POLIEDROS REGULARES.

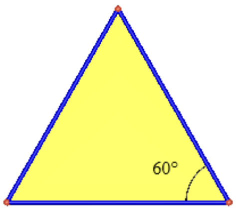
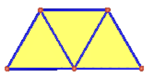
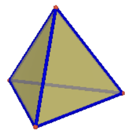
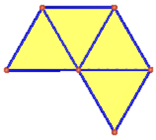
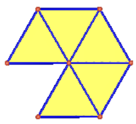
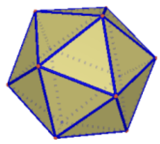
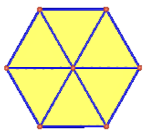
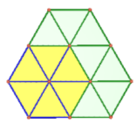
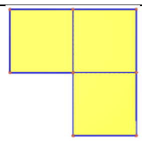
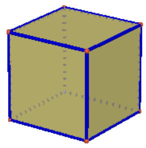
Segundo curso del proyecto Estalmat.

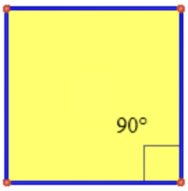
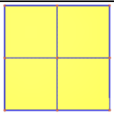
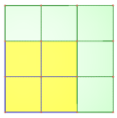
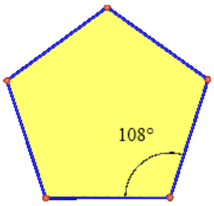
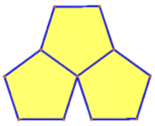
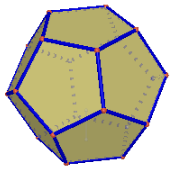
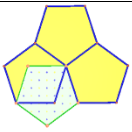
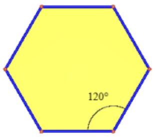
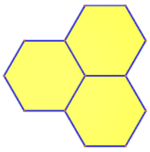
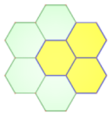
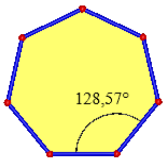
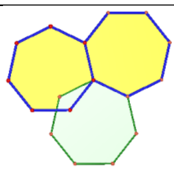
Este tema se organiza en dos tipos de sesiones.

I.- Una sesión con material manipulativo, tipo Polydron, o troquelados, en la que los alumnos construyen los poliedros regulares, se llega a su definición y concluir que sólo existen 5 poliedros regulares convexos. Comprobación de la relación de Euler.

El número mínimo de polígonos en cada vértice es 3, como también es 3 el número mínimo de lados de cada polígono regular (triángulo equilátero). La condición de formar poliedro es que la suma de los ángulos de los polígonos en cada vértice sea menor de 360º.

El siguiente esquema sirve de guía para esta primera sesión.

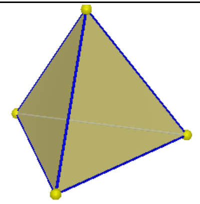
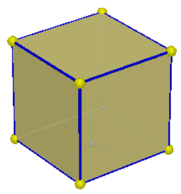
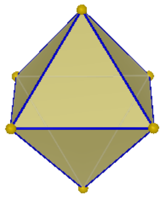
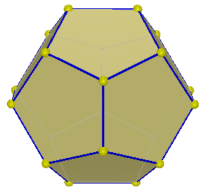
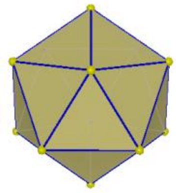
Polígono regular en cada cara.	**Nº Polígonos por vértice y desarrollo de un vértice.**			**Poliedro regular.**	
Triángulo Equilátero 	3	3*60=180		Tetraedro	
	4	4*60=240		Octaedro	
	5	5*60=300		Icosaedro	
	6	6*60=360		No genera poliedro convexo, mosaico regular. 	
Cuadrado	3	3*90=270		Hexaedro o cubo	

	4	4*90=360		No genera poliedro convexo, mosaico regular. 
Pentágono 	3	3*108=324		Dodecaedro 
	4	4*108=432		No genera poliedro convexo.
Hexágono 	3	3*120=360		No genera poliedro convexo, mosaico regular. 
7 o más lados 	3	3*128.6 >360		No genera poliedro convexo.

Con este sencillo razonamiento, que es el ya empleado por Euclides en Los Elementos se demuestra que únicamente existen los 5 poliedros regulares convexos que se han determinado.

II.- Una vez construidos los poliedros regulares, conocidos sus nombres y alguna de sus propiedades, en esta segunda (o más sesiones) utilizaremos como soporte el software tridimensional Cabri 3D, que construye directamente los poliedros regulares. El objetivo de la sesión es la manipulación de éstos y algunos cálculos.

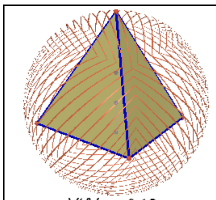
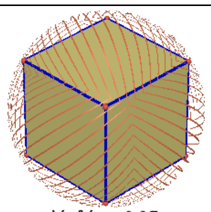
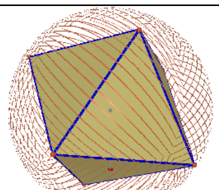
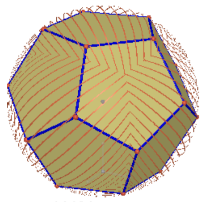
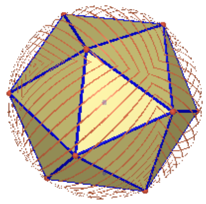
ACTIVIDAD 1. Construir los 5 poliedros regulares utilizando Cabri 3D, medir su área y volumen, y deducir la expresión de esta magnitudes dividiendo entre el valor de la arista al cuadrado y al cubo.

 Área/a^2 = √3 Volumen /a^3= √2/12	 Area/a^2 = 6 Volumen/a^3 = 1	 Area/a^2 = 2√3 Volumen/a^3= √2/3	 Área/a^2 = 20,65 Volumen/a^3 = (15+7√5)/4	 Area/a^2 = 5√3 Volumen/a^3 = (15+5√5)/12

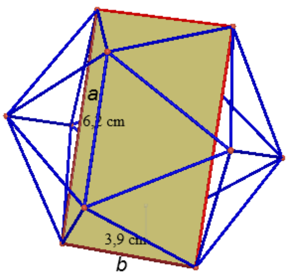
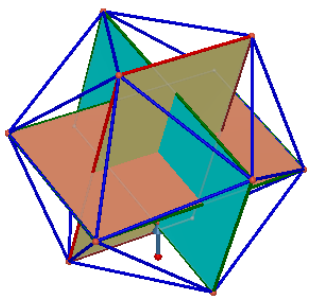
Como vemos Cabrí 3D nos muestra el valor exacto de estas magnitudes excepto el área del dodecaedro, cuyo valor es $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$.

Esta aparente carencia del programa está justificada, el programa es capaz de presentar el forma exacta algunos de los números de la forma, $a+b\sqrt{n}$, con n = 2,3,5,… no demasiado grandes, pero no números de la forma $\sqrt{a+b\sqrt{n}}$. En el caso que nos ocupa, el cociente Área /(arista)^2=20,65. Si elevamos este número al cuadrado si reconoce su valor exacto en la forma $225+90\sqrt{5}$, lo que nos permite calcular de forma exacta la expresión del área en función de la arista.

1.2 Determinar la esfericidad de los poliedros regulares. Cociente entre el volumen del poliedro y la esfera circunscrita al poliedro.

 Vt/Ve = 0,12	 Vc/Ve = 0,37	 Vo/Ve = 0,32	 Vd/Ve = 0,66	 Vi/Ve = 0,61

1.- 3. Icosaedro y rectángulo áureo.

