Índice general

Capítulo I

Números curiosos

Introducción

1. Manejo de números

Ejercicio. 1.1.
Considera las siguientes listas de números.

1 2 3 4 5 6 7 8 9	9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 0	0 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 0 0	0 0 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 0 0 0	0 0 0 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 0 0 0 0	0 0 0 0 5 4 3 2 1
1 2 3 4 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 4 3 2 1
1 2 3 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 3 2 1
1 2 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1

¿Cuál de las dos sumas es mayor?

Ejercicio. 1.2.
Comprueba que se verifica:

$$\begin{aligned} 1 \times 8 + 1 &= 9 \\ 12 \times 8 + 2 &= 98 \\ 123 \times 8 + 3 &= 987 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¿Explica por qué?

Ejercicio. 1.3. (Números narcisistas)
Observa que 153 es la suma de los cubos de sus cifras, y que lo mismo ocurre con 370.
*Un número se dice **narcisista** si es la suma de los cubos de sus cifras.*

(1) Hay cuatro números narcisistas menores que 500. Determínalos.

(2) ¿Cuántos números narcisistas hay?

SOLUCIÓN.

(1) Es fácil ver que

$$1 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

y que
$$3^3 + 7^3 + 0 = 27 + 343 = 370.$$

Un poco más difícil es averiguar cuales son los dos números narcisistas que faltan. Para esto estudiamos los cubos de los números del 0 al 9. Tenemos:

0	0	5	125
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729

De estos desechamos 8 y 9. Con 7 y 5 no podemos componer ningún número narcisista. Con 7 y 4 tenemos:
$$7^3 + 4^3 = 343 + 64 = 407$$

por tanto 407 es un número narcisista. y no podemos componer más. Con 7 y 3 tenemos:
$$7^3 + 3^3 = 343 + 27 = 370$$

por tanto 370 es un número narcisista. De misma forma se tiene que 371 es un número narcisista.

Por este método llegamos finalmente a que 153 es un número narcisista.

(2) Para averiguar cuántos números narcisistas hay en total tenemos que estudiar los que van de 500 a 1000 en la misma forma que hemos hecho ahora. En este caso hay más.

Para números de la forma $xabc$, con $x \geq 1$, el valor máximo que pueden alcanzar es $x^+a^3 + b^3 + c^3 \leq 2916$. Analizando según los valores de x reducimos el posible número de números narcisistas.

Con más de cuatro cifras no hay ningún número narcisista.

En total hay 4 números narcisistas: 153, 370, 371 y 407.

□

Ejercicio. 1.4.
Prueba que todo número impar es una diferencia de dos cuadrados de números consecutivos.

SOLUCIÓN. Dado n, supongamos que es la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos, por ejemplo
$$n = x^2 - (x-1)^2$$

se tiene:
$$n = x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 1$$

Luego la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos es un número impar.

Recíprocamente, si n es un número impar, observa que de lo anterior se tiene $n = 2x - 1$ entonces $x = (n+1)/2$. Por tanto para cada número impar n podemos escribir:

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2}+1\right)^2.$$

□

Ejercicio. 1.5.
Considera las potencias de 2

2^0	$= 1$		2^5	$= 32$
2^1	$= 2$		2^6	$= 64$
2^2	$= 4$		2^7	$= 128$
2^3	$= 8$		2^8	$= 256$
2^4	$= 16$		2^9	$= 512$

observa que ningún par de ellas tienen los mismos dígitos (aunque en distinto orden). ¿Es esto cierto para cualquier potencia de 2? Esto es, ¿existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos, pero variando el orden? esto es, que una se escribe como una reordenación de los dígitos de la otra.

SOLUCIÓN. Tenemos que buscar invariantes de una expresión decimal de un número que no dependan de la ordenación de los dígitos que lo representan, y de forma que nos aseguremos que las diferentes potencias de 2 puedan diferenciarse mediante estos invariantes.

