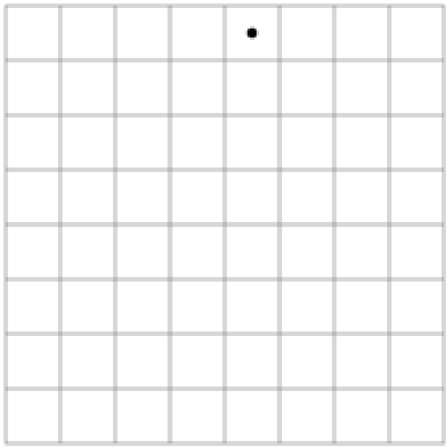
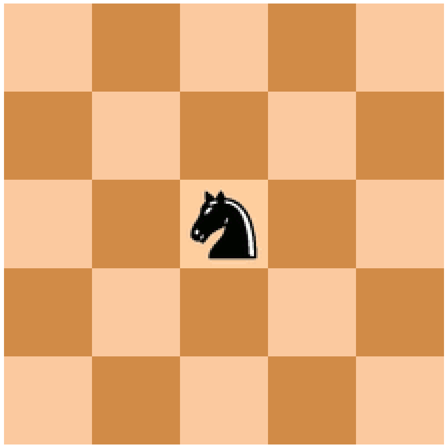
El Salto del caballo

Estalmat Canarias

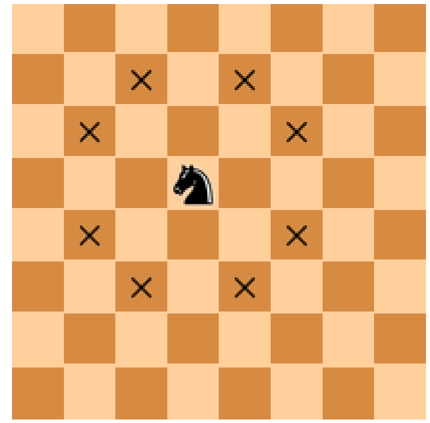




El salto del caballo

En el ajedrez

El caballo es una pieza del juego del ajedrez distinta a las otras piezas en su forma de moverse. Es la única pieza que puede saltar por encima de las demás, describiendo una trayectoria en forma de L. Es decir, se desplaza dos casillas en dirección horizontal o vertical y una en dirección perpendicular a la anterior.

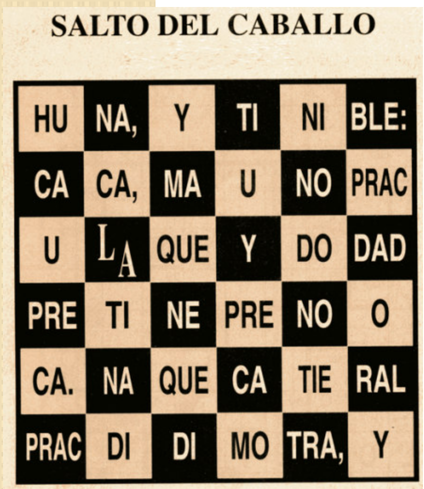


Se mueve de casilla blanca a casilla negra y de negra a blanca

HU	NA,	Y	TI	NI	BLE:
CA	CA,	MA	U	NO	PRAC
U	LA	QUE	Y	DO	DAD
PRE	TI	NE	PRE	NO	O
CA.	NA	QUE	CA	TIE	RAL
PRAC	DI	DI	MO	TRA,	Y

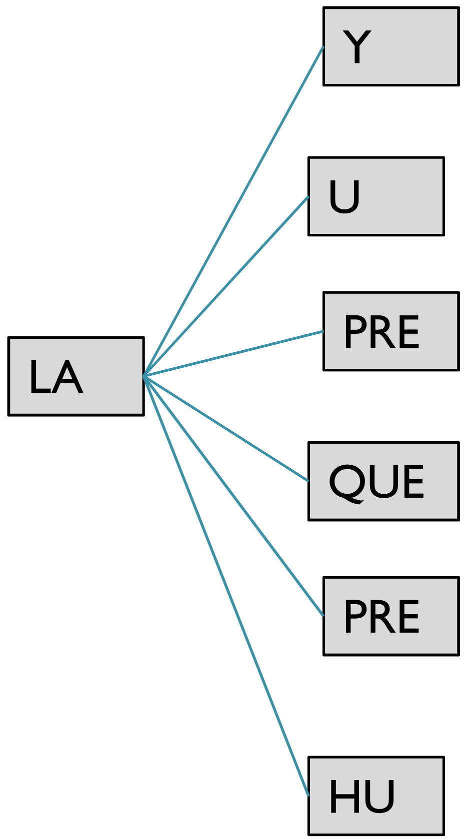
"Al moverse el caballo cambia de color"

El hilo de Ariadna



SALTO DEL CABALLO

HU	NA,	Y	TI	NI	BLE:
CA	CA,	MA	U	NO	PRAC
U	LA	QUE	Y	DO	DAD
PRE	TI	NE	PRE	NO	O
CA.	NA	QUE	CA	TIE	RAL
PRAC	DI	DI	MO	TRA,	Y



zo	co	co	cir	.
in	cun	en	el	fin
mi	y	ren	den	la
fe	ci	**En**	el	cia,

	fi	me	an	do
ro	ro	**To**	ni	
in		es	nú	te
ce		el		**to.**

"Recreaciones matemáticas 4" de Édouard Lucas
"Infinitum. Citas matemáticas" de *Juan Guirado*

El juego

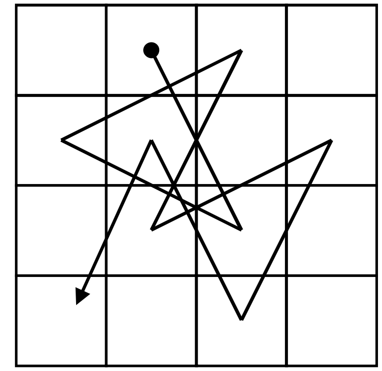
Un **<u>recorrido</u>** del caballo es una secuencia de saltos, sin repetir casillas, desde una casilla inicial hasta otra final, desde la cual no se puede avanzar, sin pasar por una casilla ya visitada. Llamamos **<u>tamaño</u>** al número de casillas que visita y **<u>longitud</u>** al número de saltos que da. En el ejemplo de la derecha tenemos un **recorrido** de **tamaño 9 y longitud 8**.

El juego es para dos personas. Empieza un jugador colocando el 1 en una casilla, le sigue el otro colocando un 2 en **una nueva casilla** que se obtiene desde la 1 por **salto del caballo**. Así sucesivamente hasta que un jugador no pueda seguir jugando, sería el que **pierde**.

Brian Bolt lo menciona de soslayo en su libro "**Divertimentos matemáticos**" para un tablero 5x5.

http://www.mathsisfun.com/games/knights-move-game.html

	1	4	
3	8		6
	5	2	
9		7	



<u>Preguntas</u>

¿Existe una estrategia ganadora?

¿Hay recorridos de todos los tamaños posibles?

¿Qué es una estrategia ganadora? Juego del Quitpal, Nim, ..

Juego de Quitpal

Participan dos personas y se juega con 15 fichas. Alternativamente, cada persona coge 1, 2 o 3 fichas, a su elección, perdiendo quien toma la última ficha.
Quien tiene el primer turno, gana sin más que coger 2 fichas y, después, cada vez que su rival tome *k fichas, coger 4 - k.*

Recorridos

Camino simple

1	4		
			3
	2		

Recorrido cerrado

	1	4	
3	8		6
	5	2	
9		7	

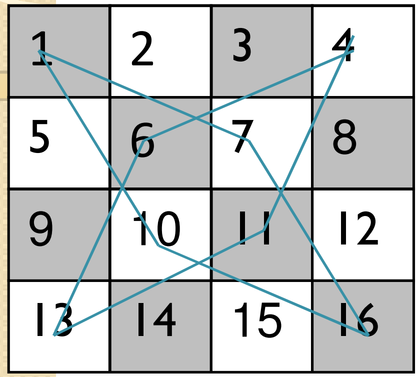
Recorrido completo

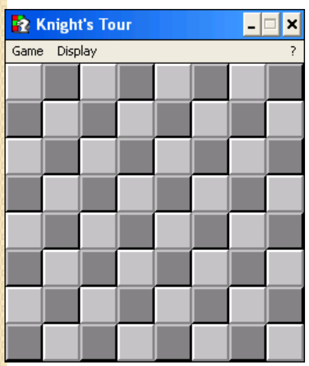
1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12

Recorrido completo con "vuelta atrás"

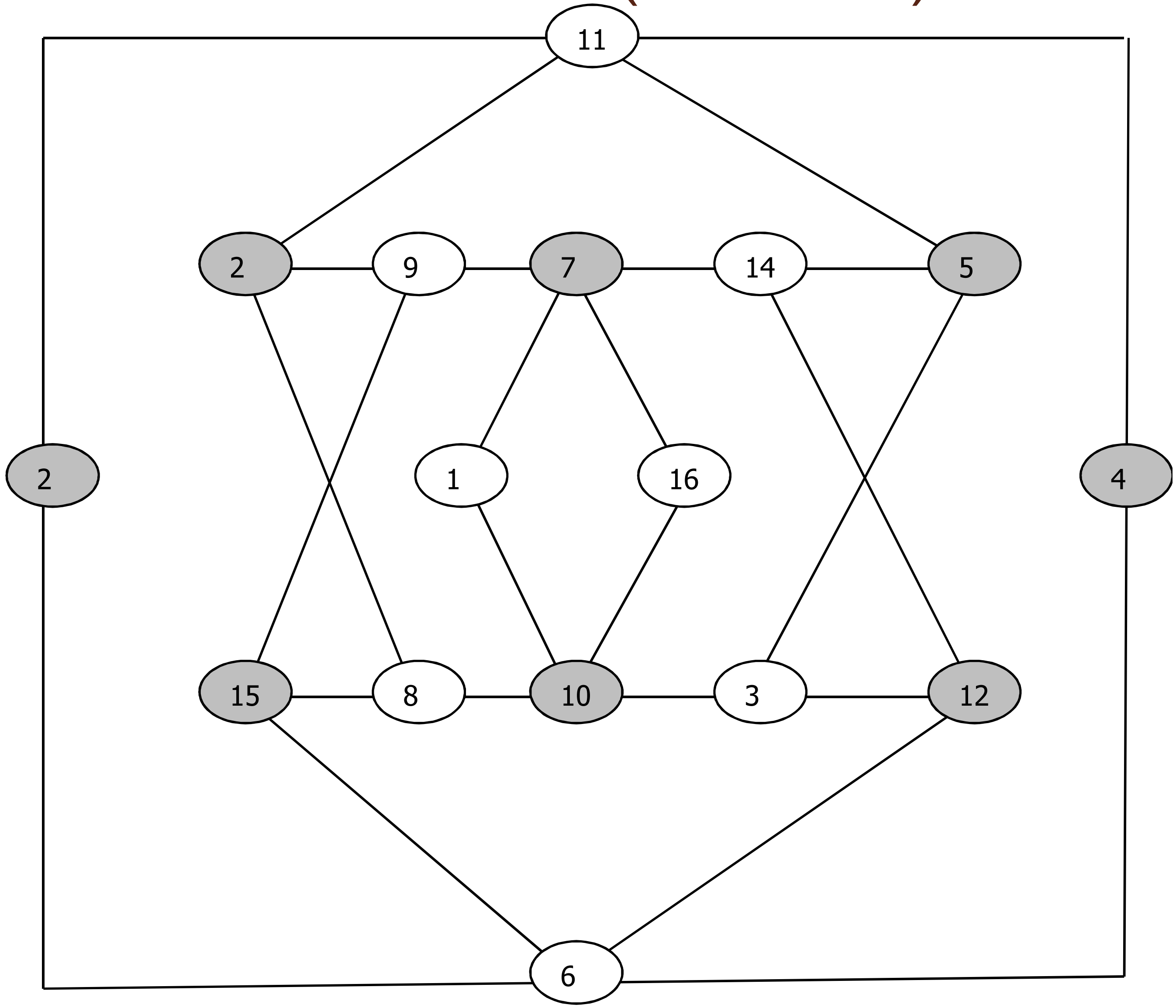
1	32	9	22	7	30
10	23	36	31	16	21
33	2	17	8	29	6
24	11	26	35	20	15
3	34	13	18	5	28
12	25	4	27	14	19

Estrategia ganadora:
-evitar las casillas del centro (6,7,10,11)



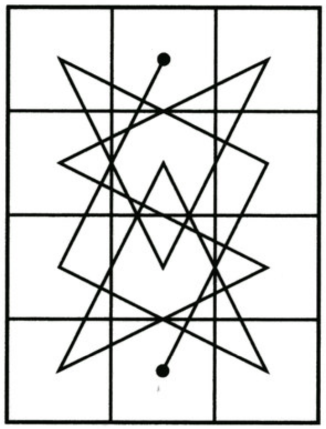


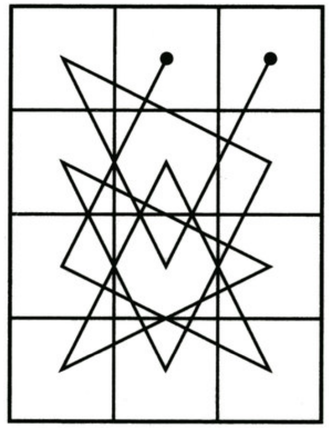
Siguiendo la estrategia pierde el que juega 1°