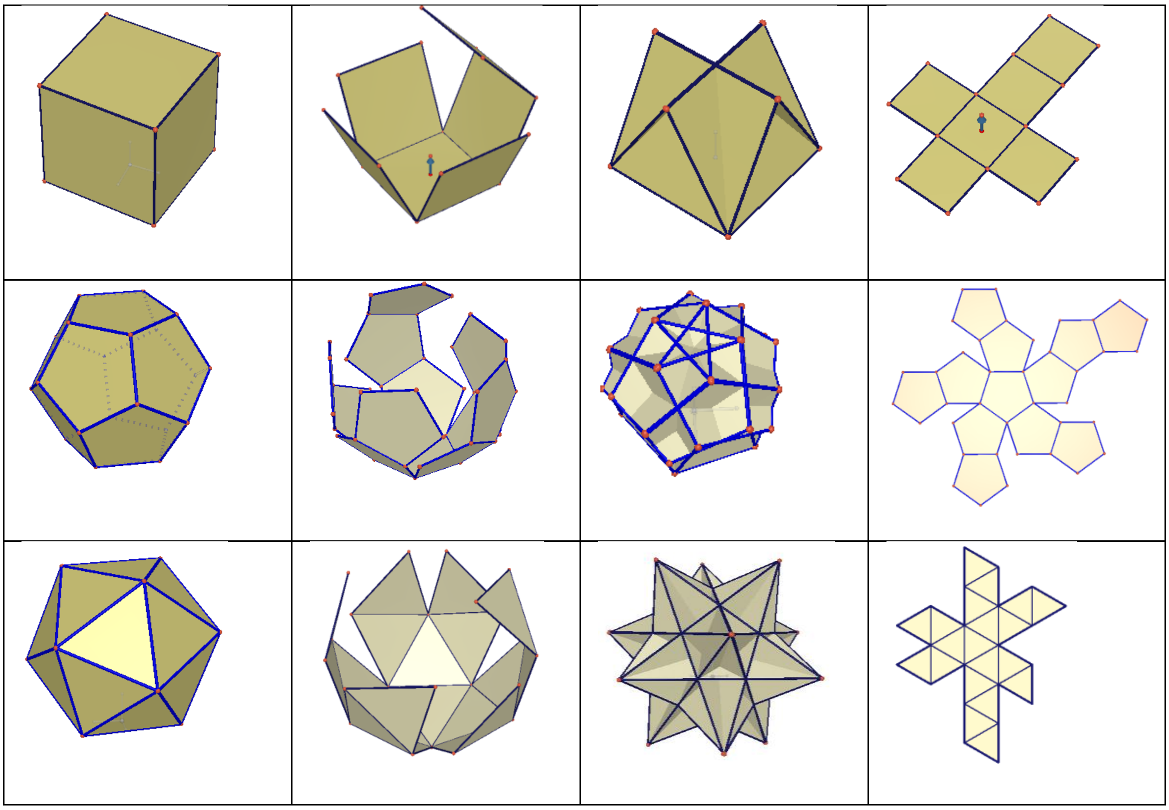
 a/b = (1+√5)/2	A partir del dodecaedro se construye el rectángulo por dos aristas opuestas. De igual forma se construyen otros dos rectángulos perpendiculares al primero. Los vértices del icosaedro están sobre los de los tres rectángulos áureos.	

- Se propone como ejercicio la actividad inversa. Construir tres rectángulos áureos perpendiculares y a partir de ellos el icosaedro.
- Si se construye un rectángulo similar sobre un dodecaedro, ¿Qué relación hay entre sus lados?

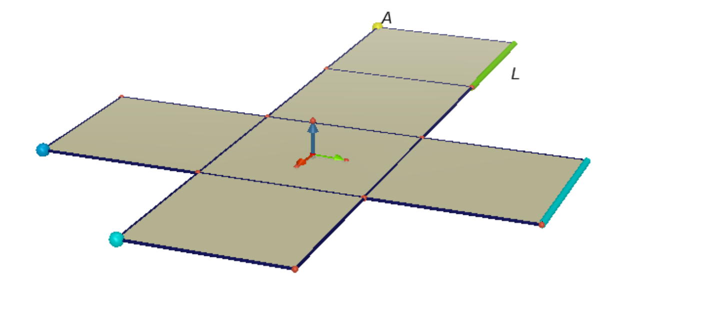
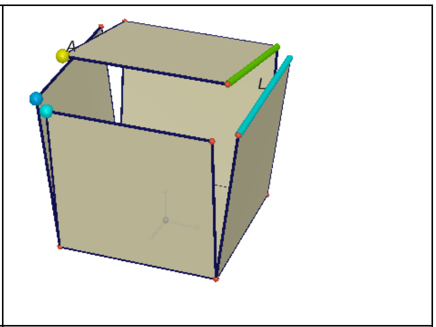
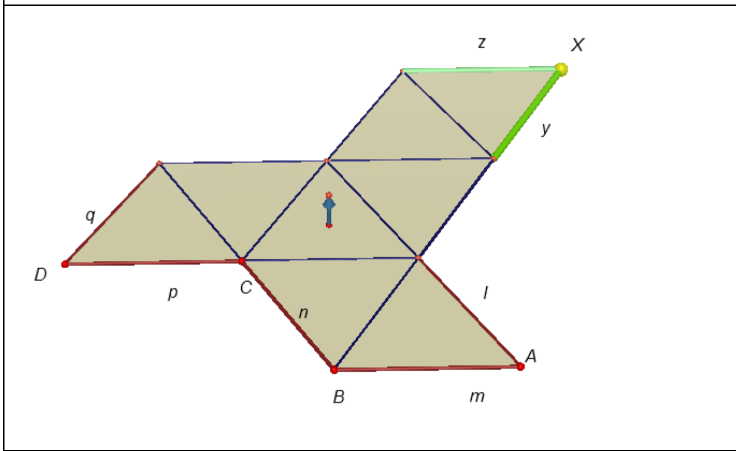
ACTIVIDAD 2. Desarrollos planos y otras configuraciones.

El software facilita de forma automática la apertura de un poliedro convexo, en particular de los poliedros regulares.

Es interesante observar las curiosas configuraciones que se obtienen en algunas posiciones.



ACTIVIDAD 2.1 . Ejercicio de visión espacial a realizar por parejas. Sobre el desarrollo plano de un poliedro marcar una arista y un vértice. El compañero debe de marcar la arista y vértices que coinciden con los marcados al cerrar el desarrollo.

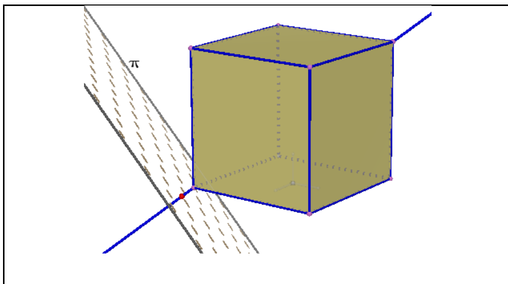
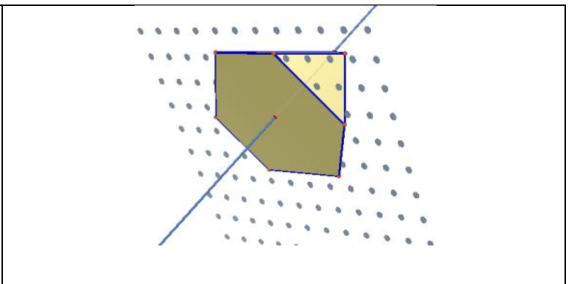
	
	¿Qué vértice coincide con X? A, B, C, D ¿Qué arista coincide con y? l , m, n, p, q ¿y con z? l , m, n, p, q

Podemos hacer actividades similares con los restantes poliedros regulares, no resulta tan sencillo en dodecaedro e icosaedro, así como en otros poliedros.