Observando la tabla del enunciado parece claro que uno de los invariantes podría ser el número de cifras, pero rápidamente advertimos que dos potencias distintas de 2 pueden tener el mismo número de cifras.

2^0	$= 1$	2^4	$= 16$	2^7	$= 128$	2^{10}	$= 1024$
2^1	$= 2$	2^5	$= 32$	2^8	$= 256$	2^{11}	$= 2048$
2^2	$= 4$	2^6	$= 64$	2^9	$= 512$	2^{12}	$= 4096$
2^3	$= 8$					2^{13}	$= 8192$

En cada columna hemos representado las potencias de 2 que tienen una, dos tres y cuatro cifras.

¿Cómo distinguir entre ellas? Es claro que no mediante la cifra de las unidades, por ejemplo. Un método más interesante, en el que intervienen todas las cifras, es estudiar el resto módulo 9; esto es, sumar los dígitos de cada número y reducir módulo 9 hasta obtener un entero entre 0 y 8.

Completando el cuadro anterior se tiene:

2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)
2^0	$=1$	1	2^4	$=16$	7	2^7	$=128$	2	2^{10}	$=1024$	7
2^1	$=2$	2	2^5	$=32$	5	2^8	$=256$	4	2^{11}	$=2048$	5
2^2	$=4$	4	2^6	$=64$	1	2^9	$=512$	8	2^{12}	$=4096$	1
2^3	$=8$	8							2^{13}	$=8192$	2

Observamos que en este caso se repiten cíclicamente 1, 2, 4, 8, 7, 5.

Si probamos que en cada columna no hay dos de estos números ya tendremos el resultado. La lista anterior corresponde a

$$2^0 \equiv 1 \pmod 9, \quad 2^1 \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^2 \equiv 4 \pmod 9, \quad 2^3 \equiv 8 \pmod 9,$$
$$2^4 \equiv 7 \pmod 9, \quad 2^5 \equiv 5 \pmod 9, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

Por lo tanto si la primera potencia de 2 que tiene t dígitos significativos es 2^s, módulo 9 éste será uno de los elementos de $\{1,2,4,8,7,5\}$; y se repite para 2^{s+6}.

¿Tendrá 2^{s+6} más dígitos que 2^s?
Por supuesto que sí, ya que

$$10^{t-1} \leq 2^s,$$

$$10^t < 10^{t-1} \times 2^6 \leq 2^s \times 2^6 = s^{s+6}.$$

Por lo tanto no existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos ordenados de formas distintas. □

Ejercicio. 1.6.
Observa que se verifica $1+4=2+3$, y que también se tiene

$$12+43=21+34.$$

De forma análoga se tiene $13+45=24+34$ y se verifica:

$$1324+4534=2413+3445.$$

¿Cómo explicar este hecho?

Existen resultados análogos para sumas de cuadrados: Se verifica $12^2+31^2=23^2+24^2$ y se tiene entonces

$$1223^2+3124^2=2312^2+2431^2.$$

Explica cual es la justificación de estos resultados.

SOLUCIÓN. Si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, entonces

$$(ac)^2 + (bd)^2 = (10a + c)^2 + (10b + d)^2 = 100(a^2 + b^2) + 20(ac + bd) + (c^2 + d^2),$$
$$(ca)^2 + (db)^2 = (10c + a)^2 + (10d + b)^2 = 100(c^2 + d^2) + 20(ca + db) + (a^2 + b^2).$$

□

2. Números amigos

Dos números naturales x e y se llaman **amigos** si la suma de los divisores propios de x es igual a y y viceversa.

El primer ejemplo de pareja de números de números amigos lo encontramos ya en Pitágoras, de quien se cuenta que una vez le preguntaron "*¿Qué es un amigo?*", y contestó: "*Un amigo es otro yo. Como lo son los números 220 y 284*".

