IV Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas.
Santiago de Compostela , 2011.

Sistemas Dinámicos y Caos

Miguel Reyes

mreyes@fi.upm.es

- **Objetivo**: Introducir a los chicos en los conceptos asociados a los Sistemas Dinámicos y el Caos.

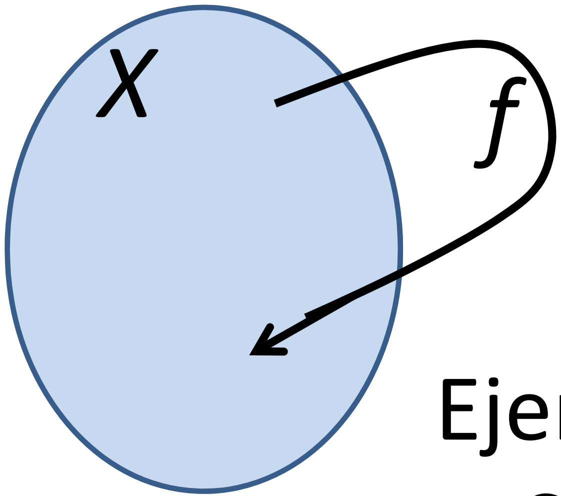
- **Dirigido a**: Alumnos de 2º año.

- **Duración**: 2 sesiones de 1:15 horas.

¿Qué es un Sistema Dinámico?

$f : X \longrightarrow X$

$y = f(x)$



$x_{k+1} = f(x_k)$

Ejemplos:

-- Calculadora

-- Dinámica de poblaciones.

-- Predicción del tiempo.

Dinámica de poblaciones

- $y = ax \qquad\qquad x_{k+1} = ax_k$

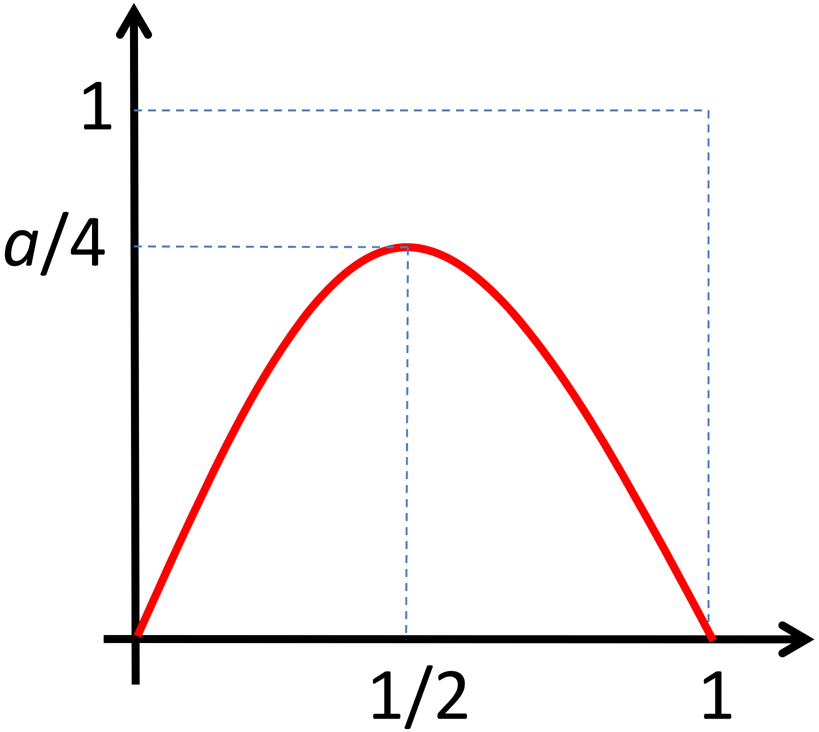
  -- Extinción ($0<a<1$)

  -- Estabilidad ($a=1$)

  -- Superpoblación ($a>1$)

- $y = ax(1-x) \quad x_{k+1} = ax_k(1-x_k)$

Función logística



$$f(x) = ax(1\text{-}x)$$

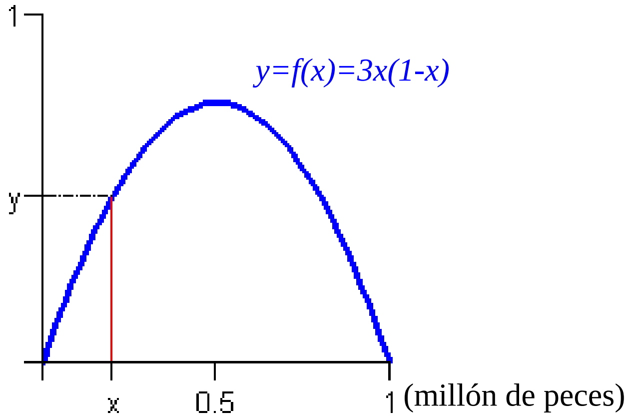
$$0 \le a \le 4$$

Sistemas Dinámicos I

Leyes de crecimiento y puntos de equilibrio

La naturaleza es un medio en el que suceden una gran cantidad de procesos que interaccionan entre sí. Los **sistemas dinámicos** son muy útiles para estudiar y entender cómo evolucionan este tipo de fenómenos y, además, han dado lugar a importantes descubrimientos recientes como la existencia de **caos**. Aquí, nos aproximaremos a esta teoría matemática por medio de algunos ejemplos sencillos.