ACTIVIDAD 3. Cortes de poliedros por planos. Secciones de corte.

3.1. Corte de un cubo por un plano perpendicular a la diagonal principal.

¿Qué polígonos se obtienen al desplazar el plano a lo largo de la diagonal? ¿Son regulares?

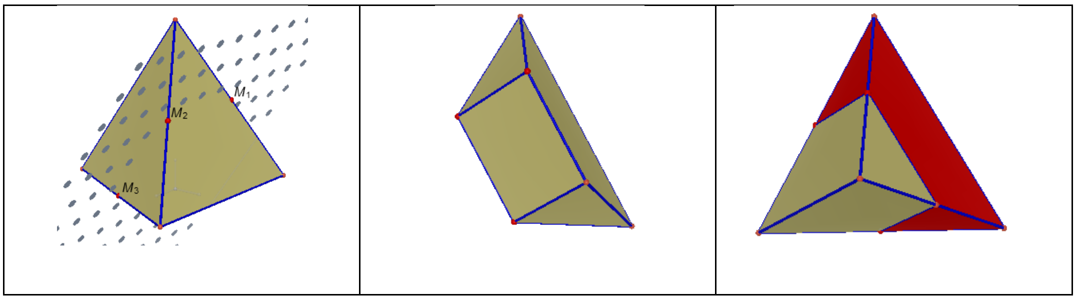
	

3.2. Estudiar cortes del cubo mediante otros planos. ¿Es posible obtener un pentágono? ¿y pentágono regular?. ¿Por dónde hay que cortar el cubo para obtener triángulo isósceles, triángulos rectángulos, trapecios, rectángulos? ¿Cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono obtenido por este procedimiento?

Podemos hacer un estudio similar en los restantes poliedros regulares.

3.3. Vamos a centrarnos ahora en un corte particular. Corte por un plano que pasa por el punto medio de 3 aristas consecutivas (no paralelas a una cara).

Comenzamos con el tetraedro



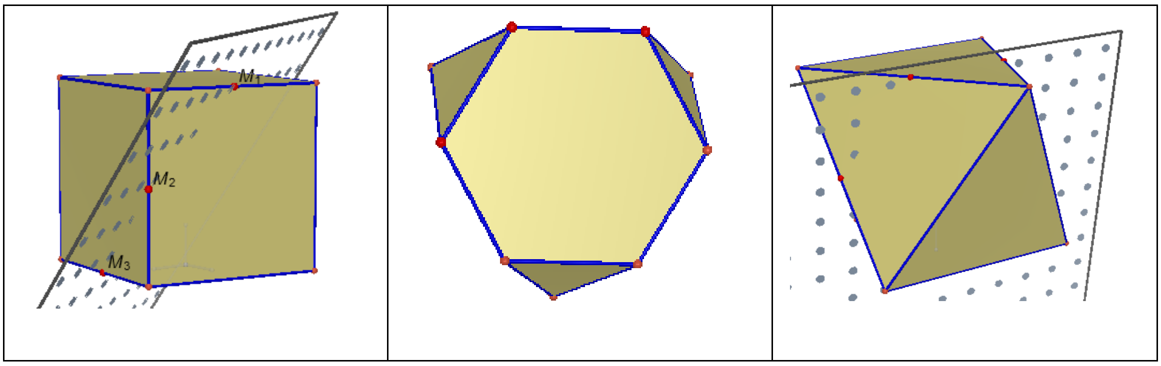
¿Qué simetría, central, axial o plana permite construir el tetraedro completo a partir del módulo de la figura del centro?

¿Cuál es el desarrollo plano del módulo del tetraedro que se ha obtenido? Haz sobre el desarrollo la misma simetría que en el apartado anterior y cierra el poliedro.

Cortando el tetraedro por planos paralelos a una arista ¿qué polígono se obtiene? ¿Podría obtenerse el rectángulo áureo? ¿a qué distancia hay que realizar el corte?

Podemos hacer un tratamiento similar para los cuatro poliedros regulares restantes, incluido lo relativo a las simetrías, pero en éstos vamos a centrarnos en otro curioso aspecto.

3.4 Cortes en cubo y octaedro por el punto medio de aristas consecutivas.



¿Qué corte es el representado en la figura del centro? ¿Cubo u octaedro?

Puede procederse de forma similar con dodecaedro e icosaedro. ¿Qué sección se obtiene en este caso?

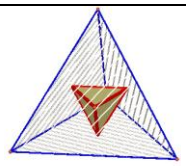
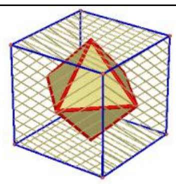
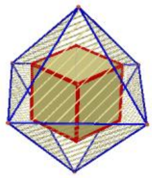
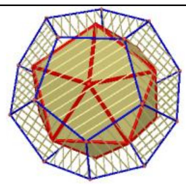
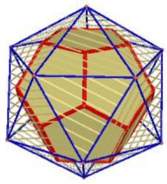
¡Parece que entre estas parejas de poliedros hay alguna relación!

ACTIVIDAD 4. Dualidad.

Poliedro dual o **conjugado**, en geometría, es el poliedro cuyos vértices se corresponden con el centro de las cara del otro poliedro. El poliedro dual del dual es una homotecia del inicial. De la definición de dualidad es inmediato que el número de caras de un poliedro es igual al número de vértices de su dual y viceversa, mientras que el número de aristas es invariante por la operación de dualidad.

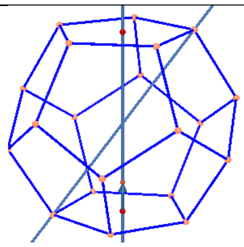
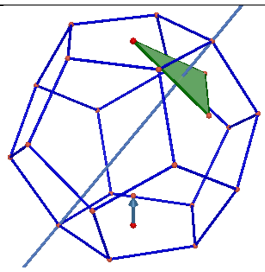
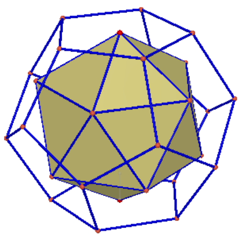
4.1 Construir el poliedro dual de los cinco poliedros regulares.

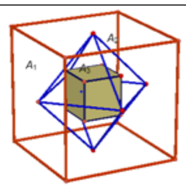
La imagen siguiente muestra la relación de dualidad entre los sólidos platónicos. Cubo y octaedro son duales entre si, como también lo son dodecaedro e icosaedro, mientras que el tetraedro es autodual, su dual es él mismo.

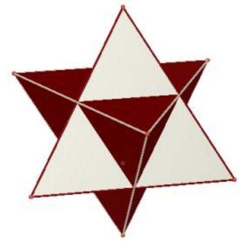
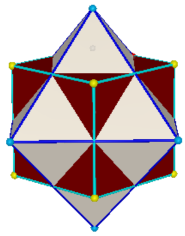
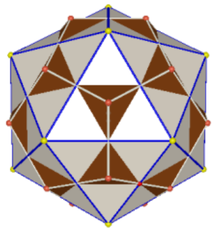
Sobre estas construcciones resulta sencillo medir relaciones entre aristas, aéreas y volúmenes, y en algunos casos su cálculo no es demasiado complejo.

El proceso de construcción de poliedros duales puede en principio parecer muy laborioso, no lo es tanto con una utilización adecuada de las herramientas que proporciona el software que se está utilizando. La siguiente secuencia de imágenes muestra un procedimiento de construcción del icosaedro como dual del dodecaedro.