Si llamamos

$$\text{div}(x) = \{\text{divisores de } x\} \setminus \{x\},$$

entonces x e y es una pareja de números amigos si $y = \sum \text{div}(x)$ y $x = \sum \text{div}(y)$.

Observa que $\text{div}(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ y se tiene

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Además $\text{div}(284) = \{1, 2, 4, 71, 142\}$ y se tiene

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

No fue hasta 1636 en que Pierre de Fermat anuncia una nueva pareja de números amigos: 17 296 y 18 416. Observa que en este caso los divisores respectivos son:

$$\text{div}(17296) = \{1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, 8648\},$$
$$\text{div}(18416) = \{1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208\}.$$

Comentario. *Más adelante veremos que en realidad otros matemáticos árabes en la Edad Media habían descubierto otras parejas de números amigos, pero sus descubrimientos habían quedado, momentáneamente, en el olvido.*

El siguiente matemático del que se tiene referencia en trabajar con números amigos fue René Descartes, quien en 1638 publica un tercer par. En este caso 9 363 584 y 9 437 056.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(9\,363\,584) = \{\,&1,2,4,8,16,32,64,128,191,382,383,764,766,1528,1532,3056,3064,\\&6112,6128,12224,12256,24448,24512,49024,73153,146306,292612,\\&585224,1170448,2340896,4681792\},\\ \mathrm{div}(9\,437\,056) = \{\,&1,2,4,8,16,32,64,128,73727,147454,294908,589816,1179632,\\&2359264,4718528\}\end{aligned}$$

Comentario. *Para determinar estos divisores ya hay que hacer uso de máquinas de cálculo; no es fácil obtener estas listas con lápiz y papel.*

Finalmente Leonard Euler en 1747 da una lista de treinta parejas de números amigos y posteriormente eleva este número hasta 64 parejas. Como anécdota señalar que se equivocó en una de las parejas. Otra anécdota relativa a las parejas de números amigos es la siguiente: *Los matemáticos se habían dejado una pareja de números amigos, 1.184 y 1.210, sin mencionar; fue un joven italiano de dieciséis años, Nicolo Paganini, quien anunció este resultado en 1866.*

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(1184) &= \{1,2,4,8,16,32,37,74,148,296,592\},\\ \mathrm{div}(1210) &= \{1,2,5,10,11,22,55,110,121,242,605\}.\end{aligned}$$

En la actualidad se conocen más de once millones de parejas de números amigos.

De las parejas de números amigos se tienen los siguientes hechos, que aún nadie ha probado que sean siempre ciertos:

CONJETURAS.

(1) En cada par de números amigos los dos números tienen la misma paridad.

(2) Todos los números amigos impares son múltiplos de 3.

(3) Todos los números amigos pares verifican que la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

2.1. Cálculo de parejas de números amigos

El primer procedimiento para construir parejas de números amigos se debe a Thabit ibn Qurra (826–901); este método fue después generalizado por L. Euler para obtener sus listas de parejas de números amigos. El procedimiento es el siguiente:

Si $n > 1$ es un entero tal que

$$p = 3 \times 2^{n-1} - 1, \quad q = 3 \times 2^n - 1, \quad r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$$

son números primos, entonces se tiene que $2^n pq$ y $2^n r$ forman una pareja de números amigos. Para $n = 2$, 4 y 7 se tienen parejas de números amigos:

n	p	q	r	$2^n pq$	$2^n r$
2	5	11	71	220	284
4	23	47	1151	17296	18416
7	191	383	73727	9363584	9437056

La pregunta es si este método proporciona todas parejas de números amigos; la respuesta es no ya que las parejas 1.184–1210 y 6.232–6.368 no se obtienen de esta forma.

Pregunta: *¿Para qué otros valores de n se obtiene una pareja de números amigos? (Ojo, n tiene que ser n >20.000).*

Para hacer estos cálculos vamos a utilizar programas de cálculo.