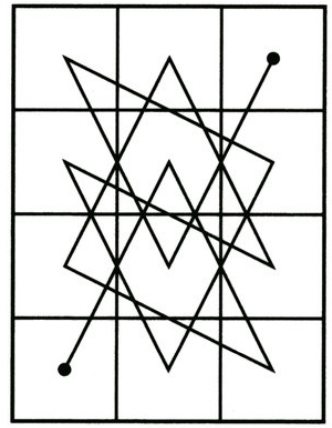


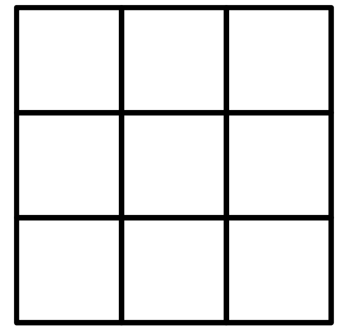
Tableros básicos

Buscar recorridos completos

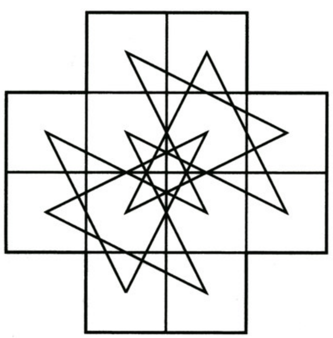


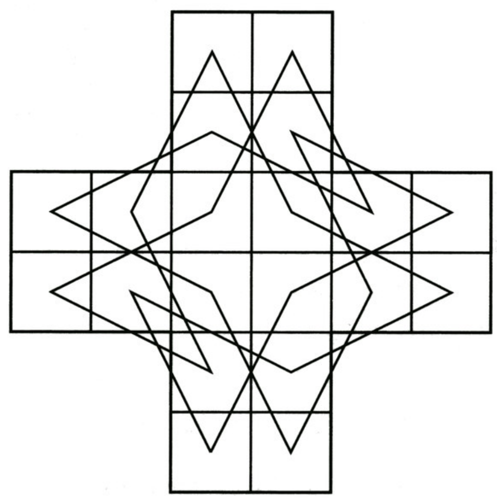


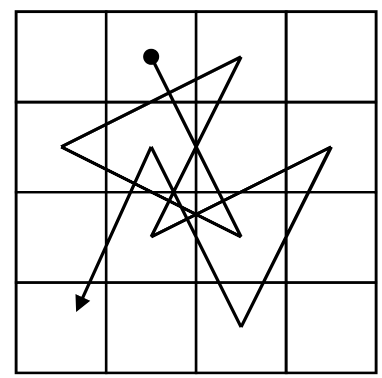




Buscar recorridos completos con “vuelta a casa”







El programa: **Applet: Salto del Caballo**

Número de filas: 6 Número de columnas: 6

Fila inicial: 0 Columna inicial: 0

Tamaño del recorrido (0=todos): 36

Mensaje: Nº solución/Recorridos analizados:8 de 264744

	0	1	2	3	4	5
0	1	10	27	6	13	4
1	28	7	12	3	26	23
2	11	2	9	24	5	14
3	8	29	18	33	22	25
4	17	36	31	20	15	34
5	30	19	16	35	32	21

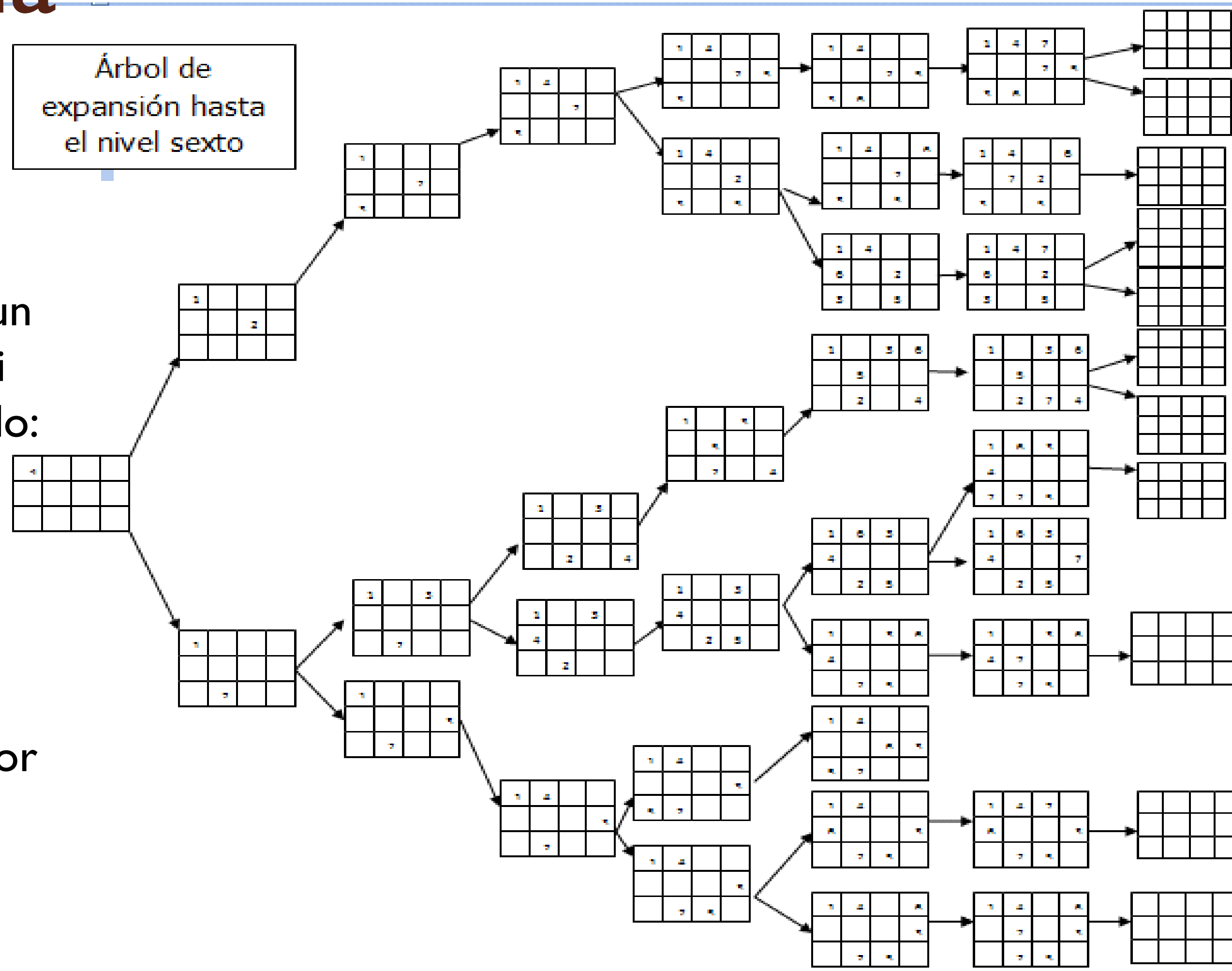
¿Cuántos saltos?
¿Cuántos recorridos?
¿Cuántos recorridos de un tamaño dado?
¿Obtener recorridos de un tamaño concreto?

Borrar | Buscar primera | Buscar Siguiente | Contar.............

El programa

- Analiza todos los recorridos → fuerza bruta, es sistemático
-Busca en profundidad un recorrido, comprueba si cumple el tamaño pedido:
  -Si cumple con el tamaño pedido lo muestra
  -Si no cumple, realiza una vuelta atrás para seguir por otra rama

Árbol de expansión hasta el nivel sexto



Problema: el número de recorridos crece exponencialmente
Un tablero de 6x6 tiene más de 1000 millones de recorridos
Otra estrategia: trabajar con **módulos** menores y enlazarlos entre sí.

Contar saltos y recorridos

- ¿Cuántos recorridos hay?
- ¿Cuántos saltos hay?
- ¿Simetría?

760	668		
	562		

Recorridos para una tablero 4x4

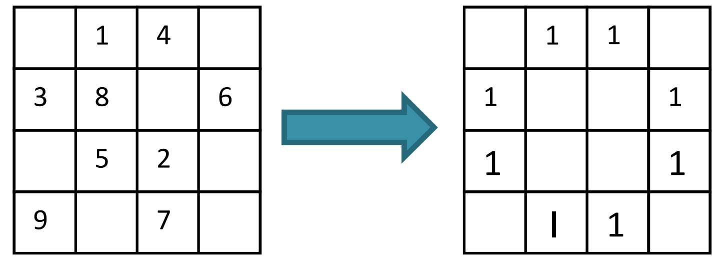
Tamaño	Desde (0,0)	Desde(0,1)	Desde (1,1)	
De 4 casillas	0	0	2	
De 5 casillas	0	2	0	
De 6 casillas	0	4	8	
De 7 casillas	8	8	8	
De 8 casillas	16	18	12	
De 9 casillas	16	20	44	
De 10 casillas	72	72	92	
De 11 casillas	104	78	108	
De 12 casillas	168	198	152	
De 13 casillas	184	148	88	
De 14 casillas	144	104	48	
De 15 casillas	48	16	0	
De 16 casillas	0	0	0	
Totales	760	668	562	
				Totales:
De tamaño par	400	396	314	1110
De tamaño impar	360	272	248	880

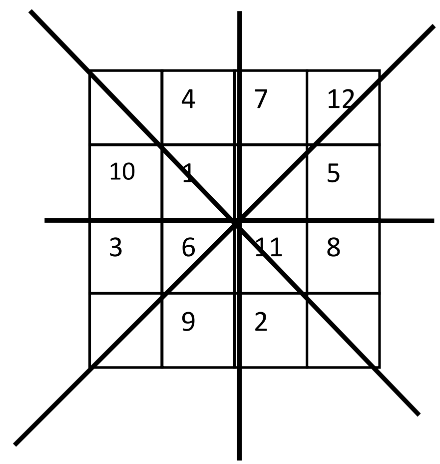
Tablero 4x4

0,0	0,1	0,2	0,3
1,0	1,1	1,2	1,3
2,0	2,1	2,2	2,3
3,0	3,1	3,2	3,3

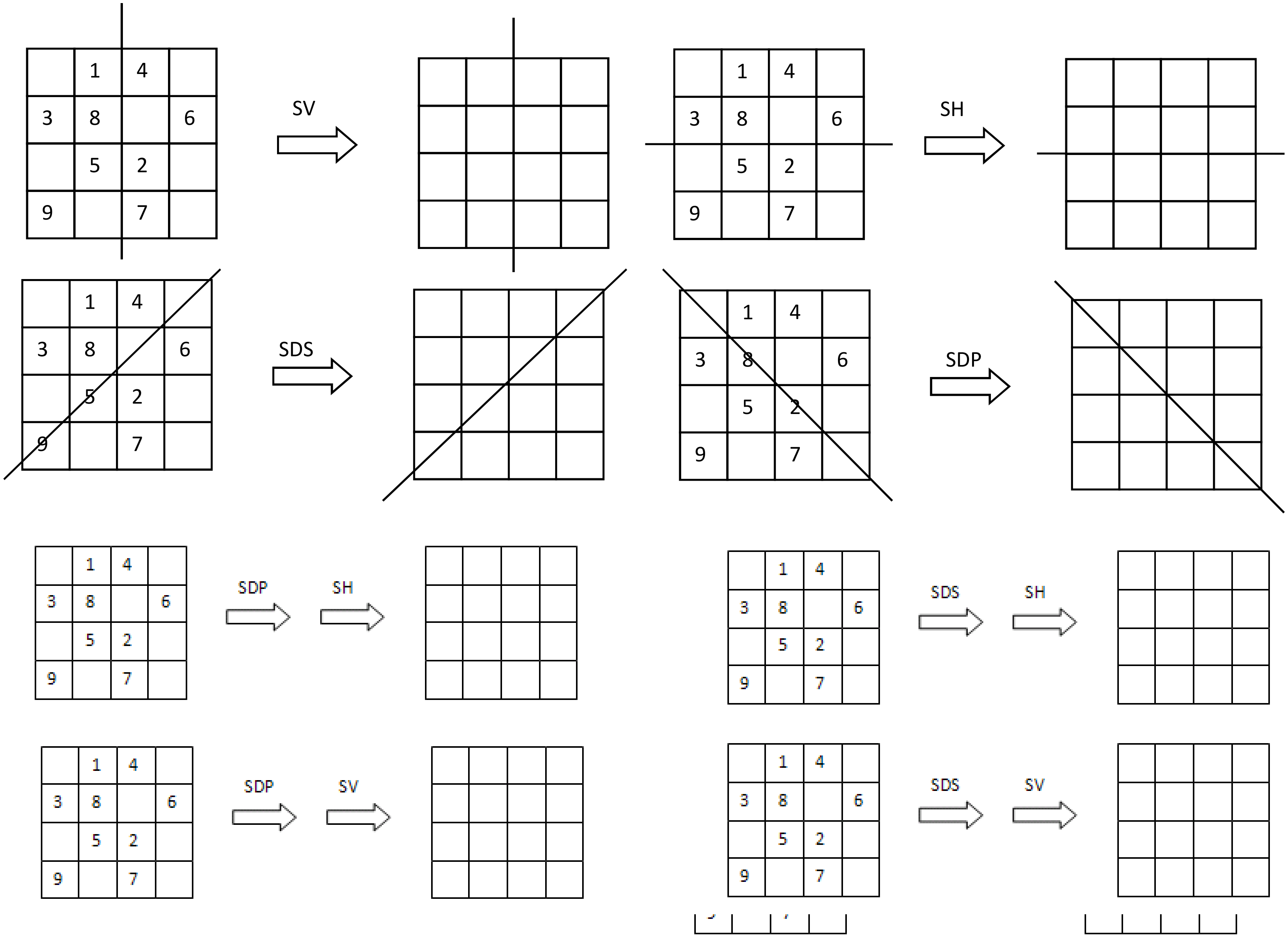
Simetrías y rotaciones

- La geometría nos ayuda a contar recorridos
  - Dado un recorrido, ¿cuántos recorridos distintos se pueden obtener por simetría o rotación?
    - Caso 1: tablero cuadrado.
      - Simetría horizontal, vertical, diagonal principal, diagonal secundaria
      - Rotaciones de 90°, 180° y 270°
    - Caso 2: tablero rectangular.
      - Simetría vertical, horizontal, rotación de 180°