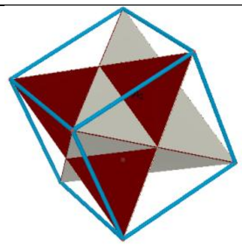
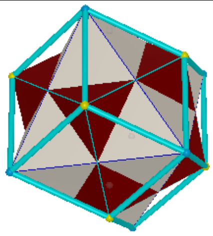
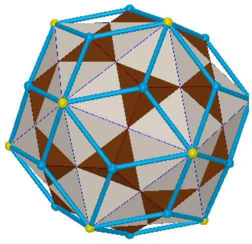
		
Se construye el dodecaedro y dos rectas, una perpendicular al centro de una cara y otra por dos vértices opuestos.	Triángulo con centro a la recta que tiene un vértice en el centro de la cara.	Icosaedro que tiene por cara el triángulo equilátero construido en el paso anterior.

4.2. Construye un cubo, el octaedro como dual y ahora el dual de este, con lo que se obtiene otro cubo como se muestra en la imagen. ¿Qué relación hay entre la arista de ambos cubos? ¿y entre sus volúmenes?	

4.3 Mediante homotecias u otros procedimientos geométricos, se puede conseguir que un poliedro y su dual estén dispuestos de forma que sus aristas se corten perpendicularmente.

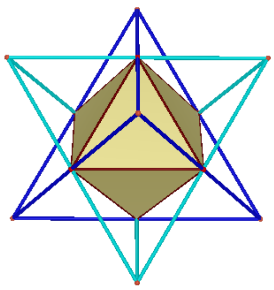
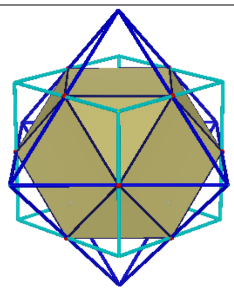
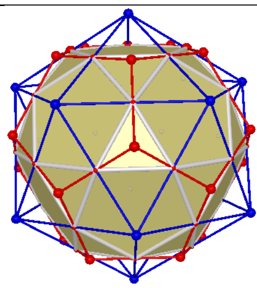
		

4.3.1 Determinar el poliedro envolvente de cada una de estas configuraciones.

		
Cubo	Dodecaedro Rómbico	Triacontraedro rómbico

La envolvente de cada poliedro y su dual con la homotecia adecuada es un poliedro con caras rombos cuya relación entre las diagonales es respectivamente: 1 (cuadrado), $\sqrt{2}$ y $(1+\sqrt{5})/2$ esto es el numero de oro cuya presencia empieza a ser habitual.

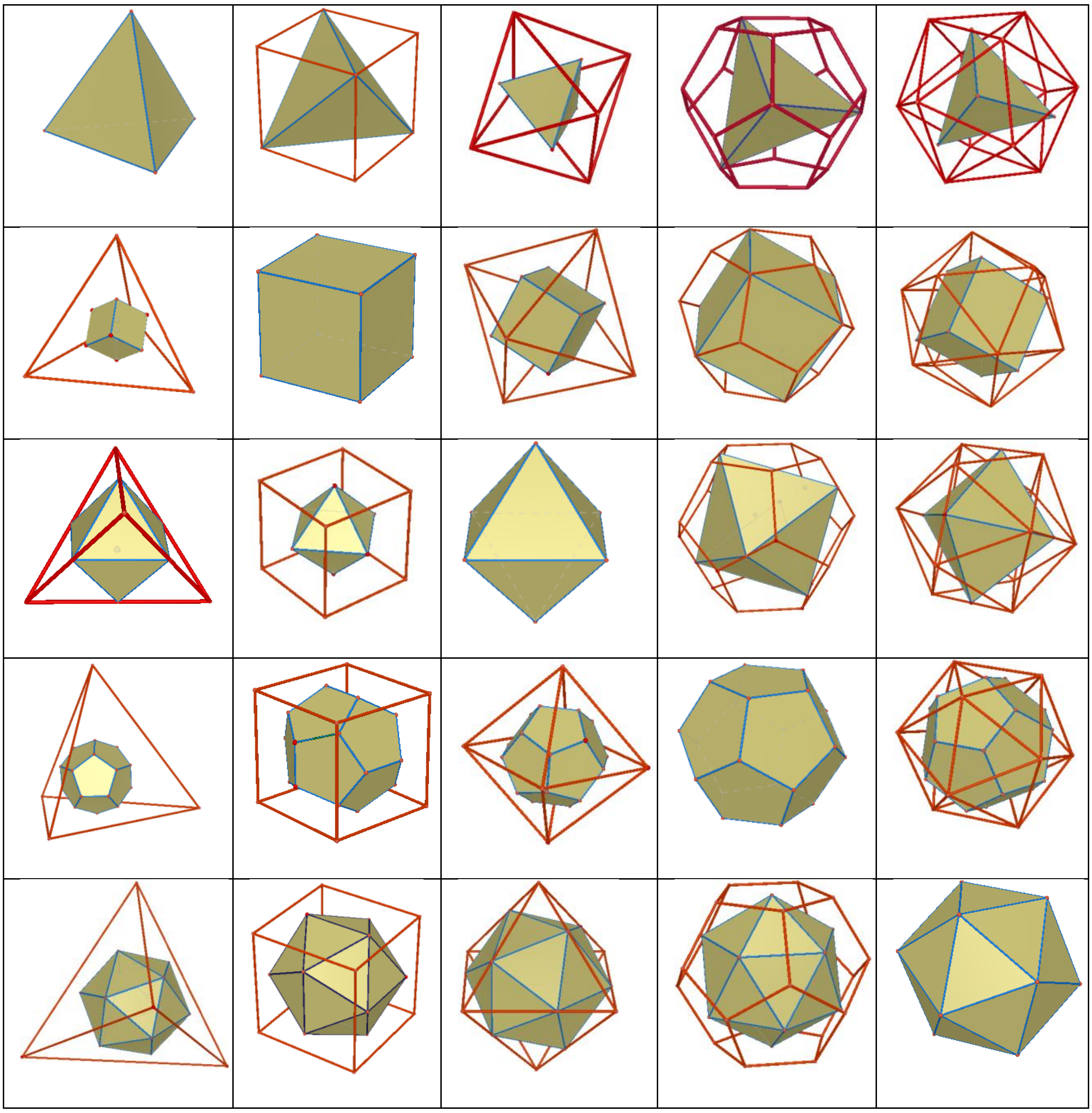
4.3.2 Determina ahora la intersección de estos pares de poliedros duales:

La intersección de estos pares de poliedros son el octaedro, cuboctaedro e icosidodecaedro. Estos dos últimos poliedros semirregulares.

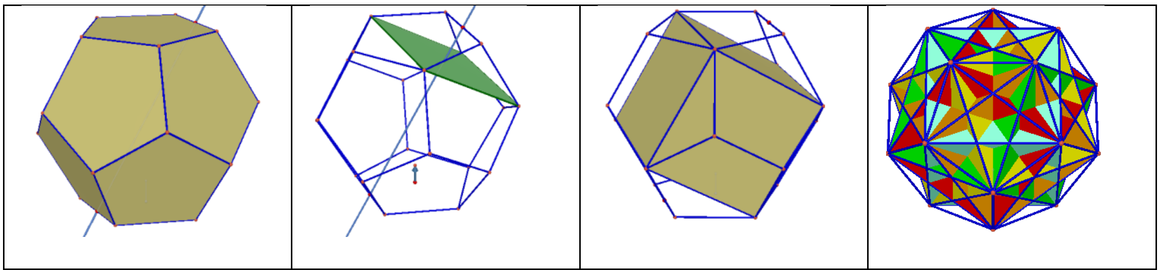
ACTIVIDAD 5. Inscribir unos poliedros regulares en otros. Construcción del Omnipoliedro.