Durante la Edad Media otros matemáticos también estudiaron parejas de números amigos. Citamos algunos de ellos: Al Madshritti (–,1007), Abu Mansur Tahir al-Baghdadi (980–1037), Al-Farisi (1260–1320), Muhammad Baqir Yazdi (hacia 1500) que menciona la pareja 9.363.584–9.437.056.

2.2. Cadenas sociales de números

Una sucesión de tres o más números enteros $x_1, \ldots, x_t$, tales que para cada índice i se tiene que la suma de los divisores propios de x_i es x_{i+1}, para $i = 1, \ldots, t-1$ y la suma de los divisores propios de x_t es x_1 se llama una **cadena de social de números**.

Observa que si $t = 2$, entonces tenemos una pareja de números amigos.

En 1918 P. Poulet publica la primera cadena de números sociales:

$$12496, 14288, 15472, 14536 \text{ y } 14264.$$

Se conoce otra cadena de números sociales que comienza en 14.316 y que contiene 28 elementos.

$$14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896,$$
$$358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778,$$
$$152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716.$$

Sin embargo no se conoce ninguna cadena social de longitud tres, para las cuales reservamos el nombre de **clan de números**.

2.3. Números perfectos

Los números perfectos son números los x tales que la pareja x, x es una pareja de números amigos, esto es, x es la suma de sus divisores primos.

Observación. *Comprobar que 6 es un número perfecto y que 28 también lo es.*

Los números perfectos ya eran conocidos por Euclides, quien en el Libro IX de sus Elementos establece:

TEOREMA de Euclides. *Si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.*

Comentario. *En realidad Euclides dice lo siguiente: suma 1, 2, 4, 8, ..., de forma que cuando obtengas un número primo te basta multiplicar por la última potencia de 2 para tener un número perfecto.*

Comprobemos algunos casos:

$$(1+2) \times 2 = 6,$$

$$(1+2+2^2) \times 2^2 = 28$$

Comentario. *Hablar en este momento de la suma $1 + a + a^2 + \cdots + a^t$.*

Prueba del Teorema de Euclides.
En efecto, tenemos que determinar los divisores de $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Estos son de la forma $2^t(2^{n+1} - 1)^s$, siendo $0 \leq t < n - 1$ y $0 \leq s \leq 1$ y además 2^{n-1}. La suma de todos ellos es:

$$\sum_{t=0}^{n-1} 2^t + \sum_{t=0}^{n-2} 2^t(2^{n+1} - 1) = \cdots = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Observa que $2^{n+1} - 1$ toma los valores 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, etc. De estos los que son primos producen números perfectos.

n	2^n-1	$2^{n-1}(2^n-1)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128
13	8191	33550336
17	131071	8589869056
19	524287	137438691328
31	2147483647	2305843008139952128
61	2305843009213693951	2658455991569831744654692615953842176

No todos los números perfectos se obtienen de esta forma.

PROBLEMA. *Determina un número perfecto que no esté en la lista anterior.*

Este problema se puede atacar por fuerza bruta o podemos tratar de probar que todo número perfecto par ha de ser de la forma $2^{n-1}(2^n-1)$ para cierto 2^n-1 primo (Teorema de Euler).

Para este fin vamos a introducir alguna notación adicional y algunos resultados básicos.

L. Euler introduce una función numérica $\sigma(n)$ definida por:

$$\sigma(n) = \text{suma de los divisores de } n.$$

Observa que un número x es perfecto si $\sigma(x) = 2x$, y que para una pareja x, y de números amigos se tiene $\sigma(x) = x + y = \sigma(y)$. El uso de funciones numéricas es útil si éstas verifican propiedades buenas. En este caso tenemos:

LEMA.

(1) Si n y m son primos relativos, entonces $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.

(2) Si p es primo, entonces $\sigma(p) = p + 1$.