1. Una especie de peces se reproduce de forma que si este año la cantidad de peces es x, el año próximo será y, donde y viene dada por la dinámica de crecimiento asociada a la curva f como se indica en la figura.



Si este año no hay peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
Si este año hay 1 millón de peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
Si este año hay 100.000 peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
¿Cuál es la cantidad de peces que da una cantidad máxima el próximo año?	
¿Cuántos peces debe haber para que la población sea la misma el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que aumente la población el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que disminuya la población el año próximo?	

2. Llamando x_k a la cantidad de peces que hay en el año k, la dinámica de la población de peces (también llamada **órbita**) se puede presentar en una tabla del tipo:

Año	0	1	2	3	…	k	$k+1$	…
Cantidad de peces	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_k	x_{k+1}	…

donde el número de peces que hay cada año se obtiene aplicando la función f al número de peces que había el año anterior:

$x_{k+1} = f(x_k)$ (**ecuación** del sistema dinámico)

Si la ecuación del sistema dinámico que rige el crecimiento de la población de peces es $f(x) = 3x(1-x)$ y $x_0 = a$ son los peces que hay inicialmente, el número de peces que hay los dos próximos años es:

$$x_1 = f(x_0) = f(a) = 3a(1-a)$$

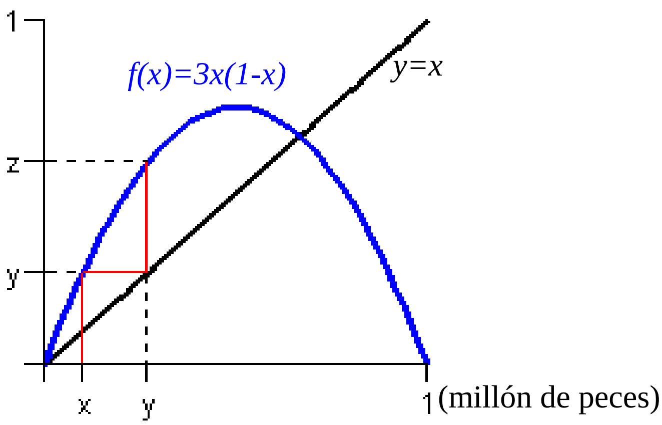
$$x_2 = f(x_1) = 3x_1(1-x_1) = 3\cdot 3a(1-a)\cdot(1-3a(1-a)) = 9a(1-a)(1-3a+3a^2)$$

Obtén la expresión para el número de peces que hay el tercer año:

¿Podrías obtener la expresión general de x_n en función de x_0? ¿Sabes algo sobre ella?

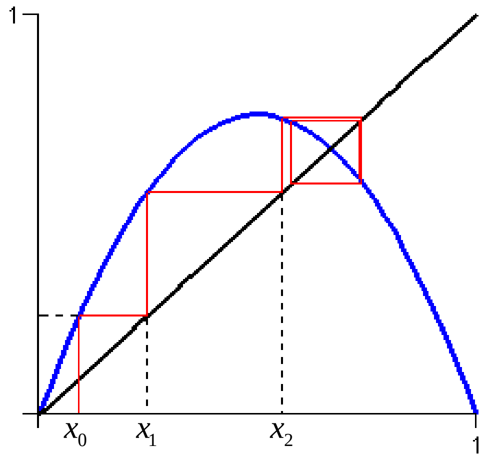
Como habrás observado la expresión que se obtiene es muy complicada, siendo difícil manipular con estas expresiones.

3. Si este año hay x peces, el año próximo habrá $y = f(x)$ peces, dentro de dos años habrá $z = f(y)$ peces, y así sucesivamente. Gráficamente, el valor de z se puede obtener siguiendo desde x la línea roja de la siguiente figura:

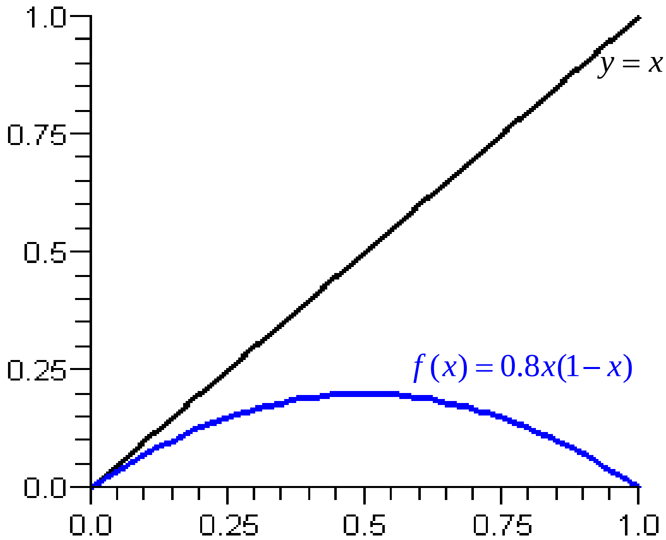


Obtén gráficamente la población de peces dentro de tres años.