Mediante la dualidad se ha realizado la inscripción de algunos poliedros regulares en otros. Pero no son estas las únicas inscripciones posibles, de cualquiera de los poliedros regulares puede inscribirse en uno dado. No en todos el proceso, o cálculos necesarios resultan sencillos.



Veamos en detalle dos de estas inscripciones.

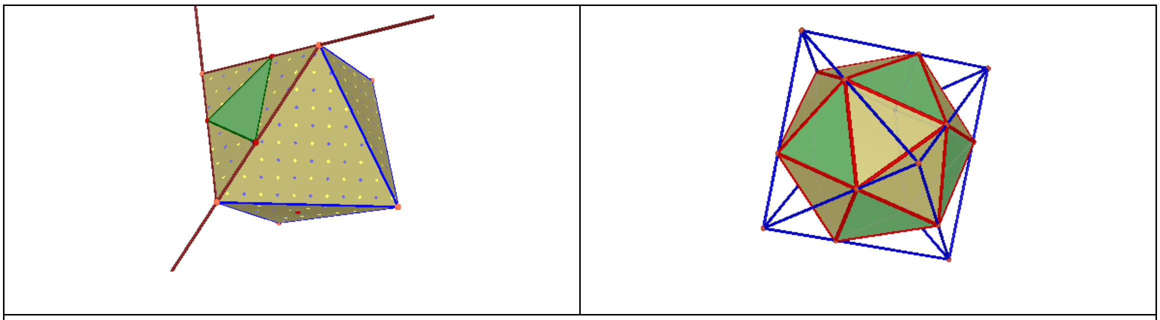
Cubo inscrito en un dodecaedro.



Se construye la recta que pasa por el punto medio de dos aristas opuestas y un cuadrado con centro en esa recta y vértice como se indica en la segunda imagen. Basta ahora formar el cubo que tiene por cara el cuadrado construido. Mediante rotaciones del cubo es inmediata la vistosa construcción que se representa en la imagen.

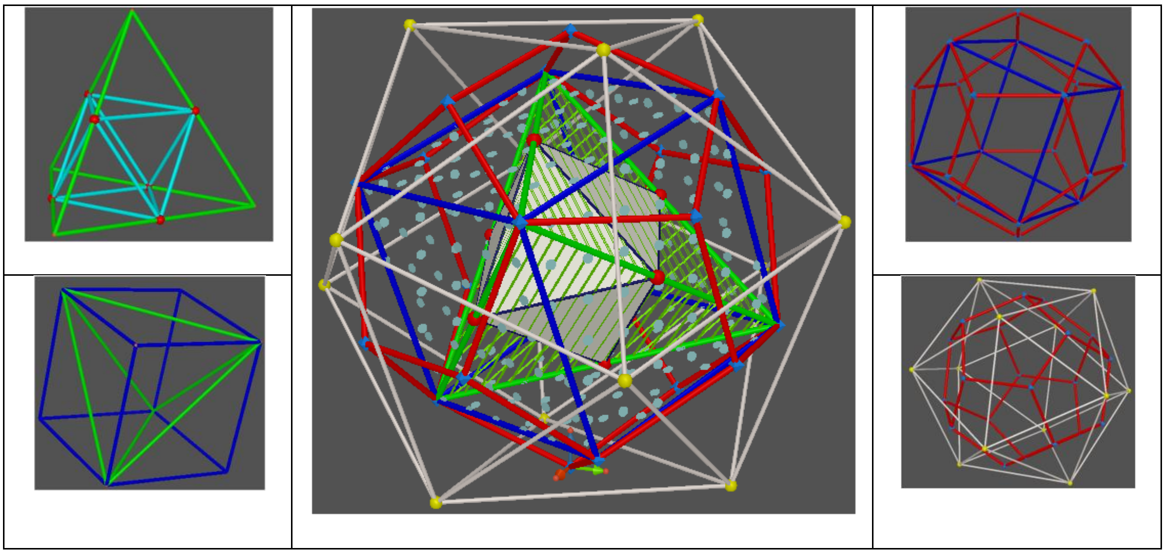
En “La Divina Proporción”, Luca Paccioli afirma que sólo 12 de estas inscripciones son posibles, olvidando, entre otras, curiosamente aquellas que requieren para su construcción el número de oro.

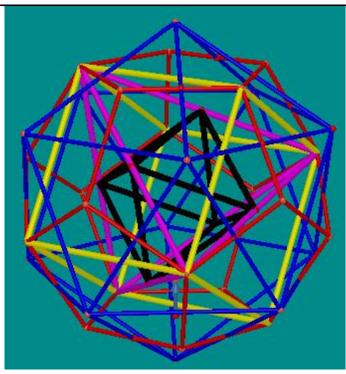
Una de las inscripciones no contempladas en la Divina Proporción es la del icosaedro en el octaedro.



Sobre una de las caras del octaedro, se construye el triángulo representado, cuyos vértices están sobre la división áurea cada uno de sus lados. Los triángulos que se obtienen al repetir el proceso en cada junto a los nuevos triángulos necesarios para formar poliedro (dos por vértice del octaedro) determinan un icosaedro.

Pueden inscribirse los 5 poliedros regulares como se muestra a continuación, donde se ha comenzando por el icosaedro en el exterior, por los puntos medios de sus caras se construye el dodecaedro. Tomando como arista la diagonal del pentágono de sus caras, se construye un cuadrado sobre 4 caras contiguas del dodecaedro, que es la cara del cubo inscrito en el dodecaedro. Puede ahora inscribirse un tetraedro de arista la diagonal del cubo, y finalmente un octaedro con vértice en los puntos medios de las caras del tetraedro. Hay 5!=120 formas de inscribir los cinco poliedros regulares, se representa una de las más conocidas.



Es frecuente encontrar como Omnipoliedro la construcción que se muestra, en la que como puede apreciarse no están inscritos los poliedros, pero si están unidas sus aristas o vértices. Tiene además la particularidad de que las aristas del icosaedro y del cubo son de la misma longitud.	

TRUNCAMIENTO DE POLIEDROS REGULARES. POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Se entiende por Arquimedianos, poliedros con caras regulares y vértices iguales, por ello son también conocidos como poliedros semirregulares. Con la definición dada, prismas (con caras laterales cuadrados) y antiprismas (formados con triángulos equiláteros en caras laterales) pertenecen a este tipo, pero vamos por el momento a obviar estos poliedros, y centrarnos en el resto que cumplan las condiciones dadas.

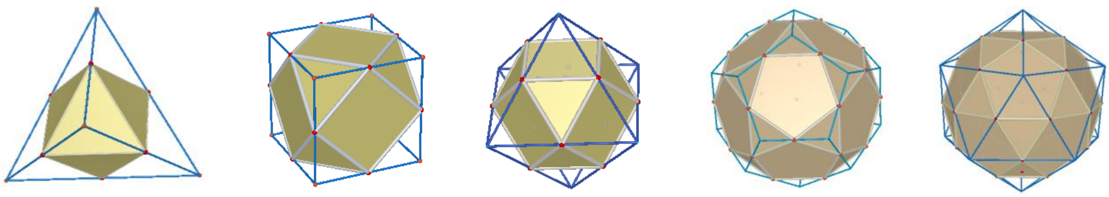
Alguno de los poliedros Arquimedianos se obtienen mediante cortes o truncamiento de los regulares. Nos vamos a ocupar únicamente de éstos últimos.

ACTIVIDAD 6.-TRUNCAMIENTO DE POLIEDROS REGULARES.