(3) Si n, m, p son enteros primos, entonces $\sigma(nmp) = \sigma(n)\sigma(m)\sigma(p) = (n+1)(m+1)(p+1)$.

(4) Si p es primo, entonces $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$.

(5) Si $n = p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$ es la descomposición en producto de primos distintos dos a dos, entonces $\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1}) \cdots \sigma(p_t^{k_t}) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \cdots \frac{p_t^{k_t+1}-1}{p_t-1}$.

COMENTARIO. *Observa que si se utiliza la suma de los divisores propios, esta función no tiene tan buenas propiedades.*

TEOREMA de Mersenne. *Si $2^n - 1$ es un entero primo, entonces n es primo.*

Los números primos de la forma $2^n - 1$ se llaman **números primos de Mersenne**.

En efecto, si $n = ab$ no es primo, procedemos como sigue:

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left((2^a)^{b-1} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

Ahora podemos establecer el

TEOREMA de Euler. *Si $x = 2^{n-1}a$ es un número perfecto par, con a impar, entonces $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$ y $2^n - 1$ es un primo de Mersenne.*

En efecto, si $x = 2^{n-1}a$, con a impar, es perfecto, se tiene:

$$2^n a = 2x = \sigma(2^{n-1})\sigma(a) = (2^n - 1)\sigma(a).$$

Observa que 2^n divide al producto de la derecha, y que no divide a $2^n - 1$, luego $2^n \mid \sigma(a)$, y existe b tal que $\sigma(a) = 2^n b$.

Otra vez utilizando las igualdades anteriores se tiene

$$2^n a = (2^n - 1)\sigma(a) = (2^n - 1)2^n b,$$

por lo tanto $a = (2^n - 1)b$.

Si $b \neq 1$, entonces $a = (2^n - 1)b$ tiene al menos los divisores $a, b, 1$, y entonces

$$\sigma(a) \geq a + b + 1 = (2^n - 1)b + b + 1 = 2^n b + 1 = \sigma(a) - 1,$$

lo que es una contradicción. Así pues $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Observa que $\sigma(a) = 2^n b = (2^n - 1)b + b = a + b$, entonces $\sigma(a) = a + 1$ y tenemos que a es un número primo.

ACTIVIDAD. *Vamos a comprobar que todos los números perfectos pares tienen por cifra de las unidades 6 u 8.*

Observa que el número perfecto a estudiar es $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$, con n primo. Analizamos los posibles casos.

Si $n = 2$ se tiene $x = r(2^2 - 1) = 6$, que verifica esta propiedad.

Si $n = 4a + 1$, en este caso se tiene

$$x = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{4a}\left(2^{4a+1} - 1\right) = (2^4)^a\left((2^4)^a 2 - 1\right) = 2 \times 16^{2a} - 16^a$$
$$\equiv 2 \times 6 - 6 \equiv 6 \pmod{10}$$

Si $n = 4a + 3$, en este caso se tiene

$$x = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{4a+2}\left(2^{4a+3} - 1\right) = 4 \times 16^a\,(8 \times 16^a - 1) = 2 \times 16^{2a+1} - 4 \times 16^a$$
$$\equiv 2 \times 6 - 4 \times 6 \equiv -2 \times 6 \equiv -12 \equiv 8 \pmod{10}.$$

Queda pues el problema de los números perfectos impares. No se conoce ningún número perfecto impar.

ACTIVIDAD. *Vamos a comprobar que ningún número de la forma p^e, para p primo impar, es perfecto.*

En efecto, si se tiene $2p^e = \sigma(p^e) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^e = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$, entonces $2p^e = p^{e+1} + 1$, lo que es una contradicción.