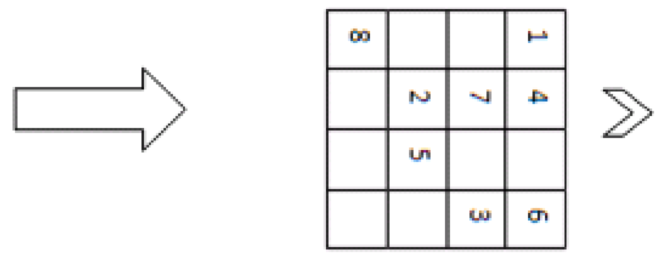
Obtener otros recorridos por simetría



Obtener otros recorridos por rotación

Rotación de 90º (R90)

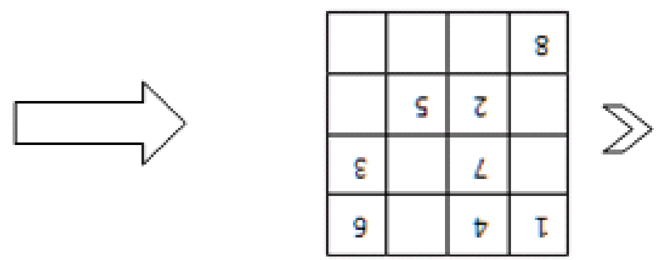
1	4		6
	7		3
	2	5	
8			



8			1
	2	7	4
	5		
		3	6

Rotación de 180º (R180)

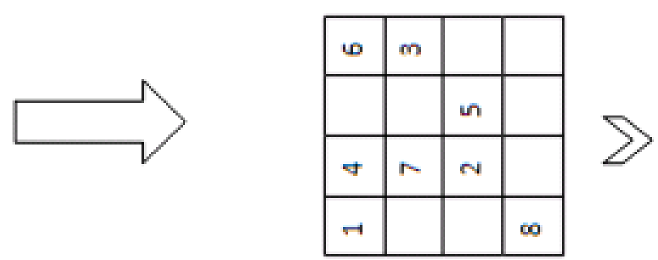
1	4		6
	7		3
	2	5	
8			



			8
	5	2	
3		7	
6		4	1

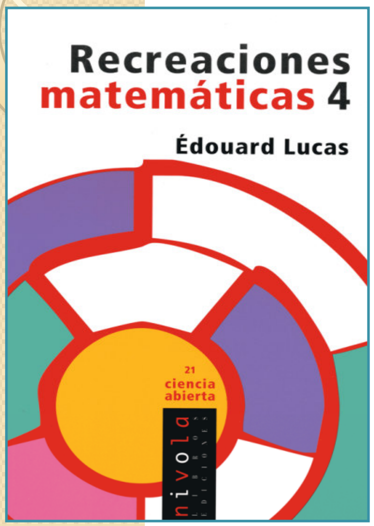
Rotación de 270º (R270)

1	4		6
	7		3
	2	5	
8			



6	3		
		5	
4	7	2	
1			8

Contar saltos



En un tablero, **¿cuántos saltos de caballo hay?**

Dos casillas son **conjugadas**, o pegadas una a la otra, cuando el caballo pueda pasar mediante un único salto de la una a la otra.

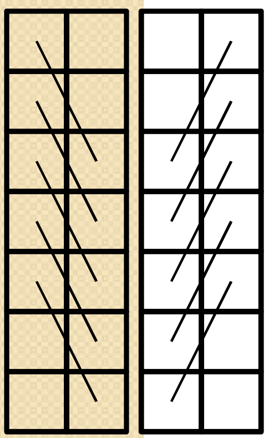
Calcular el número de saltos de caballo de ajedrez en un tablero rectangular formado por p filas y q columnas:

$$(2p-3)(2q-3)-1$$

El doble si contemplamos los dos sentidos

2	3	3	2
[illegible]	[illegible]	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	8	6	4
3	4	6	6	4	3
2	3	4	4	3	2



Entre dos columnas contiguas

-De izquierda a derecha:

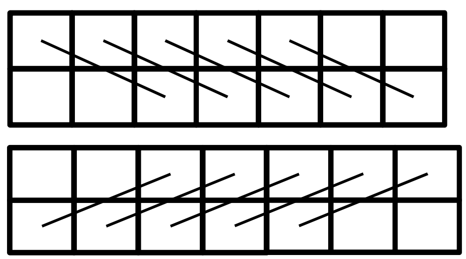
Hacia abajo:(p-2)

Hacia arriba:(p-2)

-Total: 2(p-2)

-Como hay (q-1)parejas de columnas contiguas

2(p-2)(q-1)



Entre dos filas contiguas

-De arriba hacia abajo:

Hacia la derecha:(q-2)

Hacia la izquierda:(q-2)

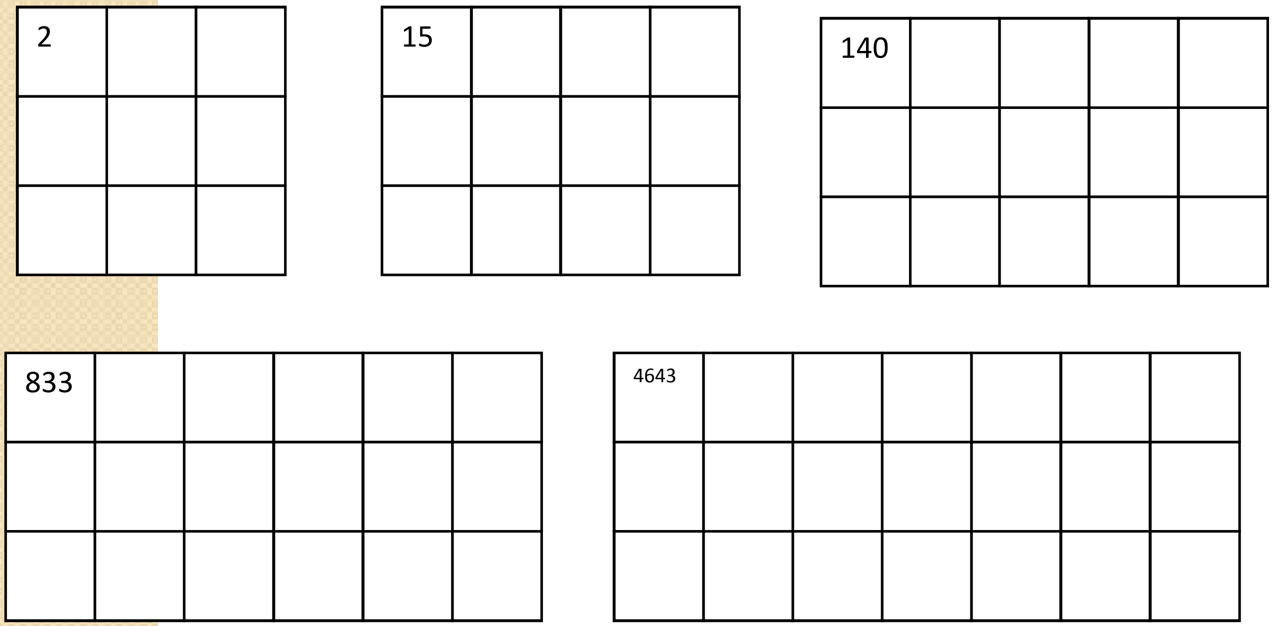
-Total: 2(q-2)

-Como hay (p-1)parejas de filas contiguas

-2(p-2)(q-1)

Contar recorridos

¿Cómo se incrementa el número de saltos al aumentar las dimensiones?



	A	B	C
1	Nº de recorridos desde la celda (0,0)		
2	Tablero	Nº recorridos	Razón
3	De 3x3	2	
4	De 3x4	15	7,50
5	De 3x5	140	9,33
6	De 3x6	833	5,95
7	De 3x7	4643	5,57
8	De 3x8	27824	5,99
9	De 3x9	165155	5,94
10	De 3x10	968532	5,86
11	De 3x11	5611265	5,79
12			
13			
14			

	A	B	C
1	Nº de recorridos desde la celda (0,1)		
2	Tablero	Nº recorridos	Razón
3	De 3x3	2	
4	De 3x4	12	6,00
5	De 3x5	128	10,67
6	De 3x6	700	5,47
7	De 3x7	3982	5,69
8	De 3x8	23886	6,00
9	De 3x9	140354	5,88
10	De 3x10	819862	5,84
11	De 3x11	4740822	5,78
12			
13			
14			

Datos sobre número de recorridos parciales y completos:
http://www.tri.org.au/knightframe.html

Contar recorridos

	A	B	C
1	Número de recorridos para tableros 3xn		
2	saliendo de la casilla (0,0)		
3		Nº recorridos	Razón
4	tablero 3x3	2	
5	tablero 3x4	15	7,50
6	tablero 3x5	140	9,33
7	tablero 3x6	833	5,95
8	tablero 3x7	4.643	5,57
9	tablero 3x8	27.824	5,99
10	tablero 3x9	165.155	5,94
11	tablero 3x10	968.532	5,86
12	tablero 3x11	5.611.265	5,79
13	..	..	..
14			

	A	B	C
1	Número de recorridos para tableros 4xn		
2	saliendo desde la casilla (0,0)		
3		Nº recorridos	Razón
4	tablero 4x3	15	
5	tablero 4x4	760	50,67
6	tablero 4x5	12.856	16,92
7	tablero 4x6	234.481	18,24
8	tablero 4x7	4.767.809	20,33
9	tablero 4x8	94.453.126	19,81
10	..		
11			

	A	B	C
1	Número de recorridos para tableros 5xn		
2	saliendo desde la casilla (0,0)		
3		Nº recorridos	Razón
4	tablero 5x3	140	
5	tablero 5x4	12.856	91,83
6	tablero 5x5	625.308	48,64
7	tablero 5x6	35.798.626	57,25
8	tablero 5x7	2.240.456.924	62,58
9			
10	..		

Recorridos

760	668		
	562		

Utilizando un programa de fuerza bruta que analiza todos los recorridos posibles, hemos obtenido:
-Si partimos de la casilla (0,0)→ 760 recorridos
-Si partimos de la casilla (0,1)→ 668 "
-Y si partimos de (1,1)→562

¿Se podría averiguar cuántos recorridos hay para todo el tablero?

Partiendo de un recorrido como los de los ejemplos de la derecha ¿qué otros recorridos se pueden obtener por simetría o rotación?

1	4		6
	7		3
	2	5	
8			

	1	4	
3	8		6
	5	2	
9		7	

En 1995 Martin Löbbing e Ingo Wegener proclamaron que el número total de **recorridos del caballo completos** en un tablero 8x8 era 33.439.123.484.294. Obtuvieron ese resultado tras hacer trabajar a 20 estaciones de trabajo Sun durante 4 meses. En 1997 Brendan McKay usó otro método (dividiendo el tablero en dos mitades) y obtuvo como resultado 13.267.364.410.532.

El programa: recorridos 8x8

Recorridos para un tablero 4x8

94453126	89817510	73496915	76391894	76391894	73496915	89817510	94453126
88336320	75080733	46295469	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
88336320	75080733	46295469	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
94453126	89817510	73496915	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

¿Sabes contar hasta un millón?¿Has contado hasta un millón?¿Cuánto tiempo tardaríamos?
1000000 segundos=16666,66 minutos = 277,77 horas= 11,57 días
unos 12 días sin parar

94453126	89817510	73496915	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
88336320	75080733	46295469	47067619	47067619	46295469	75080733	88336320
88336320	75080733	46295469	47067619	47067619	46295469	75080733	88336320
94453126	89817510	73496915	76391894	76391894	73496915	89817510	94453126

N° de recorridos >>100 millones x 100 millones =10.000 billones

Si 1 millón de recorridos tarda un ordenador en analizarlos 1 segundo
1 billón tardaría unos 12 días y 10.000 billones 120.000 días (unos 330 años)

El programa: soluciones 8x8

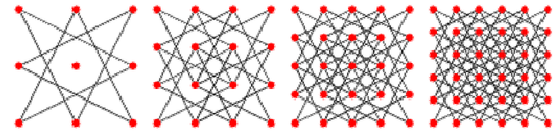
En 1995 Martin Löbbing e Ingo Wegener proclamaron que el número total de recorridos del caballo (soluciones) era 33.439.123.484.294. Obtuvieron ese resultado tras hacer trabajar a 20 estaciones de trabajo Sun durante 4 meses.