El objetico es realizar cortes en los poliedros regulares de forma que obtengamos poliedros en que todas sus caras sean polígonos regulares.

Varios tipos de truncamiento:

6.1.- Truncamiento tipo 1. Por los puntos medios de las aristas. (cortes a ½) se obtienen así únicamente 2 poliedros semirregulares. El tetraedro, da lugar por este procedimiento al octaedro y como se muestra a continuación cubo y octaedro dan lugar al mismo semirregular, el Cuboctaedro mientras que icosaedro y dodecaedro originan en denominado icosidodecaedro. Como vemos, poliedros duales originan el mismo poliedro mediante cortes a ½.

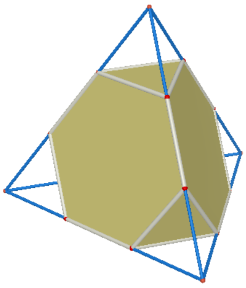
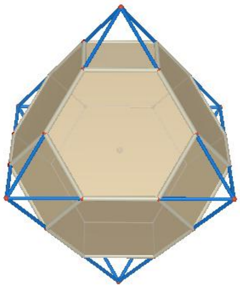
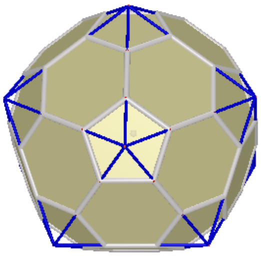


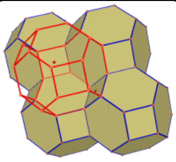
1.- Cuboctaedro

2.-Icosidodecaedro

2.- Truncamiento tipo 2. De forma que se sustituya el polígono de cada cara por otro de doble numero de lados.

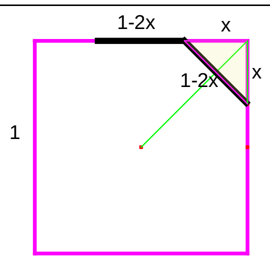
a) En los poliedros con caras triangulares, (tetraedro, octaedro e icosaedro) basta con truncar a 1/3 cada arista para que se originen poliedros semirregulares.

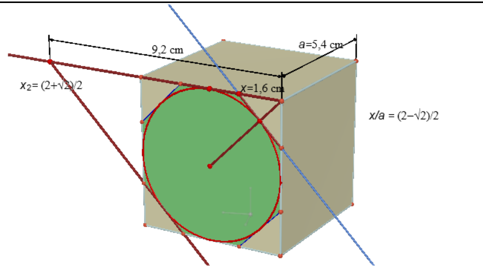
		
3.- Tetraedro truncado	4.- Octaedro truncado, solido de Kelvin	5.- Icosaedro truncado

El octaedro truncado tiene una importante propiedad, es uno de los tres poliedros que rellenan el espacio.	

b) En cubo y dodecaedro el truncamiento que origina polígonos regulares en las caras requiere de un pequeño cálculo en cada caso.

CUBO TRUNCADO.

	Solución algebraica. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo sombreado: $x^2 + x^2 = (1-2x)^2$; cuyas soluciones son $x = (2 \pm \sqrt{2})/2$. La solución interior a la arista es $x = (2-\sqrt{2})/2$



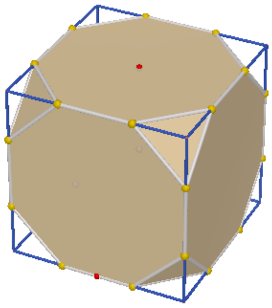
La figura muestra una construcción geométrica para que el truncamiento del cubo origine polígonos regulares (octógonos y triángulos).

Esto es, el truncamiento debe realizarse mediante planos que corten a las aristas a distancia $(2-\sqrt{2})/2 \approx 0.293$ veces la longitud de la arista.

¿Y la solución $x=(2+\sqrt{2})/2$? Como no podría ser de otra forma nos da el corte en la prolongación de la arista como se muestra en la figura de la derecha.

Podemos ahora construir el cubo truncado sin dificultad mediante cortes con la medida que se ha determinado.

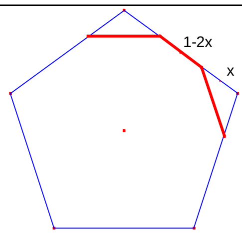
6.- Cubo truncado



DODECAEDRO TRUNCADO.

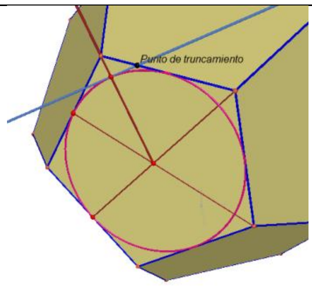
Como en el caso anterior hemos de determinar la distancia x del vértice a la que se realizan los cortes. (Es frecuente encontrar referencias en que se aproxima a 1/3 la distancia de corte, lo que obviamente no es exacto).

1.- Solución algebraica. Aplicando el teorema del coseno, $(1-2x)^2 = 2x^2 - 2x^2\cos(108\pi/180)$, cuya solución $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}28$ (solución aportada por derive), es, como era de esperar ligeramente inferior a 1/3.

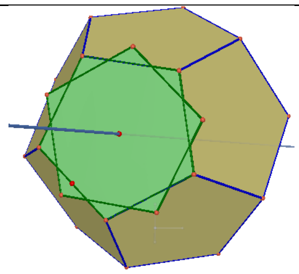
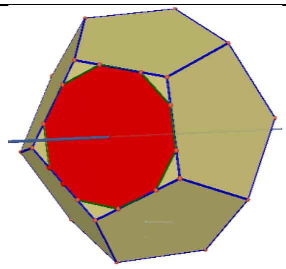
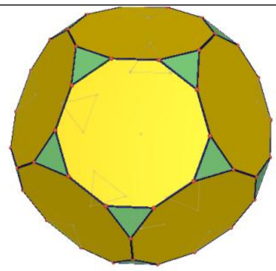


2.- La solución geométrica es trivial mediante la utilización de cualquier programa GD.

Puede realizarse directamente sobre el dodecaedro esta construcción.



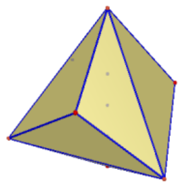
3.- Existe una solución geométrica más sencilla de aplicar con el software Cabri 3D que es válida para casi todos los truncamientos que hemos realizado hasta ahora.

		
Rotación de una cara sobre el eje perpendicular por el centro.	Decágono por centro y punto de intersección de los pentágonos construidos.	7. Dodecaedro truncado

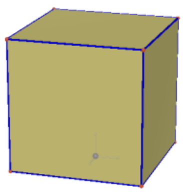
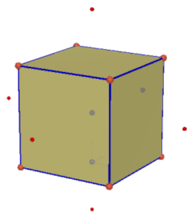
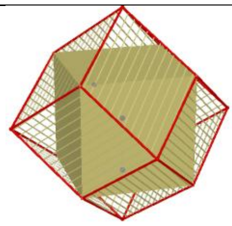
Mediante el truncamiento de los 5 poliedros regulares se han obtenido 7 poliedros semirregulares. Los restantes no pueden obtenerse por truncamientos elementales. Algunos ya se han mostrado construyéndolos por otros procedimientos.

ACTIVIDAD 7.- POLIEDROS DE CATALAN. Se definen como los duales de los poliedros semirregulares y son por tanto 14 como aquellos. Sus caras son iguales pero no regulares, tampoco los vértices son de igual orden.