ACTIVIDAD. *Vamos a comprobar que ningún número de la forma $p^a q^b$, para p y q primos distintos, $p < q$, es perfecto.*

Este resultado es un poco complicado de probar. Comencemos por un resultado más simple que nos enseñará la técnica a emplear. Supongamos que $n = p^a q$ es perfecto con $2 < p < q$. Se tiene:

$$2p^a q = 2n = \sigma(n) = \sigma(p^a)\sigma(q),$$

$$\tfrac{\sigma(p^a)}{p^a} = \tfrac{2q}{\sigma(q)} = \tfrac{2q}{1+q}.$$

Ahora analizamos $\frac{\sigma(p^a)}{p^a}$.

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = \frac{1 + p + \cdots + p^a}{p^a} = \frac{1}{p^a} + \cdots + \frac{1}{p} + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{a+1}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{p}{p-1}.$$

Además como $2 < p < q$, se tiene $\frac{p}{p-1} \leq \frac{3}{2}$. Además de la relación

$$\frac{2q}{1+q} < \frac{p}{p-1}$$

se tiene $2q(p-1) < p(q+1)$, esto es, $2pq - 2q < pq + p$. Simplificando $pq < p + 2q$, y se tiene $p < 2 + \frac{p}{q} < 3$, lo que es una contradicción.

Podemos abordar ahora el caso general en que $n = p^a q^b$. Como éste es un número perfecto, se verifica:

$$2p^a q^b = 2n = \sigma(n) = \sigma(p^a)\sigma(q^b), \frac{\sigma(p^a)}{p^a} = \frac{2q^b}{\sigma(q^b)}.$$

Tenemos una acotación para $\frac{\sigma(p^a)}{p^a}$, en efecto $\frac{\sigma(p^a)}{p^a} < \frac{3}{2}$. Vamos a buscar otra acotación para $\frac{2q^b}{\sigma(q^b)}$; en realidad como función de q es una función creciente. Esto podemos hacerlo estudiando ejemplo o más precisamente derivando respecto a q.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b}{\sigma(q^b)}\right) &= \frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b}{\frac{q^{b+1}-1}{q-1}}\right) \\
&= \frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b(q-1)}{q^{b+1}-1}\right) \\
&= \frac{(b+1)2q^b-2bq^{b-1}}{q^{b+1}-1} - \frac{2q^b(q-1)(b+1)q^b}{(q^{b+1}-1)^2} \\
&= \frac{2q^b(b-bq+q(q^b-1))}{(q^{b+1}-1)^2}
\end{aligned}$$

Este valor es mayor que 0 cuando $2q^b(b-bq+q(q^b-1)) > 0$, esto es, si $b-bq+q(q^b-1) > 0$, y esto ocurre siempre, ya que $q \geq 5$. Como la derivada no se anula y es siempre positiva, la función es estrictamente creciente. El valor mínimo se alcanzará para $q = 5$. En este caso se tiene

$$\frac{2q^b}{\sigma(q^b)} = \frac{2q^b(q-1)}{q^{b+1}-1} = \frac{2 \times 5^b \times 4}{5^{b+1}-1} = \frac{8}{5^b - \frac{1}{5}} > \frac{8}{5} > \frac{3}{2}$$

lo que es una contradicción, pues se tendría

$$\frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{2q^b}{\sigma(q^b)} = \frac{\sigma(p^a)}{p^a} < \frac{3}{2}.$$

COMENTARIO.

(1) *Las acotaciones a los resultados sobre números perfectos impares que se conocen siguen la línea de esta prueba, buscando acotaciones al número de factores primos y al tamaño de los mismos.*

(2) *No se conoce ningún entero impar que sea perfecto.*

2.4. Actividades

Ya hemos visto un tipo de números y algunas de sus propiedades. Ahora surgen numerosas preguntas que podemos tratar de contestar. En general es necesario disponer de un sistema de computación para comprobar fácilmente las tesis, hacer experimentos y poder sugerir hipótesis sobre la aritmética de los números; pero es necesario previamente crear un clima de participación y discusión numerosas preguntas.