En 1997 Brendan McKay usó otro método (dividiendo el tablero en dos mitades) y obtuvo como resultado 13.267.364.410.532. Para darle una idea de la magnitud de dichas cifras, un ordenador investigando los recorridos a la velocidad de un millón de recorridos por minuto necesitaría más de 25 años para calcular el número de recorridos dado por McKay

7630	2740	2066	3108	3108	2066	2740	7630
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
7630	2740	2066	3108	3108	2066	2740	7630

7630	2740	2066	3108	3108	2066	2740	7630
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
7630	2740	2066	3108	3108	2066	2740	7630

Problemas de grafos



Algunos problemas se resuelven más fácilmente dibujando el grafo asociado

Guarini 1512

n		n
m		m

Martin Gardner
¡Aja! Inspiración

n	n	n
m	m	m

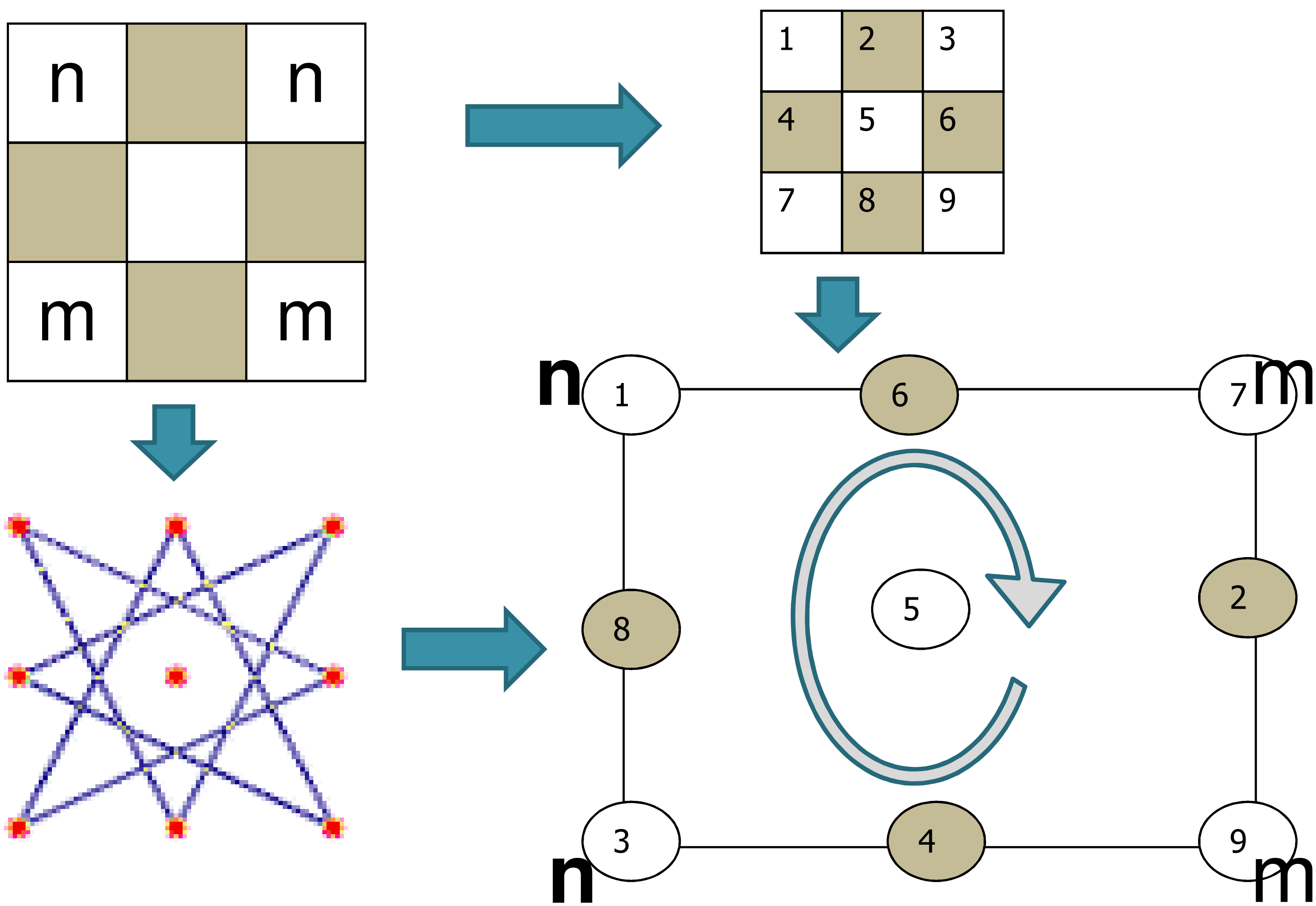
Bernardo Recamán. Las nueve cifras, el cambiante cero

N			
			M
N	M		

Buscar un camino con suma 18.
Clifford A. Pickover
Las matemáticas de Oz

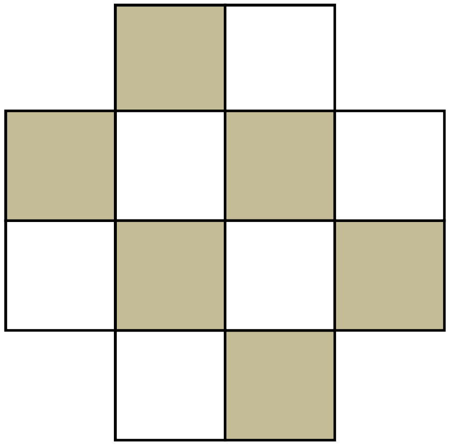
2	3	3	2	1	4
1	2	3	7	2	3
3	2	1	1	3	7
1	1	3	2	3	4
2	2	4	3	4	2
7	4	**n**	2	1	4

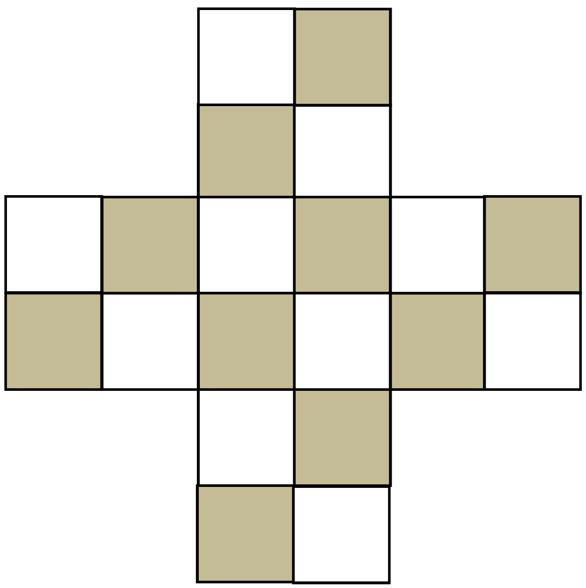
El problema de Guarini (1512)



Buscar un recorrido completo

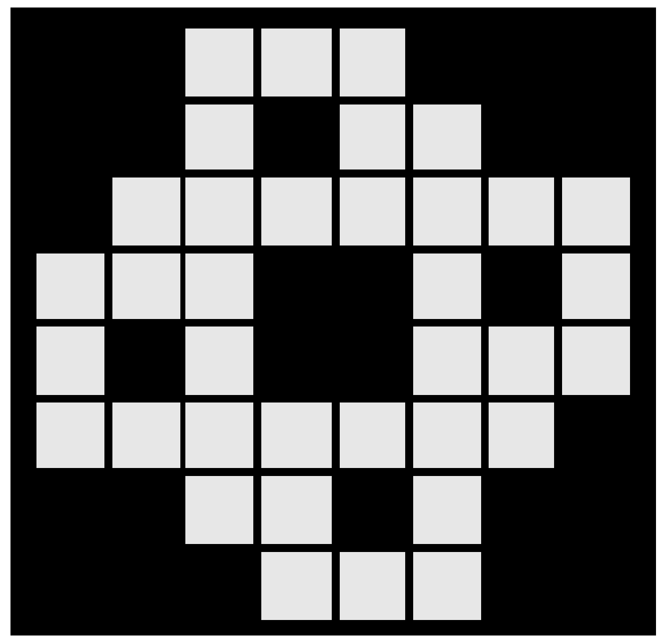
Cruz de Euler





Tablero 3x4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

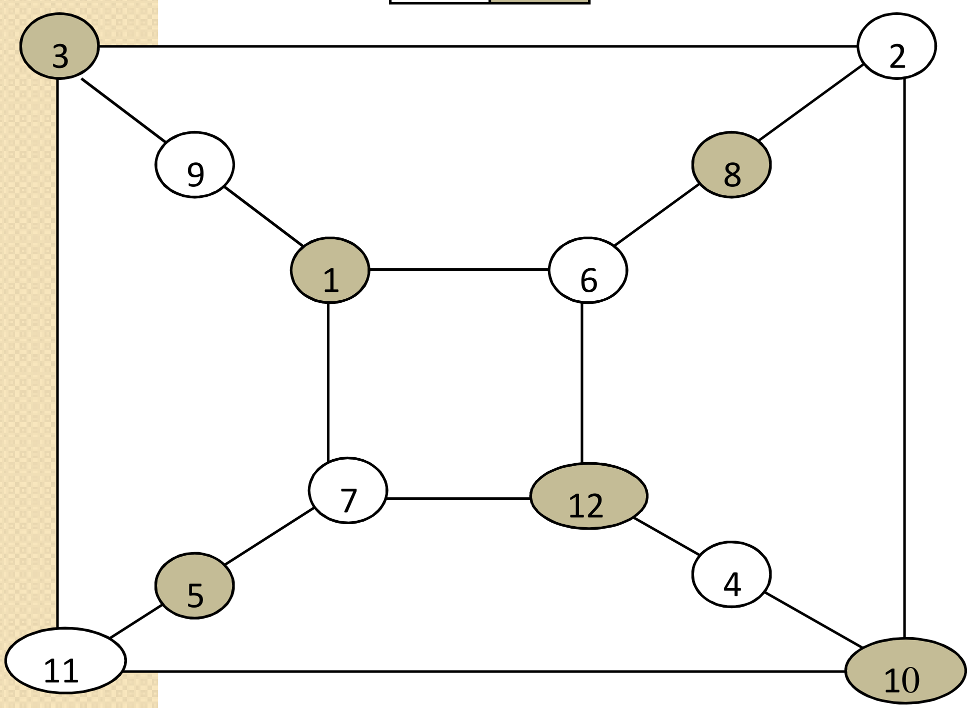


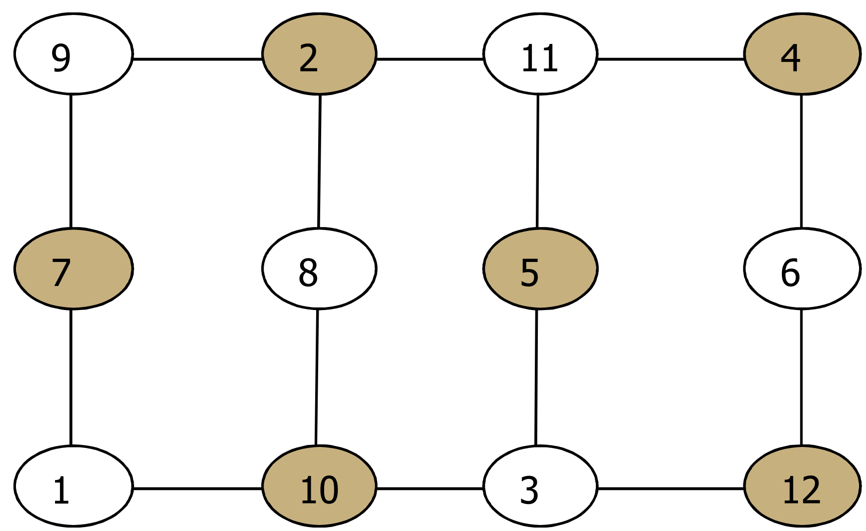
Representar los grafos

Buscar un camino Hamiltoniano

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

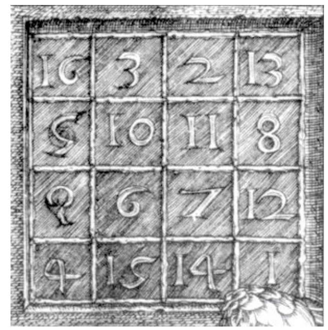
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12





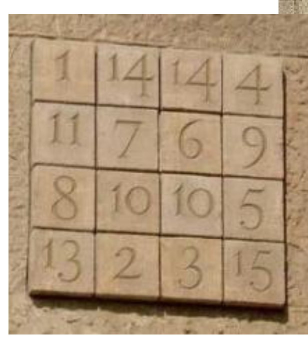
Cuadrados mágicos

Alberto Durero (1471-1528), pintor y geómetra realizó un cuadrado de números (4x4), que plasmó en la pintura Melancolía en el año 1514. Curiosamente coincide con los números reseñados en el cuadrado mágico.
¿Se trata de un cuadrado mágico?¿Qué otra magia tiene el cuadrado?



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

La Fachada de la Pasión del Templo Expiatorio de **la Sagrada Familia** en Barcelona, diseñada por el escultor Josep María Subirachs, muestra un cuadrado de orden 4.
¿Es un cuadrado mágico?



En busca de cuadrados semi-mágicos

<u>En un tablero 5x5</u>

Siguiendo el salto del caballo podemos intentar construir un cuadrado mágico en un tablero 5x5.

¿Cuánto debe sumar cada fila y columna?

S=1+2+3+…+25

¿Dónde estarían los números pares y los impares?

¿Existirá un cuadrado mágico así construido?

¿Qué otros tableros no tienen cuadrados mágicos?

1		1		1
	1		1	
1		1		1
	1		1	
1		1		1

El cuadrado semimágico de Euler

Euler fue capaz de obtener una solución para el recorrido con el caballo del tablero de ajedrez que era un cuadrado mágico, es decir la suma de las filas y columnas siempre es la misma (no las diagonales).

¿Cuánto tiene que sumar cada fila y cada columna?
¿Sabrías completar el cuadrado mágico de Euler?