Gráficamente, la dinámica de la población se puede visualizar de una forma mucho más sencilla siguiendo la línea roja de la figura:



4. Las ballenas y otras especies animales tienen curvas de crecimiento muy lento. En el caso de que se caza libre sus curvas de crecimiento pueden ser así:

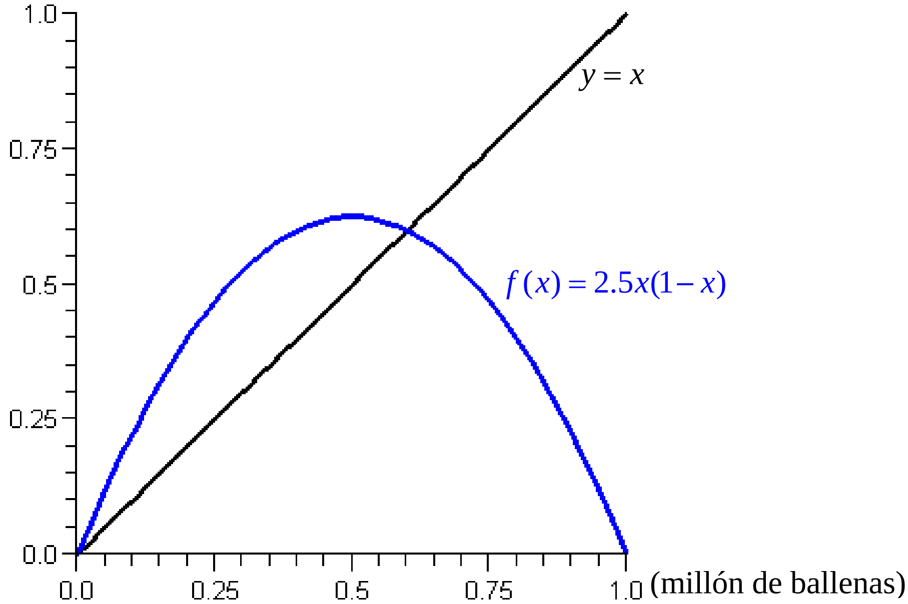


(millón de ballenas)

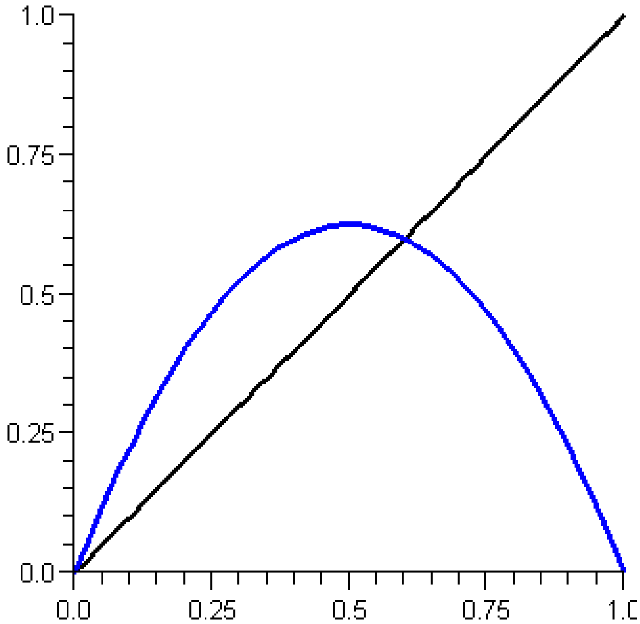
Partiendo de una población inicial de medio millón de ballenas:

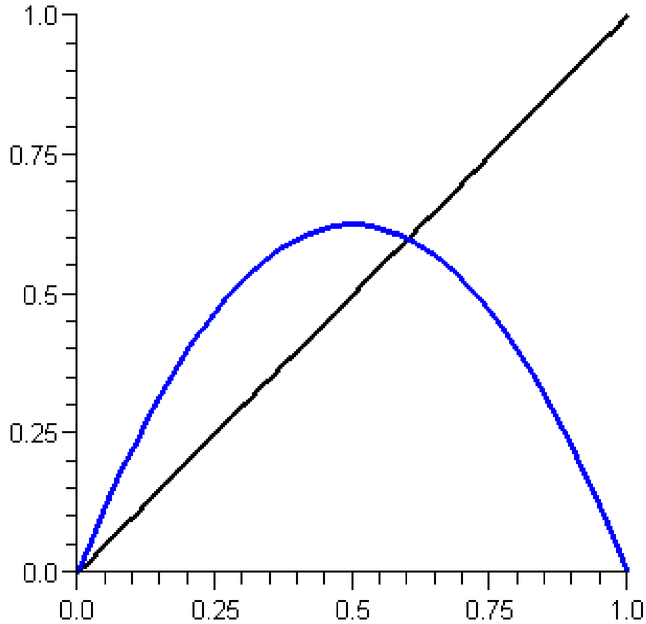
¿Cuántas habrá al cabo de cuatro años?	
¿Cuántas habrá a más largo plazo (dentro de 10 o 20 años)?	

5. Si se prohíbe la caza de ballenas su curva de crecimiento aumenta pudiendo ser así



Partiendo de 100.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 100 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 900.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
¿Para qué número de ballenas la población crece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población decrece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población permanece estable?	





