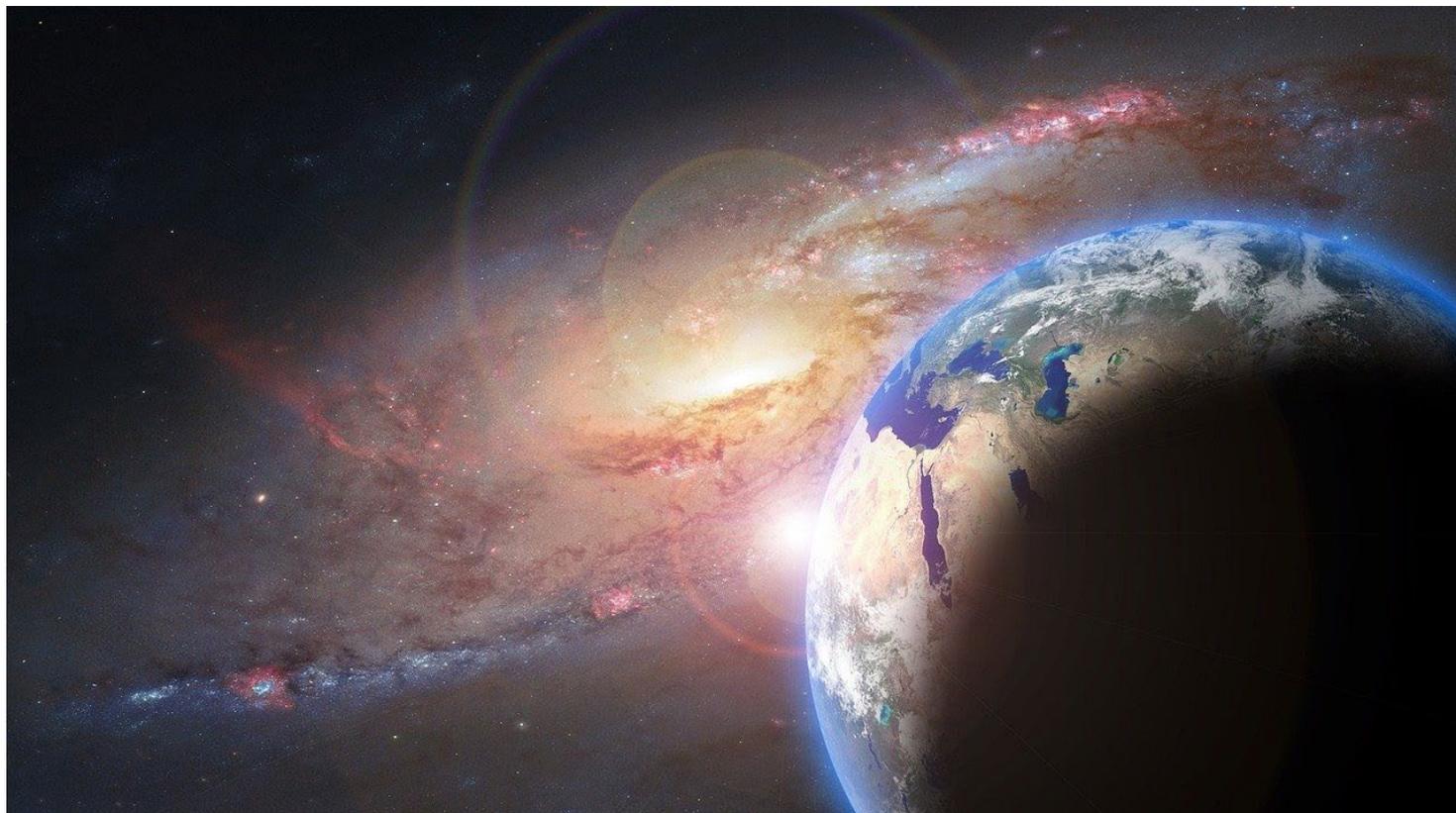
Después de guardarlos un rato, nos los devuelven.

Entre esos números encontramos: 1024, 4300, 2032, 5020, 8123, 3502, 2354, 1085, 6001...

¿Alguien ha querido darnos el cambio?

Transmitiendo mensajes

María Jesús Vázquez Gallo/Pablo Fernández Gallardo
Seminario Estalmat 05-04-2025



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



Financiado por
la Unión Europea
NextGenerationEU



GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO PARA LA TRANSFORMACIÓN DIGITAL Y DE LA RAZÓN PÚBLICA
SECRETARÍA DE ESTADO DE TRANSFORMACIÓN DIGITAL



Plan de
Recuperación,
Transformación
y Resiliencia



incibe_
INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD



UC | Universidad
de Cantabria



Purposeful
Ventures



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos



EXCMO. AYUNTAMIENTO
DE CASTRO URDIALES