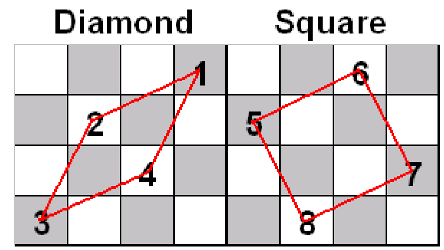
1	48		50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34		64
52	29	4		20	61	36	13
	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24		12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42		58	23	38	11

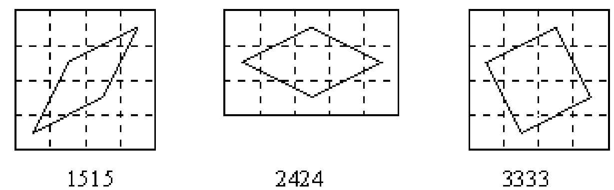
<u>La suma de Gauss</u>

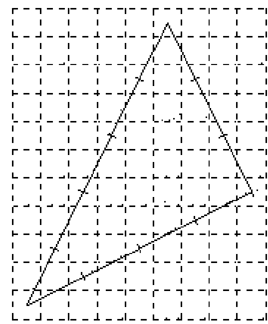
Sabrías calcular la sumas:
A=1+2+3+..+64

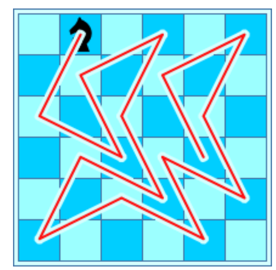
Líneas poligonales

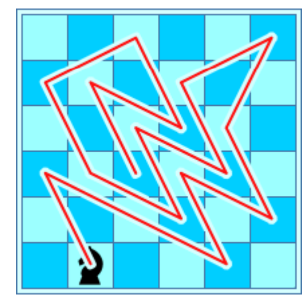
- **Polígono**
  - Polígono simple
    - Polígono convexo
      - Polígono regular
      - Polígono irregular
    - Polígono cóncavo
  - Polígono complejo

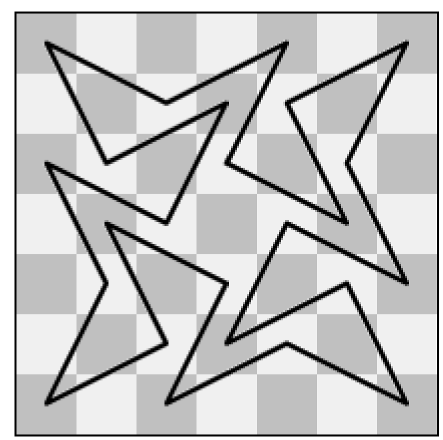




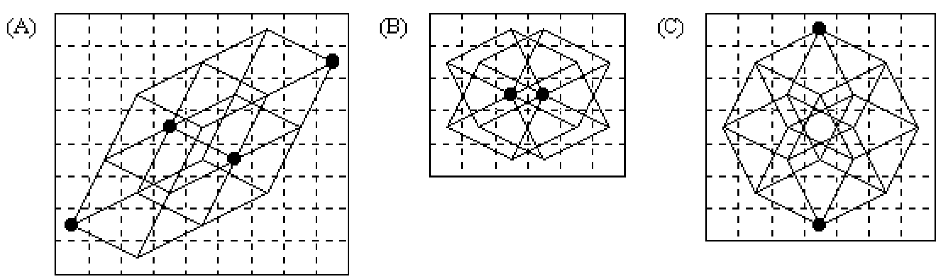


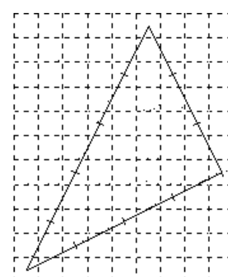






En un tablero 6x6,..
-¿Qué polígonos se pueden construir?
-¿Cuál es la poligonal de mayor número de lados sin que sus lados se crucen?
-http://www.ktn.freeuk.com/2b.htm



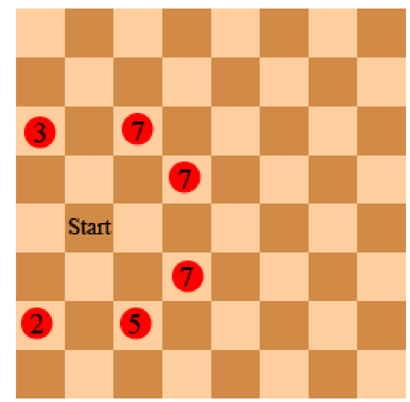


El problema central

"Un día, dice **Euler**, me encontraba en una reunión en la que, con ocasión del juego de ajedrez, alguien propuso la cuestión de recorrer con un caballo todas las casillas de un tablero sin pasar dos veces por la misma"

1	48	31	50	33	16	63	18	8
30	51	46	3	62	19	14	35	7
47	2	49	32	15	34	17	64	6
52	29	4	45	20	61	36	13	5
5	44	25	56	9	40	21	60	4
28	53	8	41	24	57	12	37	3
43	6	55	26	39	10	59	22	2
54	27	42	7	58	23	38	11	1
a	b	c	d	e	f	g	h	

Euler logró dar una solución simultánea a dos problemas, en donde cada fila y cada columna suma 260, cada fila y columna de cada uno de los cuatro subcuadrados de orden 4 sumaba 130 y tal que en este "tablero mágico" de orden 8 se describe la ruta del movimiento del caballo por todo el tablero.



H. C. Warnsdorff que ya en el siglo XIX presentó (1823) un método práctico de construir recorridos. El objetivo es simplemente evitar crear ***fines de trayecto***, es decir, casillas en las que el caballo no pueda continuar, al tener que saltar a una casilla ya visitada. Por esa razón las posibles casillas deben examinarse antes de cada salto. El método consiste en contar el número de posibilidades nuevas de salto que cada una tiene y ***se mueve a la que tenga el número más bajo de nuevas opciones de salto***.

Soluciones

1	6	3
4		8
7	2	5

Imposible visitar la casilla central

	1	

Paseo mínimo

6	9	2	15
1	12	5	8
10	7	14	3
13	4	11	

Sólo se visitan 15 casillas

Solución con "vuelta a casa": la última casilla visitada queda a un movimiento de la inicial

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

1	32	9	22	7	30
10	23	36	31	16	21
33	2	17	8	29	6
24	11	26	35	20	15
3	34	13	18	5	28
12	25	4	27	14	19

11	22	33	44	13	24	3
32	43	12	23	2	45	14
21	10	39	34	37	4	25
42	31	36	1	40	15	46
9	20	41	38	35	26	5
30	49	18	7	28	47	16
19	8	29	48	17	6	27

Soluciones de Euler:

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

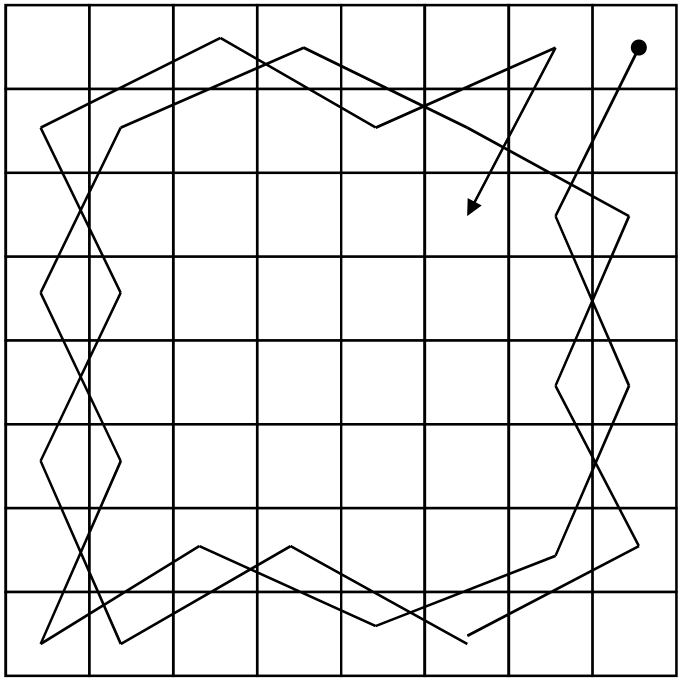
Sobre un tablero con un número impar de casillas es imposible un camino "con vuelta a casa". ¿Por qué?

El recorrido completo

De Moivre dio una solución basándose en la estrategia de moverse alrededor del tablero en una dirección determinada y manteniéndose siempre tan cerca del borde como se quiera.

¿Podrías completar la solución de De Moivre que exponemos parcialmente en el dibujo que sigue?

Empezar por tableros de 5x5, 6x6, 7x7



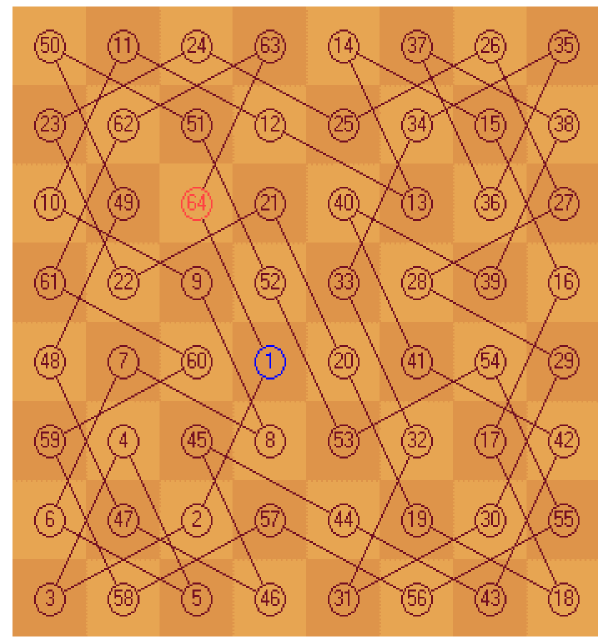
El primer estudio matemático amplio del recorrido del caballo fue presentado por el matemático del siglo XVIII Leonhard Euler (1707–1783) a la Academia de las Ciencias de Berlín, en 1759.

La Academia había propuesto un premio de 4000 francos para la mejor memoria sobre el problema, pero la recompensa nunca se llegó a adjudicar, probablemente porque Euler era en aquella época el Director de Matemáticas de la Academia de Berlín y suponemos que como tal no podía optar al galardón.

Curiosidades

El recorrido del caballo

En febrero de **2003** un niño de 9 años causó sensación en el programa concurso de la televisión alemana *Wetten dass..?*, que correspondería aproximadamente con lo que en la televisión española se conocía como *¿Qué apostamos?* y cuyo formato consiste en que un grupo de candidatos proponen una serie de pruebas que aseguran ser capaces de superar en directo, delante de las cámaras. Por ejemplo, descorchar una botella de vino usando un sacacorchos unido al tren de aterrizaje de un helicóptero.



El chico se llama Xaver Neuhäusler y procede de Bavaria. **La apuesta era que podía completar un recorrido del caballo por el tablero de ajedrez, completamente de memoria, empezando por cualquier casilla.**

La reacción del público alemán antes ese logro fue arrolladora: los periódicos dieron cuenta de ello, la gente lo discutía en trenes y autobuses, en oficinas y escuelas.

Modularidad

	0	1	2	3	4
0	1	10	15	20	7
1	16	21	8	25	14
2	9	2	11	6	19
3	22	17	4	13	24
4	3	12	23	18	5

	0	1	2	3	4
0	1	10	17	22	7
1	18	23	8	11	16
2	9	2	13	6	21
3	24	19	4	15	12
4	3	14	25	20	5

1				
			25	
		25		

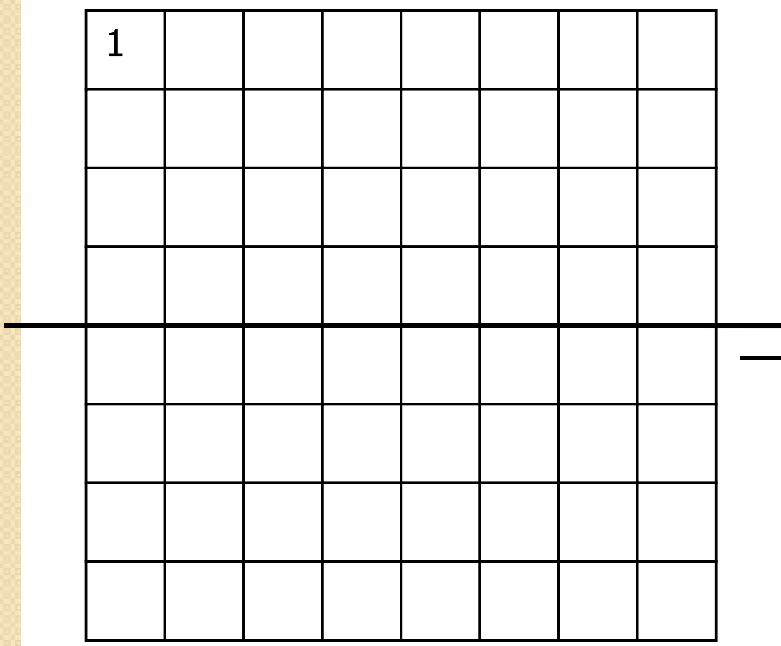
1														

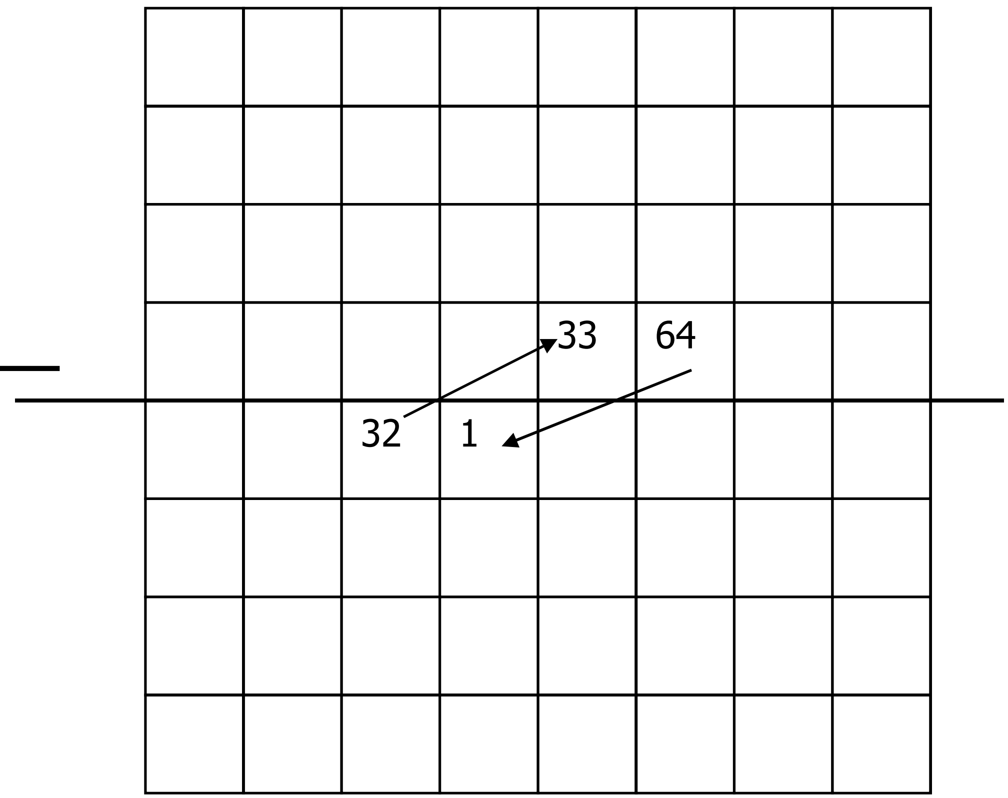
Modularidad

1	30	3	20	7	22	15	26
4	19	8	29	16	25	12	23
31	2	17	6	21	10	27	14
18	5	32	9	28	13	24	11