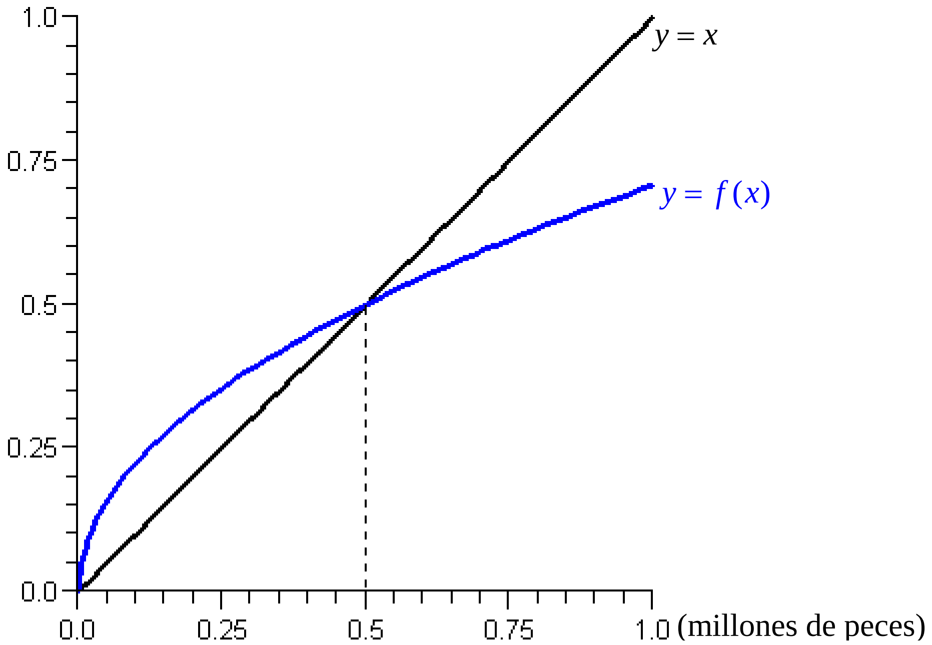
6. Un sistema dinámico como, por ejemplo, la población de una especie animal, se dice que esta en **equilibrio** cuando se estabiliza, es decir, cuando su población permanece constante. El sistema dinámico de ecuación f estará en equilibrio para aquella población x que verifica

$$f(x) = x$$

llamada **población o punto de equilibrio** y, en términos matemáticos, **punto fijo**.

Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 4	
Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 5	

7. Cierta población de peces tiene una curva de crecimiento como la de la figura:



En este sistema dinámico $x = 0$ y $x = 0.5$ son puntos de equilibrio, es decir, que si la población inicial es de cero peces o de medio millón de peces, dicha población permanece estable. El comportamiento del sistema alrededor de dichos puntos es bien diferente como puedes poner de manifiesto contestando a las siguientes preguntas:

Una población estable de medio millón de peces disminuye ligeramente por cierto vertido contaminante. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
Una población estable de medio millón de peces aumenta ligeramente por un año de cría excepcional. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
En un ecosistema sin peces se introduces varios ejemplares. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
Por motivos extraordinarios, un ecosistema se satura de peces. ¿Qué ocurre a largo plazo?	

8. Un punto de equilibrio de un sistema dinámico se dice que es **estable** cuando al alterarlo ligeramente la población se vuelve a acercar a dicho punto; y se dice que es **inestable** cuando al alterarlo ligeramente la población se aleja de dicho punto.

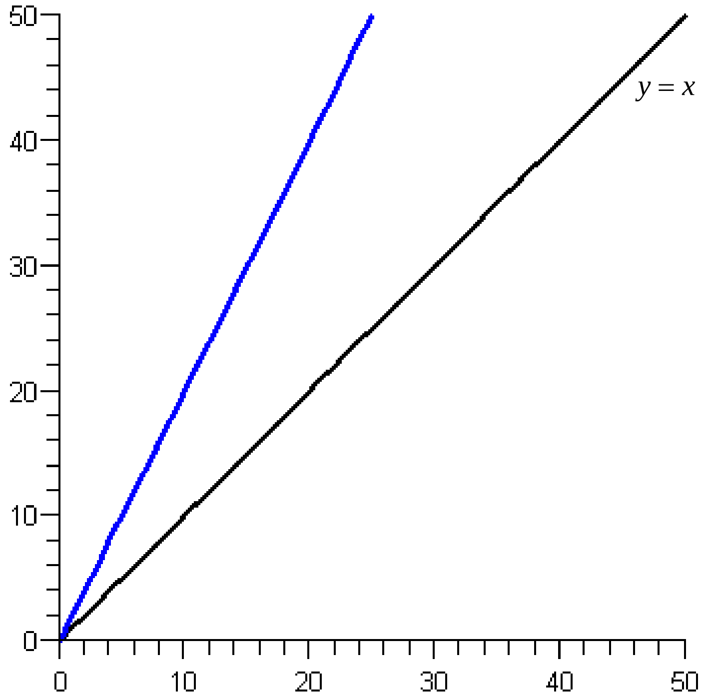
Contesta si los siguientes puntos de equilibrio son estables o inestables:

El punto de equilibrio $x = 0$ de la actividad 7	
El punto de equilibrio $x = 0.5$ de la actividad 7	
Los puntos de equilibrio de la actividad 4	
Los puntos de equilibrio de la actividad 5	

9. Una población de bacterias crece mediante un proceso de división en el que cada bacteria se divide en dos cada hora, estando cada una de ellas lista para la reproducción a la hora siguiente.

¿Cuál es la ecuación del sistema que rige la población de bacterias?	
Si hoy a las 8:00 hay 1 bacteria, ¿cuántas habrá mañana a las 8:00? (Usa la aproximación $2^{10} = 1024 \approx 1000$)	
¿Y pasado mañana a las 8:00?	