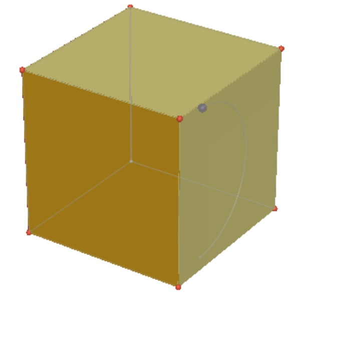
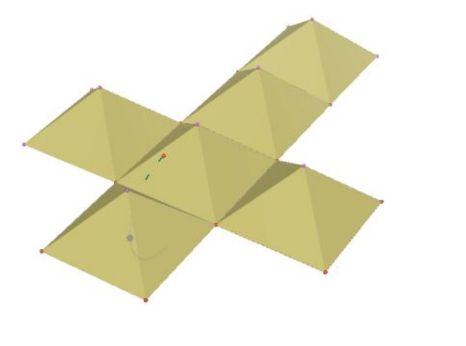
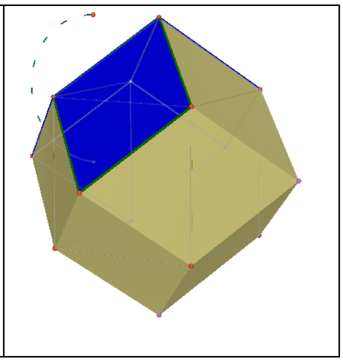
Algunos de ellos pueden además obtenerse de forma sencilla a partir de los regulares que es el objeto de estudio de este tema.

TRIAKISTETRAEDO. Es el poliedro dual de tetraedro truncado, pero puede obtenerse directamente desde el tetraedro.	

DODECAEDRO RÓMBICO. Ya obtenido anteriormente como envolvente de cubo y octaedro. Puede obtenerse también únicamente partiendo de un cubo, al menos de dos formas diferentes.

		
Se hace la el punto simétrico del centro del cubo respecto a cada una de sus caras. El poliedro que pasa por estos simétricos y los vértices del cubo es el denominado dodecaedro rómbico que tiene 12 caras rómbicas.		

Una construcción un poquito más elaborada

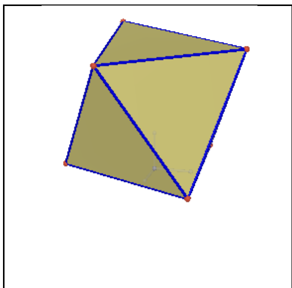
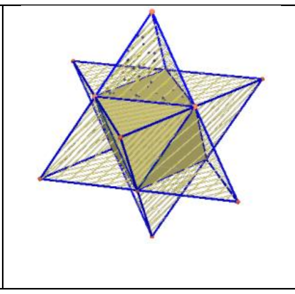




ACTIVIDAD 8.- ESTRELLAS Y POLIEDROS ESTRELLADOS.

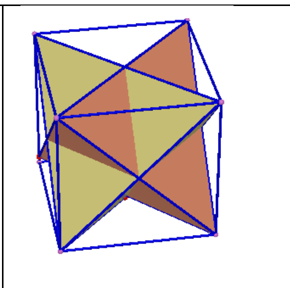
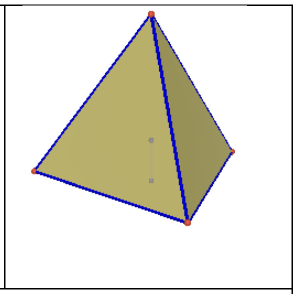
De igual forma que en el plano hablamos de polígonos estrellados y estrellas, según sea un único polígono o la unión de varios, también en el espacio podemos hacer esta distinción.

Partiendo de poliedros regulares podemos formar tanto estrellas como poliedros estrellados, además, 4 de éstos son regulares como veremos más adelante.

La estrella más sencilla de construir el la denominada estrella octángula, (poliedro estrellado del octaedro) que se obtiene prolongando las caras del octaedro o por cualquiera de las formas que presentan las siguientes imágenes.

A partir del octaedro, construyendo un tetraedro regular sobre cada una de sus caras.

Un tetraedro regular y su simétrico respecto a su centro conforman la estrella octángula.

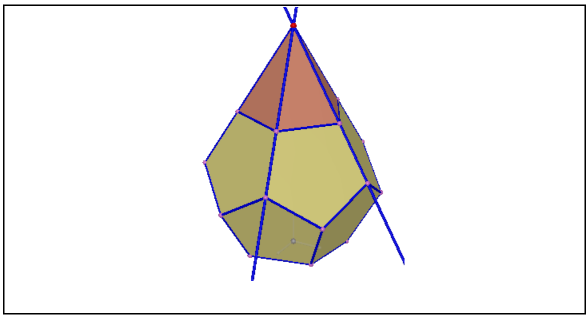
Es claro que la estrella octángula no es un poliedro sino la unión de dos poliedros.

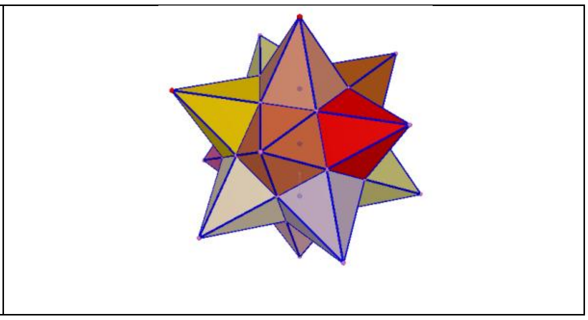
A partir de los poliedros regulares pueden obtenerse muchas estrellas poliédricas.

POLIEDROS REGULARES ESTRELLADOS. SÓLIDOS DE KEPLER –POINSOT

Existen 4 poliedros estrellados regulares:

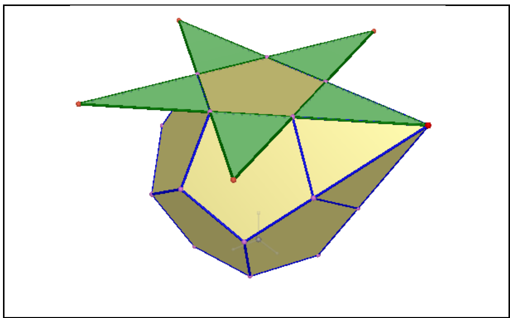
1.- Pequeño dodecaedro estrellado,{5/2,5} que se obtiene como prolongación de las caras del dodecaedro.

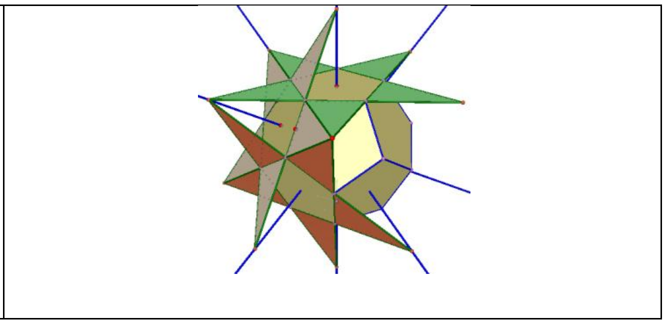




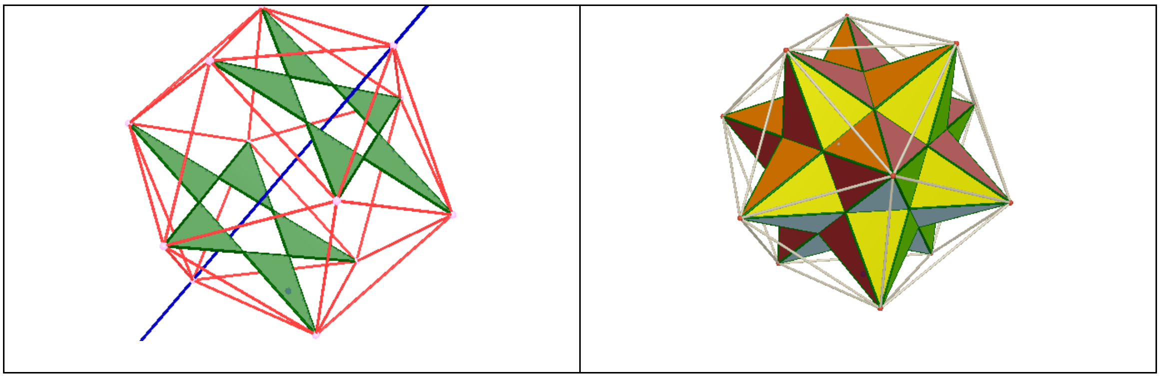
Bajo esta construcción, no es diferente a otras estrellas, que no son poliedros regulares.