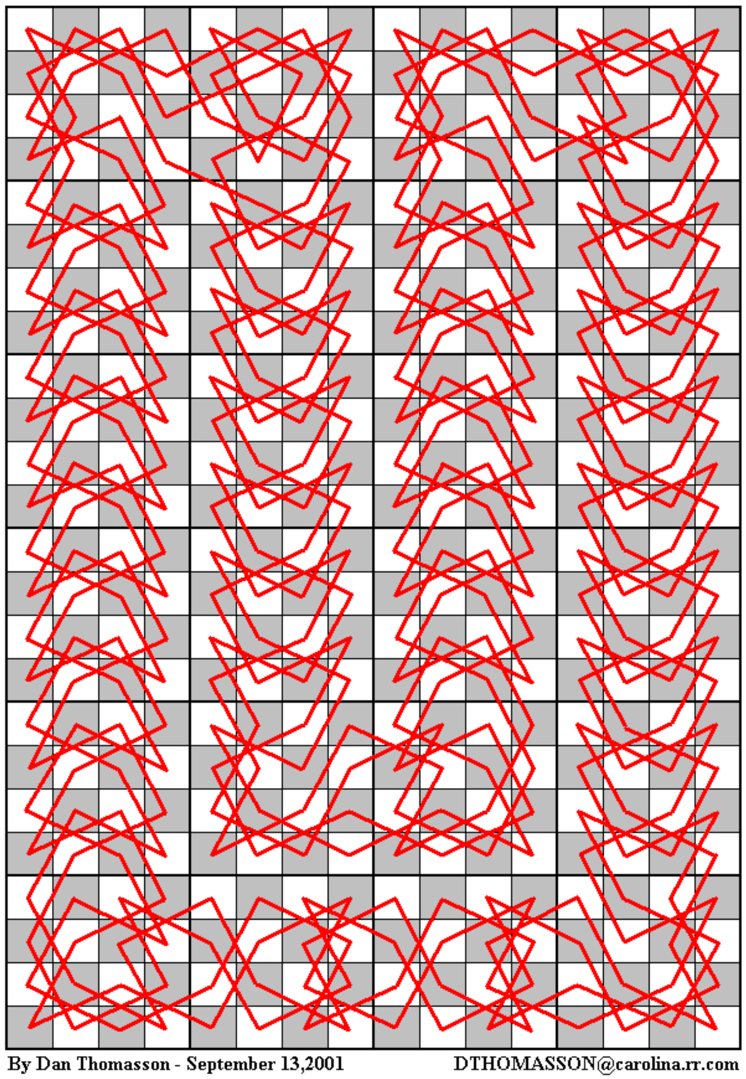
Euler partió de dos partes 4x8 y obtuvo uno de 8x8 con la particular propiedad de "vuelta a casa" (es decir, desde la casilla 64 se llegaba a 1 o casilla de partida)

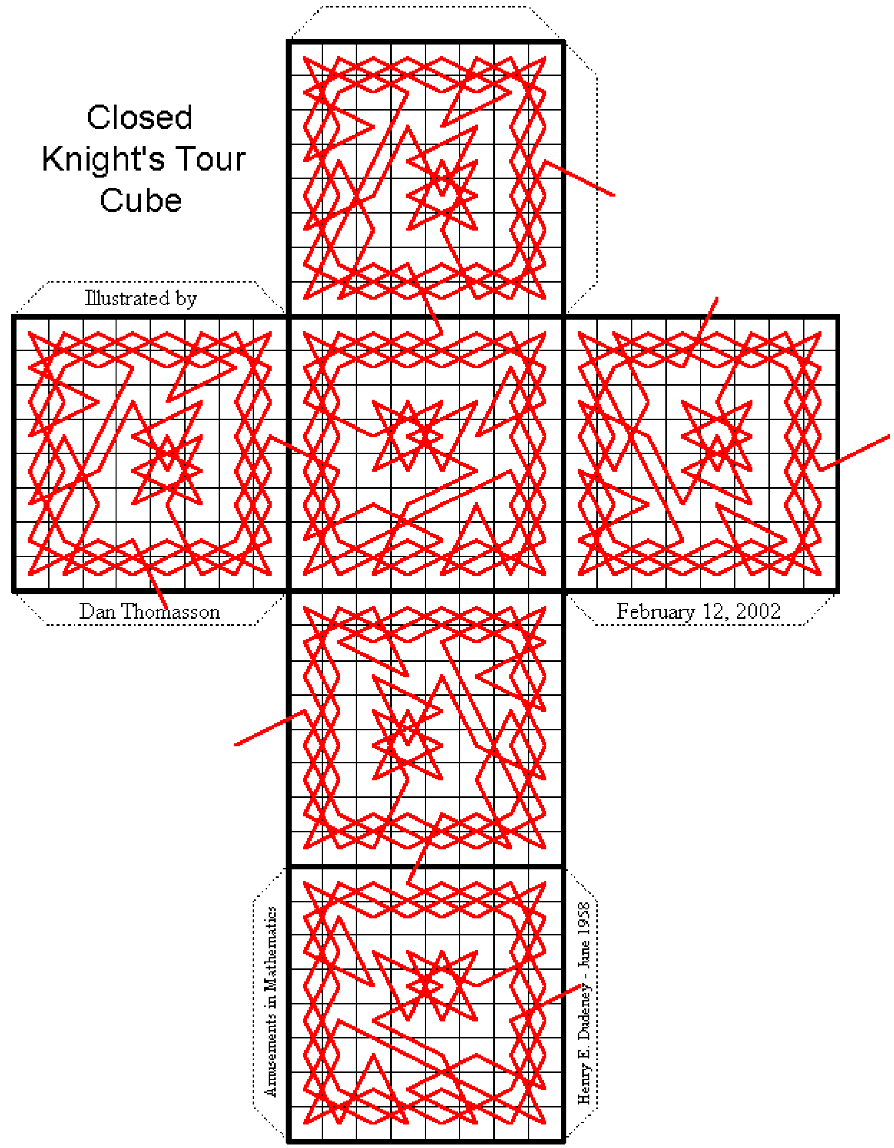
Ciclo hamiltoniano



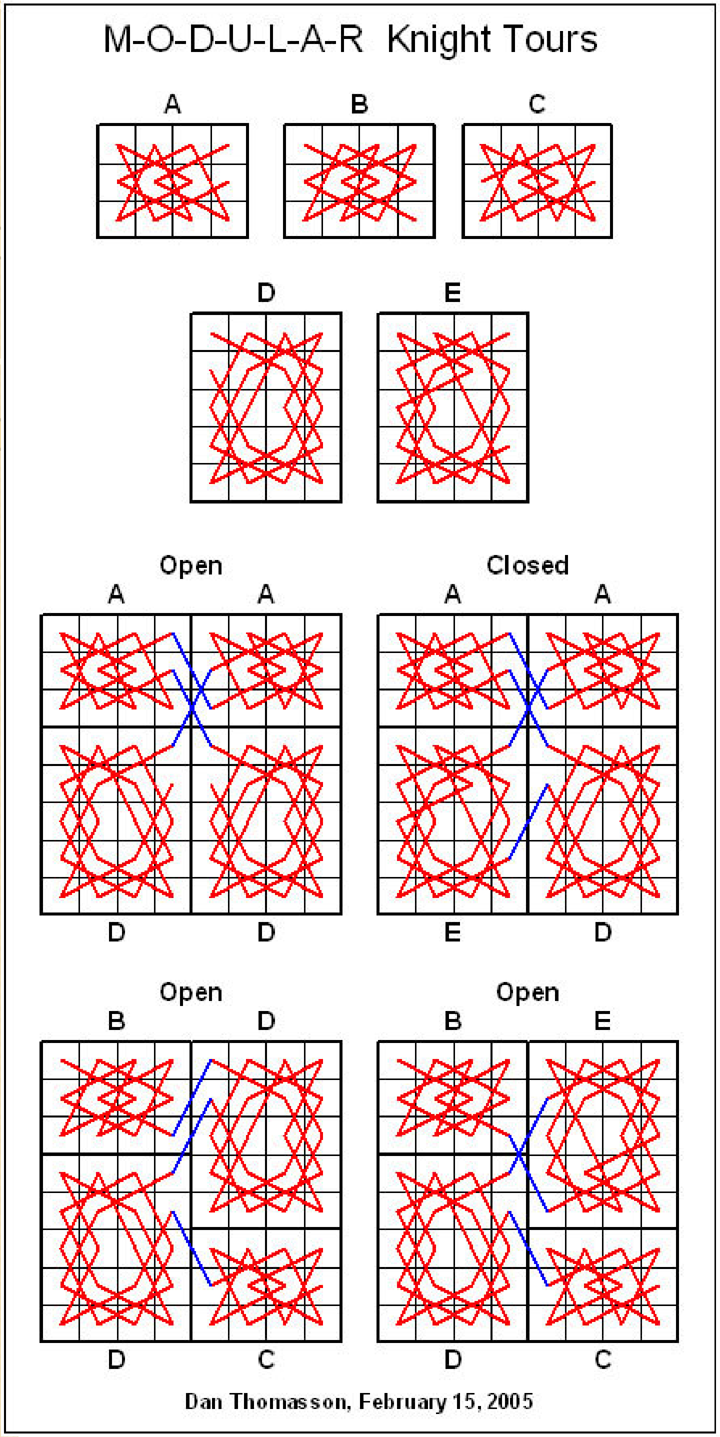


Modularidad

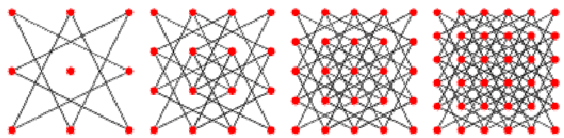


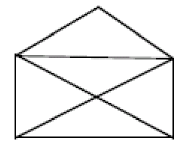


Modularidad

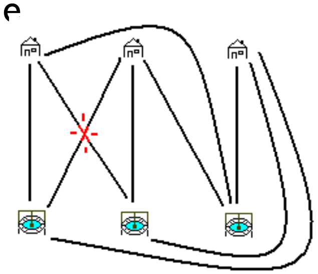


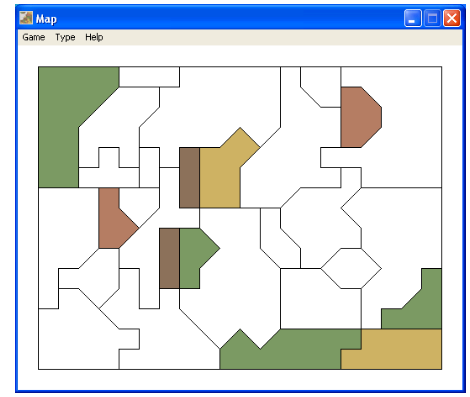
Es un problema de grafos

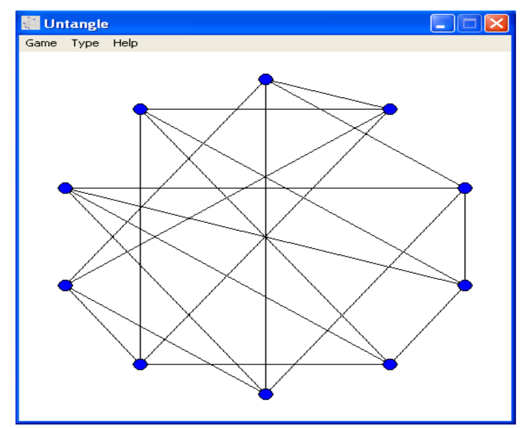




- Grafos eulerianos
  - Los puentes de Konigsberg
  - El problema del caminero o del guarda de seguridad
  - La firma del diablo.
- Grafos hamiltonianos
  - El juego de Hamilton
  - El problema del viajante de comercio.
- Mapas
  - Planaridad de un grafo ($K_{3,3}$, K_5)
- Coloraciones
  - ¿Cuántos colores son necesarios?
  - Teorema de los cuatro colores
- Laberintos
  - Algoritmos de resolución







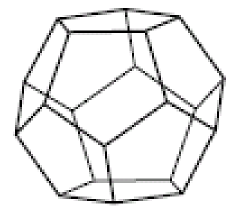
Simon Tatham's Portable Puzzle Collection
http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/

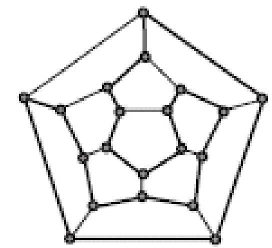
Caminos hamiltonianos

Camino o circuito hamiltoniano

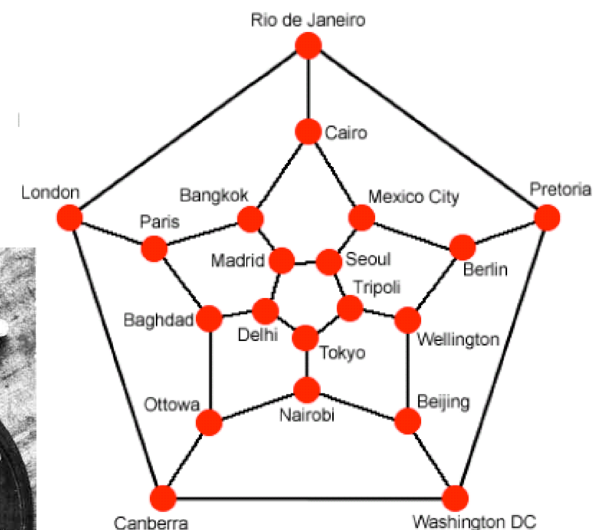
- El problema del viajante de comercio.
- En los tableros, ¿existe algún criterio para saber si existe un recorrido completo?