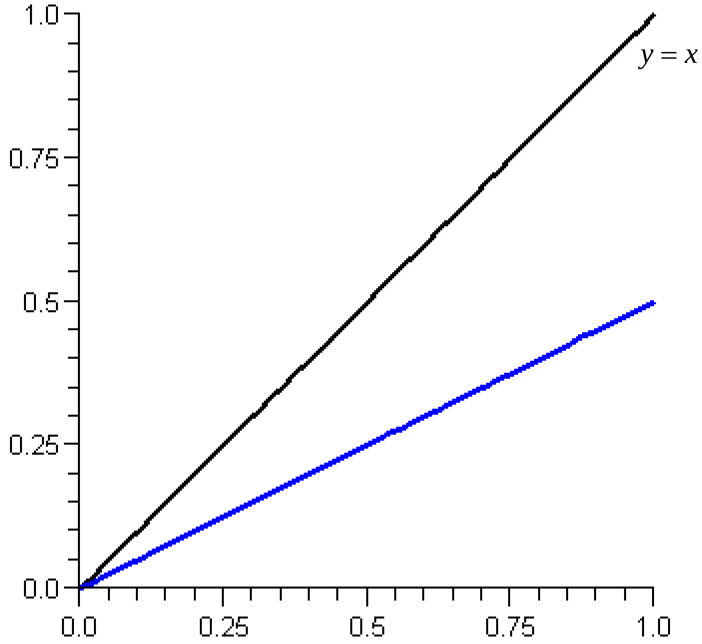
Representa gráficamente la dinámica:



10. En una fiesta de cumpleaños con doce personas asistentes, cada uno pasa al lado del pastel y corta la mitad de lo que queda.

¿Cuál es la ecuación del sistema que rige el pastel restante?	
¿Qué cantidad le queda al perro después de comer las 12 personas?	

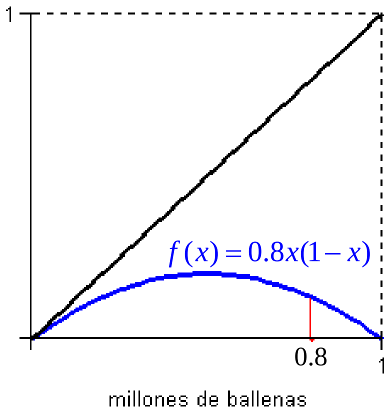
Representa gráficamente la dinámica:

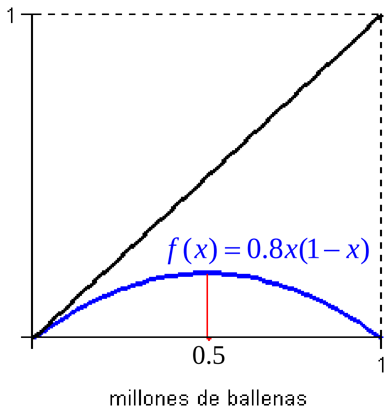


Sistemas Dinámicos II

Evolución hacia el caos.

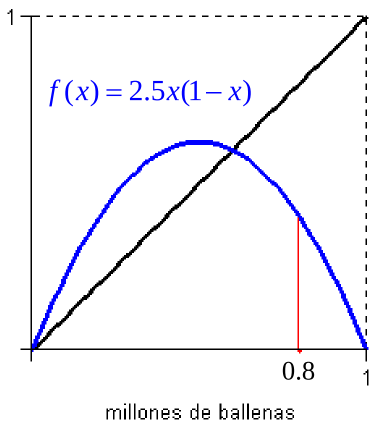
1. Las ballenas tienen una curva de crecimiento bastante lento, situación que se agrava cuando se permite su caza libre, en cuyo caso presentan una dinámica de crecimiento como la asociada a la curva de la figura. Estudia el comportamiento a largo plazo de las dos poblaciones iniciales que se indican

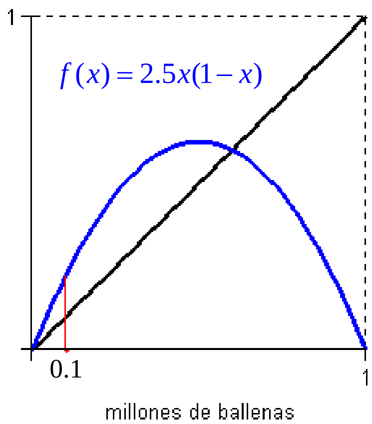




Como habrás observado, en ambos casos el futuro de la especie es la extinción.

2. Si se prohíbe la caza de ballenas, su curva de crecimiento se asemeja a la de la figura. Estudia el comportamiento a largo plazo de las dos poblaciones iniciales que se indican

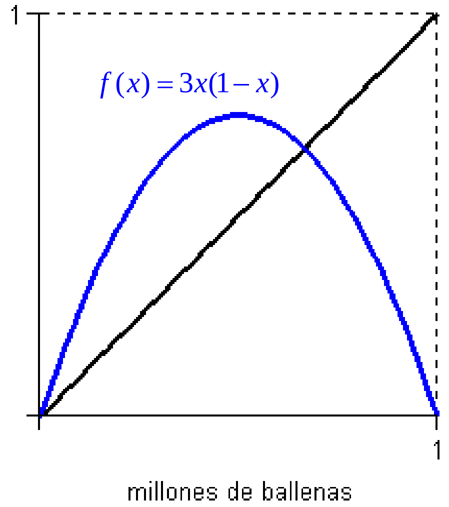




¿Cuál es su comportamiento a largo plazo de otras poblaciones?

¿Cuál es la población a la que convergen?