¿Por qué pequeño dodecaedro estrellado? Si se construye un pentagrama (polígono regular estrellado 5/2) sobre cada cara del dodecaedro, se llega también al pequeño dodecaedro estrellado donde se pone de manifiesto que está formado por 12 caras (dodecaedro) cada una de ellas un polígono estrellado, el pentagrama.

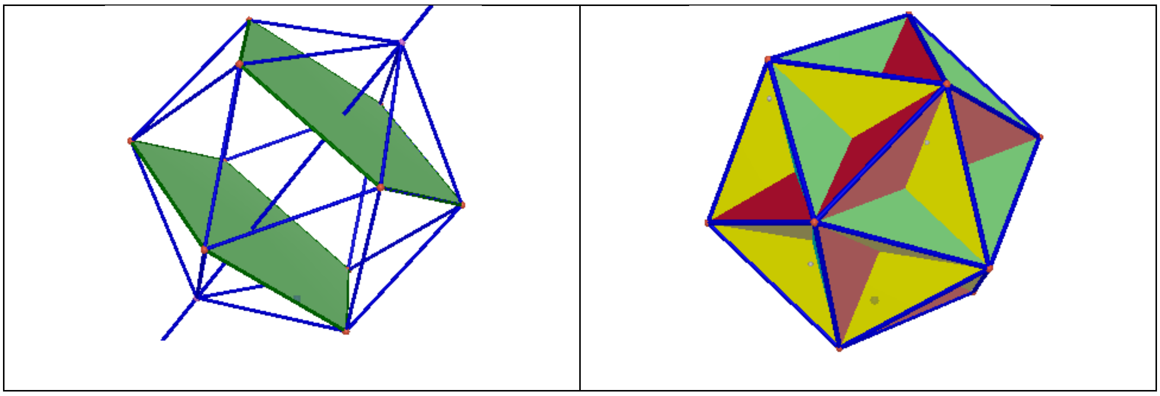




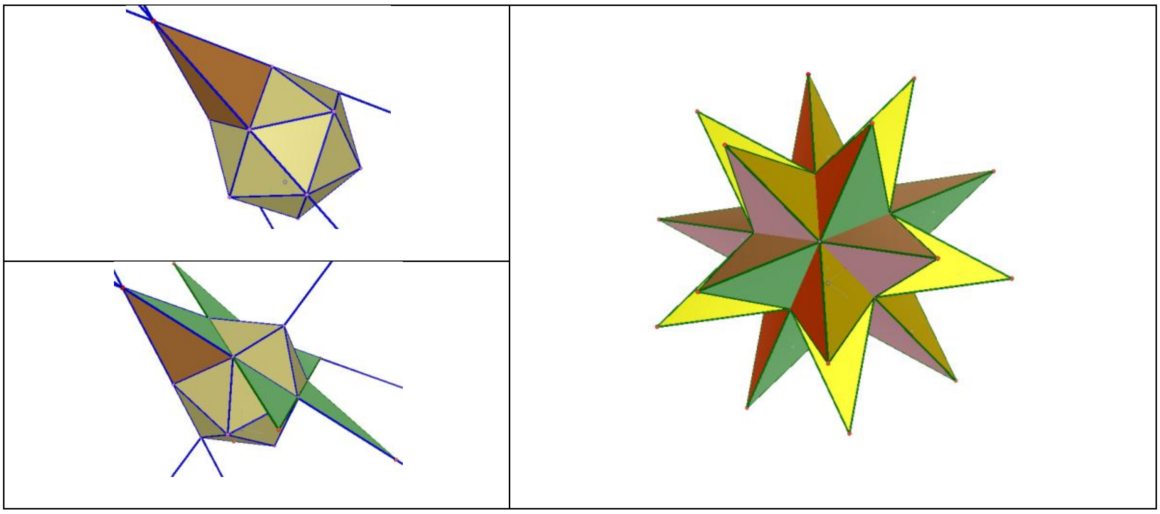
Existen otras formas de construir el pequeño dodecaedro estrellado partiendo de los poliedros regulares convexos, con el software aquí utilizado es muy sencilla la construcción partiendo del icosaedro, quedando en este caso el estrellado inscrito en él.



2.- El gran dodecaedro, dual del anterior. {5,5/2}. La construcción más sencilla es sustituir cada pentagrama por un pentágono en la construcción anterior.

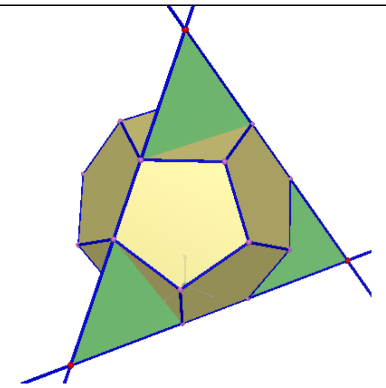


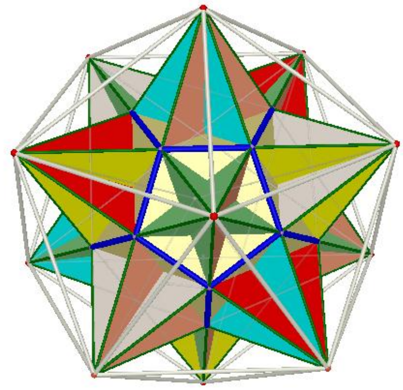
3.- *Gran dodecaedro estrellado*.{5/2,3} Como en los anteriores existen varias formas de construirlo, una de ellas es prolongar las caras del icosaedro, o bien mediante pentagramas como muestra la segunda imagen.



Formado por doce pentagramas, en este caso en cada vértice concurren 3.

4.- Gran icosaedro. {3,5/2} Dual del anterior, formado por veinte triángulos equiláteros. Puede construirse a partir del dodecaedro como se muestra en las siguientes imágenes.





El estudio de los poliedros regulares y las familias poliédricas que de éstos se derivan y sus múltiples conexiones no acaba aquí, más bien comienza, te invitamos a sumergirte en este maravilloso mundo, descubrirás su belleza, una cara más de la belleza de las matemáticas.

Bibliografía.

- GUILLEN SOLER, G. Poliedros. Matemáticas, cultura y aprendizaje. Ed Síntexis. Madrid, 1977
- GONZALEZ URBANEJA, P.M. Los Sólidos Pitagórico-Platónicos. La dimensión cultural de la Matemática. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Badajoz, 2008.
- PACIOLI Luca, La Divina Proporción. Ed Akal. Madrid, 1991

Referencias en Internet

- Wikipedia. http://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro
-
- Proyecto Estalmat, Madrid. Unidad Poliedro.

  http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/Indice.htm
- http://jmora7.com/miWeb2/home2.htm Construcción del Omnipoliedro.
- http://sylvester.math.nthu.edu.tw página muy complete de geometría tridimensional con construcciones Cabri 3D