Diagrama de Schlegel

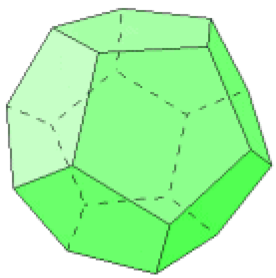


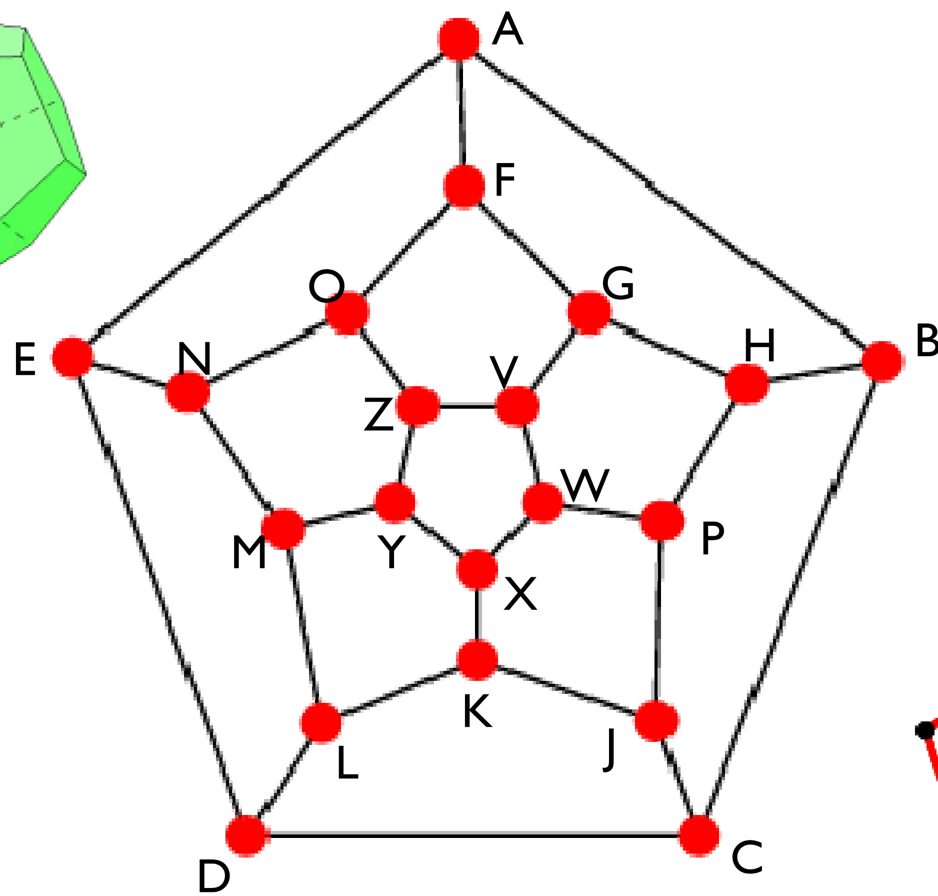


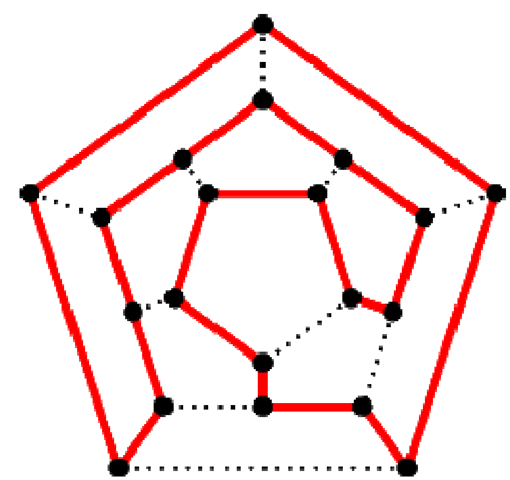
W.R. Hamilton (1805-1865) inventó (y patentó) un juego (Icosian Game o Hamilton Game) en el que se trataba de hacer un recorrido por 20 ciudades del mundo sin pasar por ninguna más de una vez.
Estaba construido sobre un dodecaedro. Cada ciudad estaba en un vértice.



¿Tiene un ciclo Hamiltoniano?







Caminos Hamiltonianos

- **Teorema (Garey-Johnson, 1983):** decidir si un grafo posee un camino Hamiltoniano es un problema NP-completo.

- **¿Qué significa NP-completo?**

  - NP-completo es un problema "difícil de resolver pero fácil de comprobar**".**

  - NP-completo implica que "casi seguro" no existe ningún algoritmo general para resolver ese problema en tiempo polinómico. De hecho, si usted lo encuentra:

    * Con el mismo método podrá descifrar las claves criptográficas más utilizadas.

    * El Instituto Clay (Cambridge, Mass.) le dará un millón de dólares ("P=NP" es uno de sus "problemas del milenio").

Algoritmos

- ¿Qué es un algoritmo?
- Algoritmos
  - Algoritmo de Euclides.
  - Algoritmo de Fleury
  - Algoritmo de fuerza bruta.
  - Algoritmos para resolver un laberinto.
  - Torres de Hanoi.

Algoritmo de Fleury (Grafos eulerianos)
Permite encontrar una trayectoria o circuito de Euler
Un puente es una arista tal que al quitarla del grafo, el grafo se convierte en un grafo disconexo
Los pasos a seguir en el algoritmo de Fleury para encontrar una trayectoria de Euler son:

1. Verificar que el grafo cumpla con los criterios de grafos eulerianos (todos los vértices deben tener grado par, salvo dos como mucho).
2. Escoger un vértice de grado impar. En caso de que no exista, se puede escoger cualquier vértice.
3. En cada paso, recorre cualquier arista disponible, eligiendo un puente solo cuando no halla alternativa. Al recorrer la arista borrarla y continuar el proceso hasta que todos los vértices tengan grado cero.

Algoritmo de la fuerza bruta (Grafos Hamiltonianos)

Consiste en analizar todos los posibles recorridos del grafo . En profundidad con vuelta atrás o en anchura.
Un grafo completo de n vértices tiene (n-1)! Circuitos distintos.

Soluciones no realizables

Complejidad

	log n	n	n^2	2^n	n!
2	1	2	4	4	2
8	3	8	64	256	40320
32	5	32	1024	$4{,}3\times10^9$	$2{,}6\times10^{35}$
100	6	100	10^4	$1{,}2\times10^{27}$	$9{,}3\times10^{177}$

Un siglo tiene $3{,}1\times10^9$ segundos

Si la edad del Universo es de 15000 millones de años, el big-bang ocurrió hace $4{,}5\times10^{17}$ segundos

Tratable: Un problema tratable de procesamiento de grafos es aquel para el que se conoce un algoritmo que garantiza que sus requerimientos en tiempo y espacio están limitados por una función polinomial en el tamaño del grafo (número de nodos + número de aristas).

Intratable: Un problema intratable de procesamiento de grafos es aquel para el que no se conoce algoritmo que garantice obtener un solución del problema en una cantidad razonable de tiempo. Muchos de estos problemas tienen la característica de que podemos utilizar un método de fuerza bruta para probar todas las posibilidades de calcular la solución, y se consideran intratables porque existen demasiadas posibilidades a considerar.

¿Sabes contar hasta un millón?¿Has contado hasta un millón?¿Cuánto tiempo tardaríamos?
1000000 segundos=16666,66 minutos = 277,77 horas= 11,57 días
unos 12 días sin parar

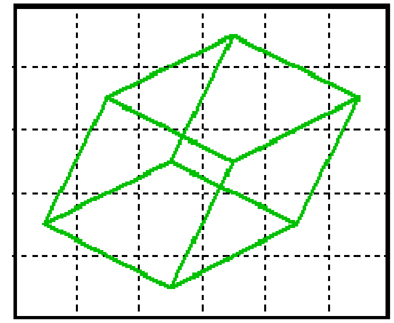
La historia del ajedrez de los granos de trigo nos brinda otra oportunidad de analizar otra situación no realizable.

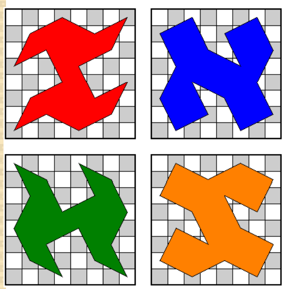
Las torres de Hanoi con 64 discos suponen 2^64-1 movimientos.

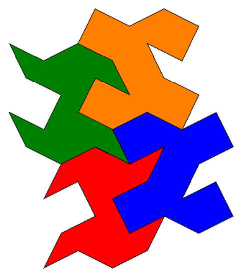
Las sucesivas dobleces de papel da lugar a otra situación no realizable.

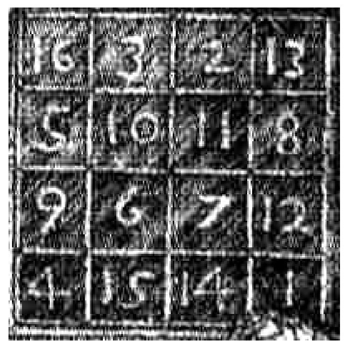
Enlaces y curiosidades: **Knight's tour**

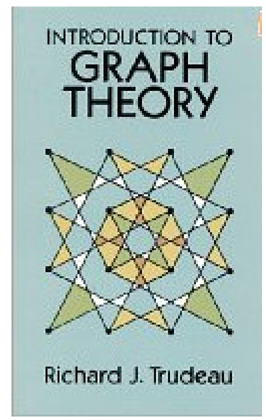
- http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_del_caballo
- http://www.ktn.freeuk.com/index.htm
- http://www.borderschess.org/KnightTour.htm
- http://www.tri.org.au/knightframe.html
- http://www.chessbase.com/espanola/newsdetail2.asp?id=1946
- http://www.worle.com/chess/index.html

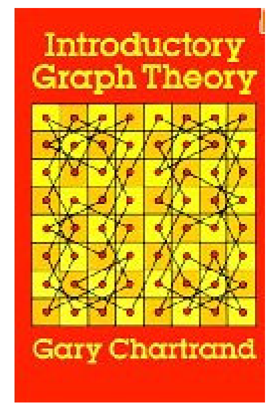




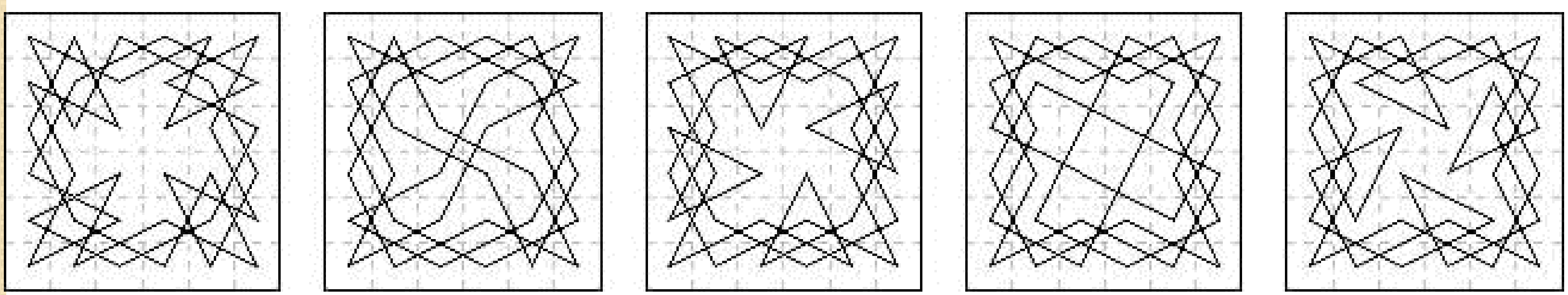








Poligonales invariantes bajo rotación

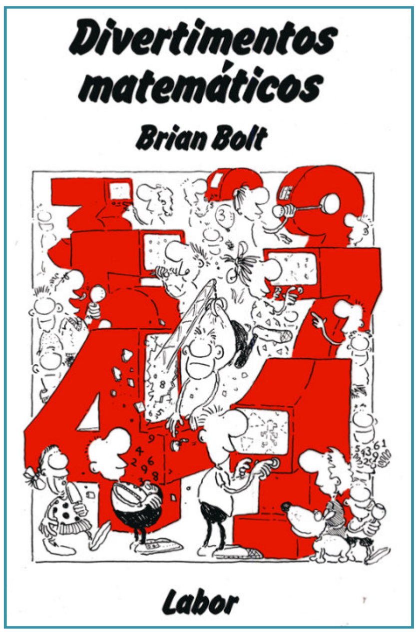


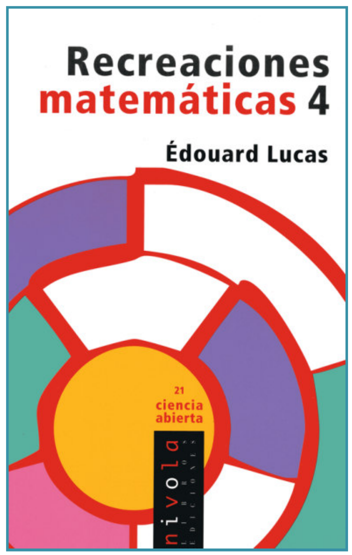
Fuentes

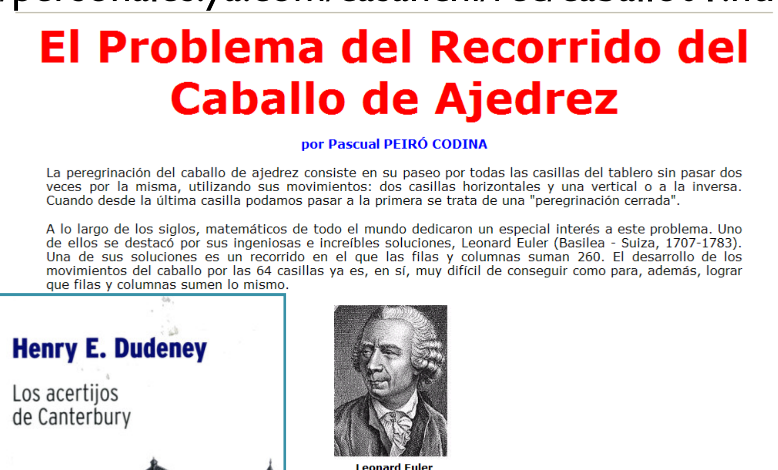
- ¿Qué problemas hay relacionados con el salto del caballo?