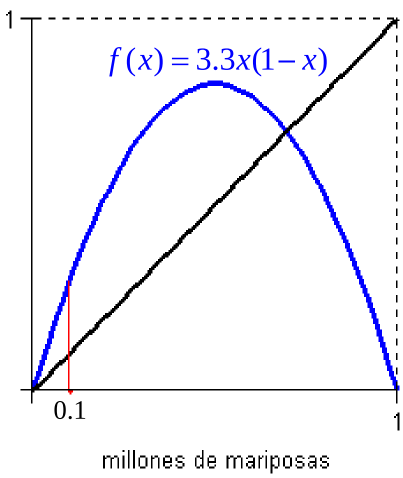
3. Cierta especie de ballenas tiene una curva de crecimiento ligeramente mayor, como la de la figura. Estudia el comportamiento a largo plazo de diferentes poblaciones iniciales.

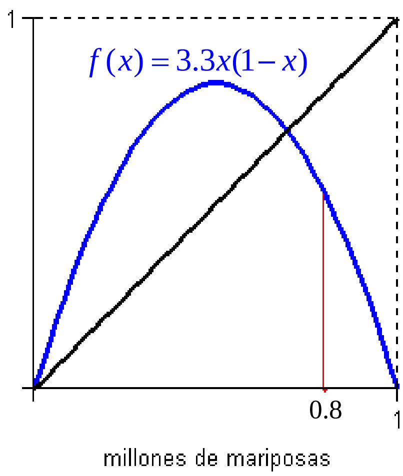


Como habrás observado, con cualquier población inicial, la población tiende hacia un valor fijo, aunque su aproximación a dicho valor es muy lenta.

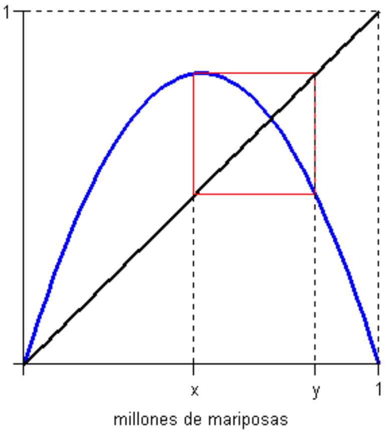
¿Cuál es la población a la que converge?	

4. Se ha observado que ciertas especies de mariposas mantienen alternancia con poblaciones muy altas lo años pares y muy bajas los años impares. Si una especie de mariposas sigue la dinámica de crecimiento de la curva de la figura, estudia el comportamiento a largo plazo de las dos poblaciones iniciales que se indican:





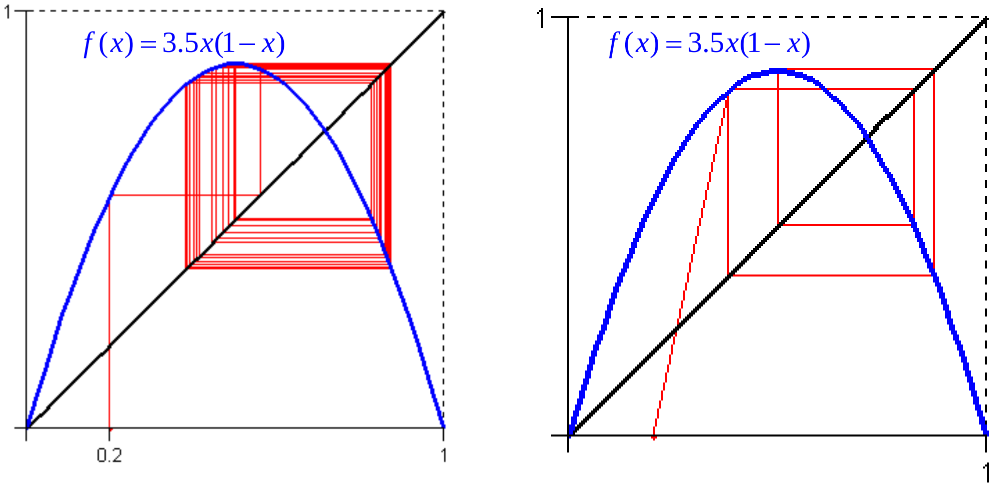
Como habrás observado, la situación a largo plazo es aproximadamente la de la figura



lo que indica que, en cualquier caso, la dinámica de la población se acerca a una **órbita periódica de orden 2** que se repite indefinidamente: $...x, y, x, y, x, y,...$. Observa que lo mismo ocurre partiendo de *casi* cualquier población inicial, lo que indica que la órbita periódica de orden 2 es **estable**.

¿Cuál es la órbita de periodo 2 a la que converge?	