(1) Para cada número hay que determinar un algoritmo que sea rápido para realizar los cálculos de la suma de sus divisores u otra técnica que se vaya a utilizar.

(2) ¿Qué pasa cuando se calcula la suma de los divisores y se vuelve a repetir el proceso? Estudiar el comportamiento de estas sucesiones. ¿Son crecientes?, son decrecientes?, ¿se estabilizan?, ¿son periódicas?

(3) Cuando n es primo se tiene que la suma de los divisores propios es 1. Además esto caracteriza a los números primos.

(4) Cuando $n = 1$ la suma de los divisores propios es 0.

(5) Se llega siempre al final a 0 salvo los casos en que se tenga un ciclo, que puede ser de longitud 1 (números perfectos), de longitud 2 (números amigos), de longitud 3 (coronas), o de longitud mayor (cadenas sociales). Dar métodos de cálculo para estos ejemplos (ejemplos de programación).

(6) Al hacer reiteradamente las sumas de los divisores propios, ¿debe siempre disminuir el valor si no se está en un ciclo? Estudiar el ejemplo de 30.

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{div}(30) & = \{1,2,3,5,6,10,15\}, & 42 \\
\mathrm{div}(42) & = \{1,2,3,6,7,14,21\}, & 54 \\
\mathrm{div}(54) & = \{1,2,3,6,9,18,27\}, & 66 \\
\mathrm{div}(66) & = \{1,2,3,6,11,22,33\}, & 78 \\
\mathrm{div}(78) & = \{1,2,3,6,13,26,39\}, & 90 \\
\mathrm{div}(90) & = \{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45\}, & 144 \\
\mathrm{div}(144) & = \{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72\}, & 259 \\
\mathrm{div}(259) & = \{1,7,37\}, & 45 \\
\mathrm{div}(45) & = \{1,3,5,9,15\}, & 33 \\
\mathrm{div}(33) & = \{1,3,11\}, & 15 \\
\mathrm{div}(15) & = \{1,3,5,\}, & 9 \\
\mathrm{div}(9) & = \{1,3\}, & 4 \\
\mathrm{div}(4) & = \{1,2\}, & 3 \\
\mathrm{div}(3) & = \{1\}, & 1 \\
\mathrm{div}(1) & = \varnothing. & 0
\end{array}$$

(7) ¿Existe pares de números amigos en los que un número sea par y el otro sea impar?

(8) En todos los pares conocidos de números amigos se observa que los dos números tienen al menos un factor común. ¿Hay parejas de números amigos con los dos números primos relativos? (Según los datos en caso de existir el producto de los dos números debería ser mayor que 10^{67}.)

(9) Encuentra una pareja de números amigos impares.

(10) Primeras parejas de números amigos:

$$\begin{array}{rrr}
220\,,284, & 1184\,,1210, & 2620\,,2924, \\
5020\,,5564, & 6232\,,6368, & 10744\,,10856, \\
12285\,,14595, & 17296\,,18416, & 63020\,,76084, \\
66928\,,66992, & 67095\,,71145, & 69615\,,87633, \\
79750\,,88730, & 100485\,,124155, & 122265\,,139815, \\
122368\,,123152, & 141664\,,153176, & 142310\,,168730.
\end{array}$$

(11) Los números primos de Mersenne fueron introducidos en 1644 por el fraile franciscano Marin Mersenne, amigo de Fermat. Estos son de la forma $2^n - 1$, y como hemos visto para que $2^n - 1$ sea primo es necesario, pero no suficiente que n sea primo. Por ejemplo $2047 = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$ no es primo.

(12) Estudiar otros números primos de Mersenne. En la actualidad se conocen 44 primos de Mersenne, siendo el mayor de ellos $2^{32582657} - 1$. Por lo tanto se conocen exactamente 44 números perfectos. Ver cuáles on los primos de Mersenne.

(13) ¿Que es un primo de Fermat? ($2^{2t} + 1$.)

Índice alfabético