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_del_caballo
http://www.ktn.freeuk.com/index.htm
http://www.borderschess.org/KnightTour.htm
http://web.telia.com/~u85905224/knight/bWarnsd.htm

http://personales.ya.com/casanchi/rec/caballo01.htm







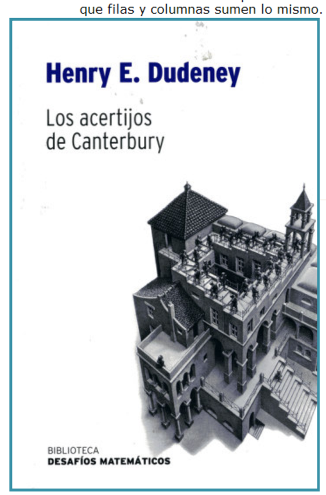
El Problema del Recorrido del Caballo de Ajedrez

por Pascual PEIRÓ CODINA

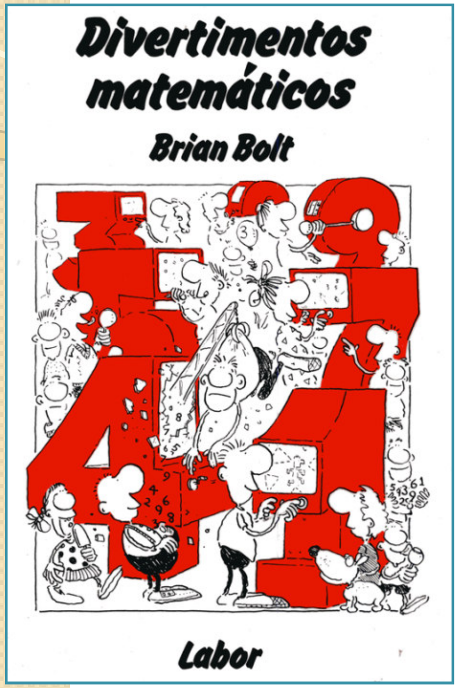
La peregrinación del caballo de ajedrez consiste en su paseo por todas las casillas del tablero sin pasar dos veces por la misma, utilizando sus movimientos: dos casillas horizontales y una vertical o a la inversa. Cuando desde la última casilla podamos pasar a la primera se trata de una "peregrinación cerrada".

A lo largo de los siglos, matemáticos de todo el mundo dedicaron un especial interés a este problema. Uno de ellos se destacó por sus ingeniosas e increíbles soluciones, Leonard Euler (Basilea - Suiza, 1707-1783). Una de sus soluciones es un recorrido en el que las filas y columnas suman 260. El desarrollo de los movimientos del caballo por las 64 casillas ya es, en sí, muy difícil de conseguir como para, además, lograr que filas y columnas sumen lo mismo.

Leonard Euler



Divertimentos matemáticos



Averiguar qué camino debe seguir una caballo de ajedrez para recorrer una y sólo una vez todos los cuadros del tablero 8x8. (**problema base**)

-Propone empezar por otros tableros más pequeños: 3x3, 4x4, 5x5, ..

-Muestra la solución de Euler con vuelta a casa(8x8).

-Cuadrado mágico de Euler (8x8)

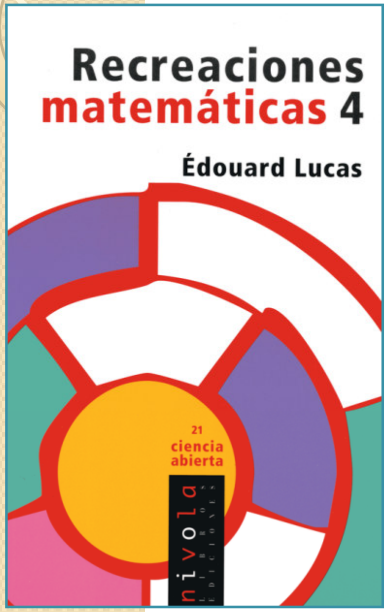
-Propone completar la solución parcial según la estrategia de De Moivre.

-Cualquier tablero con un número impar de cuadros es completamente imposible encontrar un camino "con vuelta a casa"

-Propone el juego de estrategia en un tablero de 5x5

-Cita el libro **Mathematical Recreation and Essays** de W.W. Rouse Ball(Macmillan) donde se amplía este tema.

Recreaciones matemáticas 4



Édouard Lucas (1842-1891)

-Torres de Hanoi

-Fórmula del término enésimo de la sucesión de Fibonacci

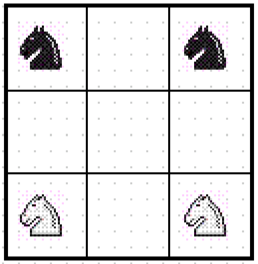
-Números de Mersenne: Descubrió un método para comprobar la primalidad de los números de la forma $2^p - 1$ donde p es primo (conocidos como números de Mersenne)

-Resolvió el problema de los aros chinos.

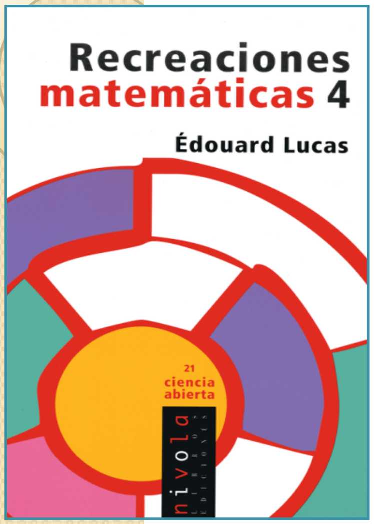
En el libro habla de **Redes Geométricas** (grafos) plantea varios problemas, entre ellos:

Problema IV: Dada una red geométrica, ¿de cuántas maneras se pueden visitar una sola vez todos los vértices mediante un trazo continuo? (**Juego de Hamilton**, **problema del caballo**).

Problema que aparece con el nº 42 en un manuscrito de P. **Guarini** di Forli (1512): "Dos caballos blancos y dos caballos negros están colocados en las cuatro esquinas de un tablero cuadrado de nueve casillas; se pide hacer pasar, según las reglas, los caballos blancos al lugar que ocupan los caballos negros, e inversamente, sin salirse del cuadrado".



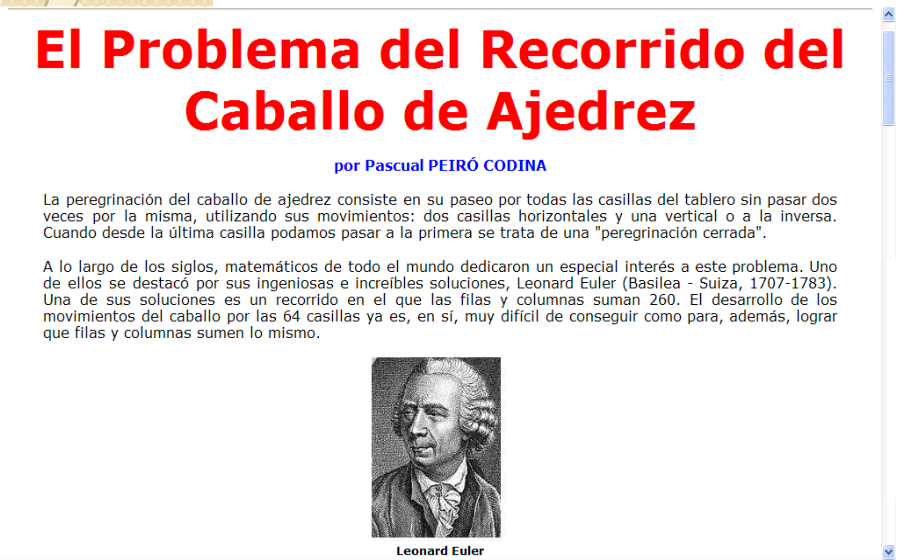
Recreaciones matemáticas 4



-Da las soluciones de los tableros de 4x3, **cruz de Euler** de doce y veinte casillas.
-**Primera solución** al tablero 8x8, debida al **caballero de Montmort**(1708-1714) "Ensayo de análisis sobre los juegos de azar"
-Da la solución de un tablero 4x8
-Da la solución de un tablero 8x8 a base de dos simétricos de 4x8 con vuelta a casa
- Habla de los **pasatiempos** que aparecen en las revistas para **reconstruir una frase** que se convierte en "***hilo de Ariadna***"

-Para resolver el problema del tablero 8x8, "***..es preferible usar los sesenta y cuatro números de un juego de lotería***"
-La plancha de **Vandermonde**: tablero de madera, pegar una hoja con las 64 casillas, clavar tachas sin cabeza y utilizar un hilo de seda..→Polígrafo
-El **Sr. Cretaine** aconseja el uso de una pizarra sobre la que se hace grabar un pequeño tablero, sirviéndose de una tiza que se borre fácilmente.
-"La rapidez de ejecución , dice el **Sr. Cretaine**, es hoy alabada por algunos aficionados que, mediante métodos fáciles, obtienen entre diez y doce soluciones a la hora.."

Página de Pascual Peiró Codina



El Problema del Recorrido del Caballo de Ajedrez

por Pascual PEIRÓ CODINA

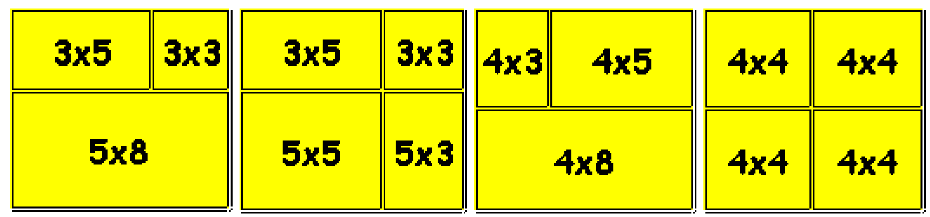
La peregrinación del caballo de ajedrez consiste en su paseo por todas las casillas del tablero sin pasar dos veces por la misma, utilizando sus movimientos: dos casillas horizontales y una vertical o a la inversa. Cuando desde la última casilla podamos pasar a la primera se trata de una "peregrinación cerrada".

A lo largo de los siglos, matemáticos de todo el mundo dedicaron un especial interés a este problema. Uno de ellos se destacó por sus ingeniosas e increíbles soluciones, Leonard Euler (Basilea - Suiza, 1707-1783). Una de sus soluciones es un recorrido en el que las filas y columnas suman 260. El desarrollo de los movimientos del caballo por las 64 casillas ya es, en sí, muy difícil de conseguir como para, además, lograr que filas y columnas sumen lo mismo.

Leonard Euler

Propone dividir el tablero 8x8 en partes e intentar resolverlos por separado.

- No hay solución para tableros 3x3, 4x4, 3x5

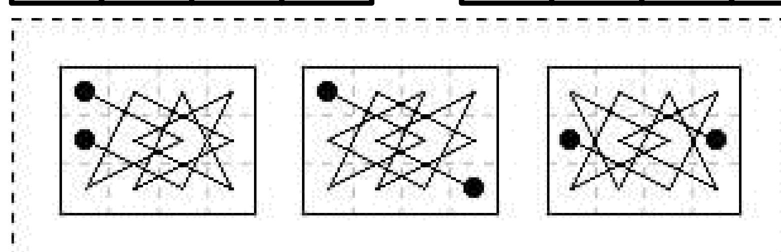


Tampoco hay solución para tableros 3x6

Para tableros 3x4, hay soluciones como las que siguen(más simetrías) donde sólo se indican el comienzo y el final. ¿Qué tableros se podrían encadenar?

1			
12			
			12

12			
1			12
12			



Sobre las Matemáticas Recreativas

Reseña realizada en DivulgaMat relativa al libro: Recreaciones matemáticas 1 de Edouard Lucas

..

Si las obras de estudio, que al menos tenían una venta asegurada entre los estudiantes, no se editaban, **¿qué se podía esperar de textos de carácter más lúdico o divulgativo que hasta los propios científicos menospreciaban como un simple entretenimiento e incluso una pérdida de tiempo?** ¿Cómo se explica si no la famosa frase de John E. Littlewood, un matemático serio, en defensa de este tipo de actividades ("***Un buen pasatiempo matemático vale más, y aporta más a la matemática, que una docena de artículos mediocres***")? Esta situación no se daba en otros países de habla hispana, Argentina, por ejemplo, donde se editaron muchos más libros de este tipo (entre ellos *El laberinto y otros juegos matemáticos*, del propio Edouard Lucas).

Personalmente siempre me ha interesado la matemática recreativa, incluso antes de que decidiera elegir las matemáticas como carrera a la que dedicarme. Leyendo lo poco que nos llegaba (Perelman, Gardner, revista *Cacumen*) me encontraba referencias a autores totalmente desconocidos, ninguno de los cuales se mencionaba en ningún libro de texto. **¿Quienes eran? ¿Eran matemáticos? ¿Escritores? ¿Periodistas? ¿Charlatanes?** Sólo se disponía de sus nombres: Bachet de Meziriac, Jacques Ozanam, Samuel Loyd, Ernest Dudeney, André Sainte-Lagüe, Maurice Kraitchik, Emile Fourrey, William Rouse Ball, John Conway, Solomon Golomb, etc., etc.

..

Alfonso Jesús Población Sáez (Universidad de Valladolid)