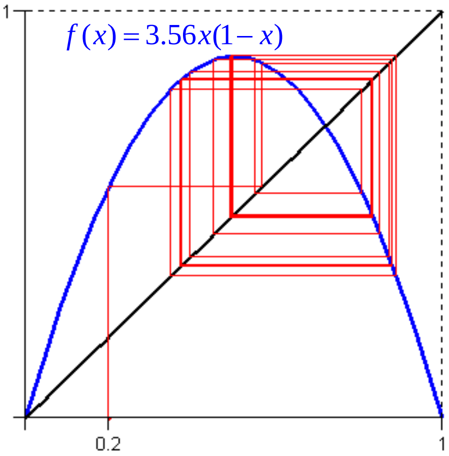
5. Si la curva de crecimiento es algo mayor (la de la figura), partiendo de *casi* cualquier población inicial la población a largo plazo tiende a estabilizarse en la siguiente situación planteada en la figura (en la segunda se prescinde de los primeros pasos y sólo aparece la situación a largo plazo):

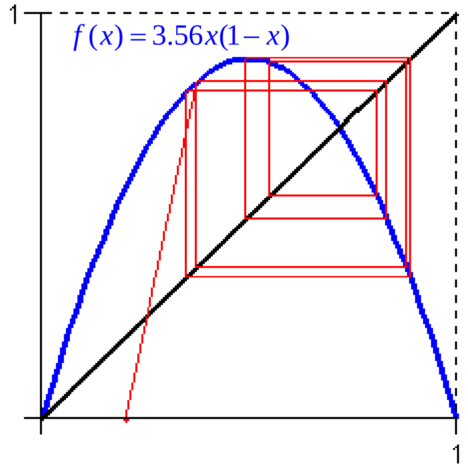


lo que indica que la dinámica de la población se acerca a una **órbita periódica de orden 4** que se repite indefinidamente. Lo mismo ocurre partiendo desde *casi* cualquier población inicial, lo que indica que la órbita periódica de orden 4 es **estable**.

¿Cuál es la órbita de periodo 4 a la que converge?	

6. Si la curva de crecimiento es algo mayor (la de la figura), partiendo de *casi* cualquier población inicial la población a largo plazo tiende a estabilizarse en la siguiente situación planteada en la figura (en la segunda se prescinde de los primeros pasos y sólo aparece la situación a largo plazo):

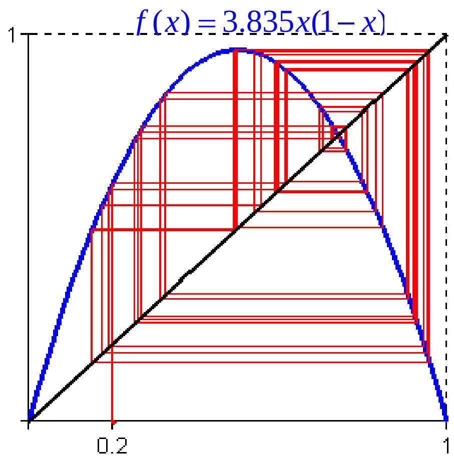


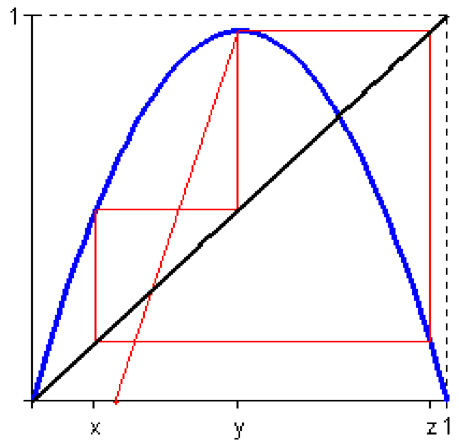


lo que indica que la dinámica de la población se acerca a una **órbita periódica de orden 8** que se repite indefinidamente. Lo mismo ocurre partiendo desde *casi* cualquier población inicial, lo que indica que la órbita periódica de orden 8 es **estable**.

¿Cuál es la órbita de periodo 8 a la que converge?

7. Si la curva de crecimiento es algo mayor (la de la figura), partiendo de *casi* cualquier población inicial la población a largo plazo tiende a estabilizarse en la siguiente situación planteada en la figura (en la segunda se prescinde de los primeros pasos y sólo aparece la situación a largo plazo):





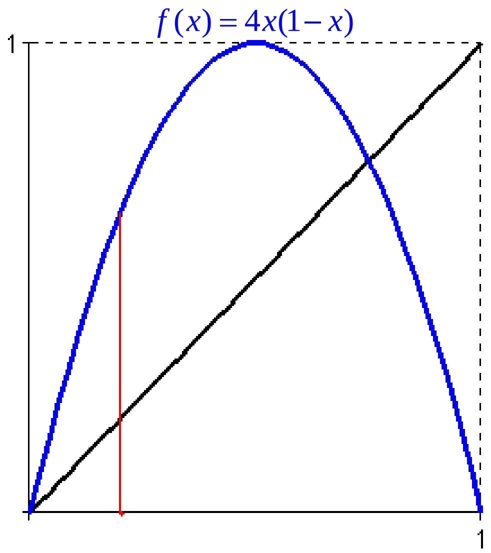
lo que indica que la dinámica de la población se acerca a una **órbita periódica de orden 3** que se repite indefinidamente: $\ldots x, y, z, x, y, z, x, y, z, \ldots$. Lo mismo ocurre partiendo desde *casi* cualquier población inicial, lo que indica que la órbita periódica de orden 3 es **estable**.

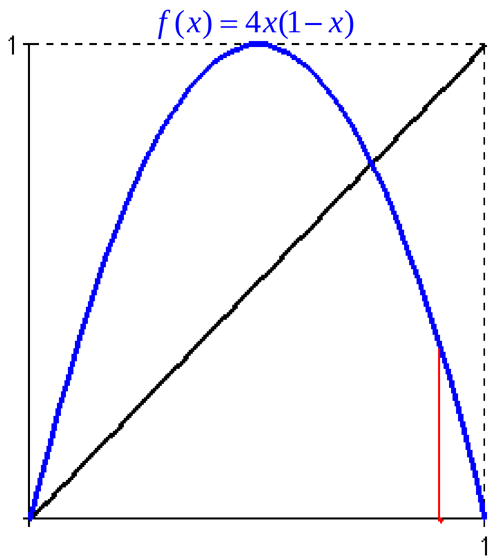
¿Cuál es la órbita de periodo 3 a la que converge?

8. Para otros valores de a, en la ecuación del sistema dinámico $f(x)=ax(1-x)$, la órbita de *casi* cualquier población inicial converge a órbitas periódicas de distinto orden. Encuentra el orden y la órbita en los siguientes casos:

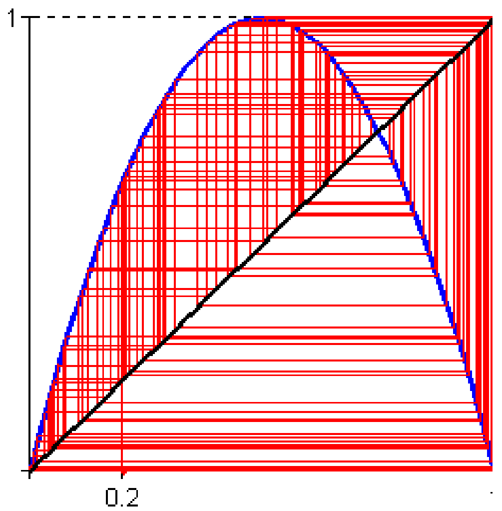
	Orden	Órbita
$a=3,627$		
$a=3,702$		
$a=3,740$		

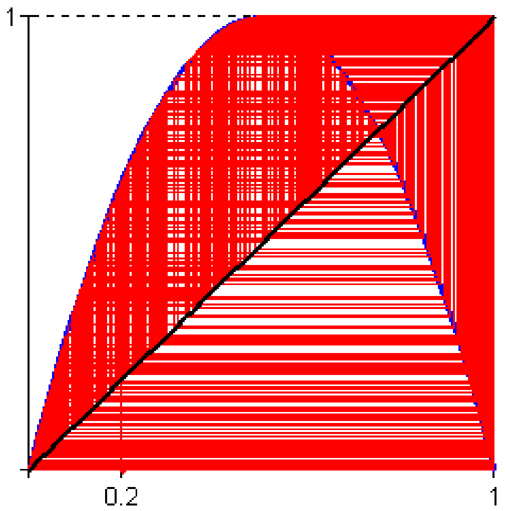
9. Si la curva de crecimiento es todavía mayor, llegando a ocupar todo el cuadrado, la dinámica ya no es tan estable como en los casos anteriores. Para comprobarlo, puedes dibujar la órbita de las dos poblaciones iniciales que aparecen en las siguientes figuras:





En cualquiera de los dos casos, y en cualquier otro que te hayas planteado, la situación que se presenta a largo plazo es como la de las siguientes figuras (la primera con los 100 primeros pasos y la segunda con los 500 primeros):



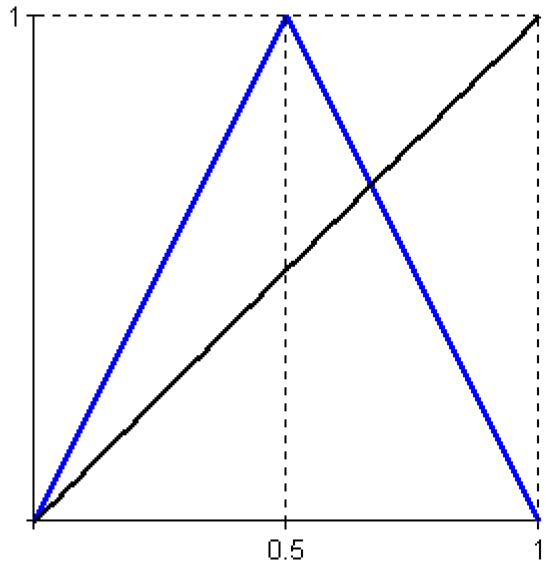


Observa que no presenta ninguna regularidad. La dinámica recorre todos los posibles tamaños de población de forma aparentemente aleatoria: el sistema dinámico presenta **caos**.

10. El matemático ruso Sarkovski ha probado un teorema, llamado **teorema de Sarkovski**, que asegura que cuando un sistema dinámico tiene una órbita periódica de orden 3 entonces también tiene órbitas periódicas de todos los órdenes. Lo que ocurre, en general, es que todas estas órbitas periódicas son inestables, por lo que son muy difícil de encontrar.

El sistema dinámico de la actividad 7 tiene una órbita periódica de periodo 3 y, por el teorema de Sarkovski, tendrá órbitas de todos los periodos (2, 3, 4, 5, 6, …), pero estas órbitas son inestables por lo que sólo se pueden encontrar con exactitud, lo que es difícil al ser, además, irracionales. Lo mismo ocurre con el sistema dinámico de la actividad 9.

Sin embargo, el sistema dinámico asociado a la función de la siguiente figura, que es también caótico, alcanza las orbitas periódicas en puntos racionales por lo que, a pesar de ser inestables, sí se pueden encontrar.



Encuentra las órbitas de los siguientes puntos indicando en cada caso si existe punto fijo u órbita periódica (con el orden correspondiente):

x_0	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	…	Punto fijo u órbita	Orden
2/3									
2/5									
8/9									
2/15									