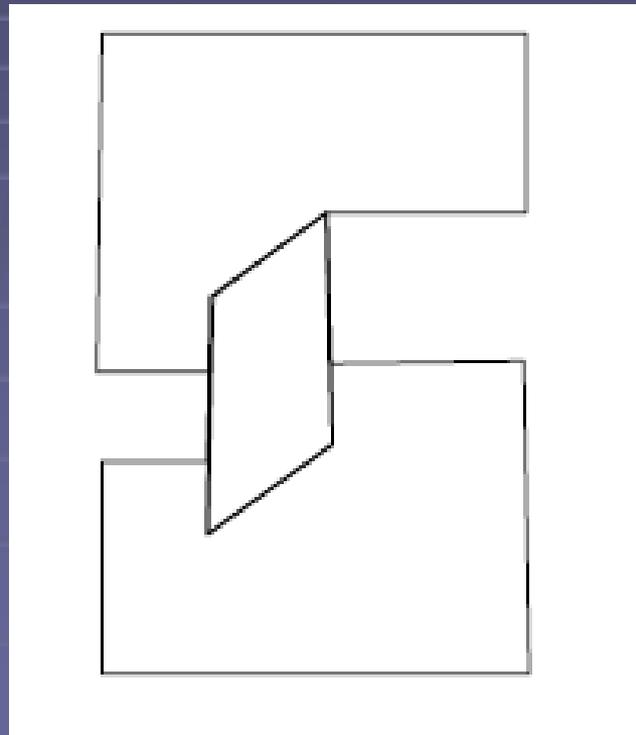


# Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora

*Rafael Ramírez Uclés  
Pablo Flores Martínez*

¿Ayuda la visualización a argumentar?

Construir con un folio

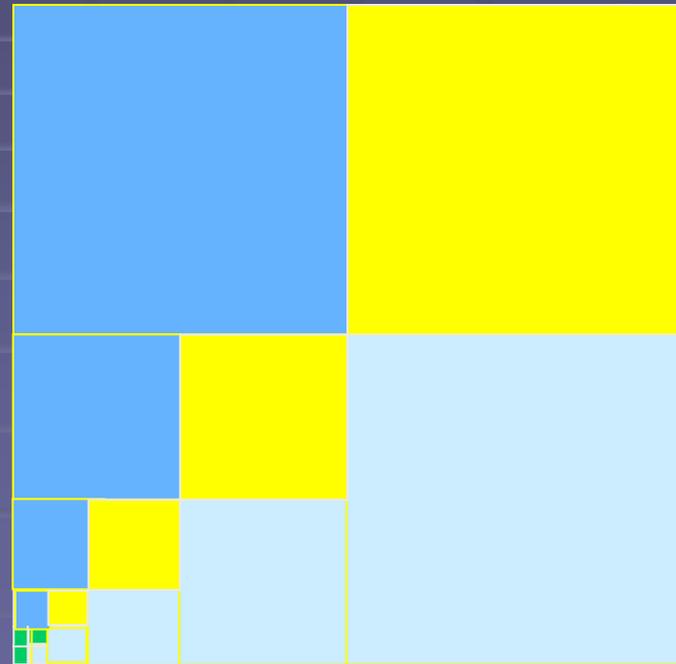
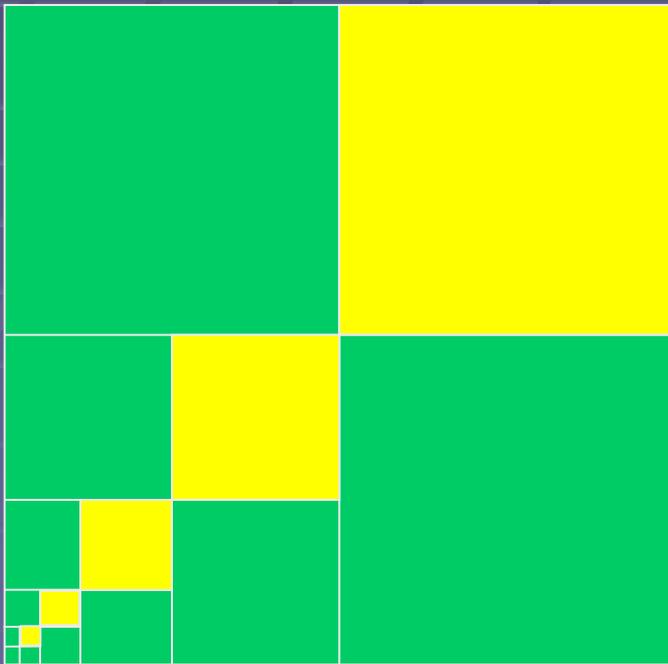


¿Ayuda la visualización a argumentar?

Obtener la porción del área del cuadrado representada en indefinidamente e

Visualmente:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$



# Introducción

- Talento matemático se asocia con comportamiento analítico y lógico (son diestros en cálculo mental, en secuencias lógicas, razonamiento algebraico, etc.). Capacidad Innata y precocidad (Estudios clásicos niños con talento).
- Miguel de Guzmán, características de especialmente dotados en resolución de problemas matemáticos (formulación espontánea de problemas, flexibilidad en uso de datos, habilidad para organizar datos, riqueza de ideas, originalidad de interpretación, habilidad para transferir ideas, capacidad de generalizar y otras características).

# Introducción

- Desde hace tiempo se reconoce la importancia de la visualización en razonamiento matemático.
- Miguel de Guzmán: visualización en razonamiento en análisis matemático. (1996, *El rincón de la pizarra*)

*“Al ser nuestra percepción prioritariamente visual no es de extrañar que el apoyo en lo visual esté presente en las tareas de matematización”.*

# Introducción

- Hipótesis: Importancia de la visualización en Matemáticas
- En ESTALMAT deberíamos ocuparnos de visualización, desarrollarla en alumnos.
- *La visualización se puede desarrollar.* (Gardner, Teorías de inteligencias múltiples).

# Introducción

- **Objetivo:** Analizar capacidades visualizadoras de alumnos con talento matemático y forma de desarrollarlas
- Conocer nivel en que visualización es componente del talento matemático y formas de instrucción para desarrollarla, nos ayuda a elaborar buenas prácticas docentes en programa de atención a la diversidad que supone ESTALMAT.

# Introducción

- Pocos estudios sobre visualización en niños con talento. Kruteskii (1976): en niños con talento matemático prevalece uso de estrategias algebraicas sobre visualizadores para resolución de problemas. Visualización de relaciones matemáticas abstractas no era necesariamente componente en estructura de habilidades matemáticas, aunque determinaba el tipo de talento.
- Presmeg (2006) hay pocos estudios específicos que relacionen visualización con talento matemático, pocos han aportado evidencias empíricas para saber qué aspectos de instrucción ayudan a profesores a mejorar instrucción de estos alumnos.

# Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora

La comunicación está estructurada en:

- Justificación
- Descripción de las actividades
- Expectativas de la investigación

# Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora

- Justificación
  - Visualización
  - Diseño de la sesión
  - Selección de actividades
- Descripción de las actividades
- Expectativas de la investigación

# Justificación

- Intención: Diseñar buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización de niños con talento matemático

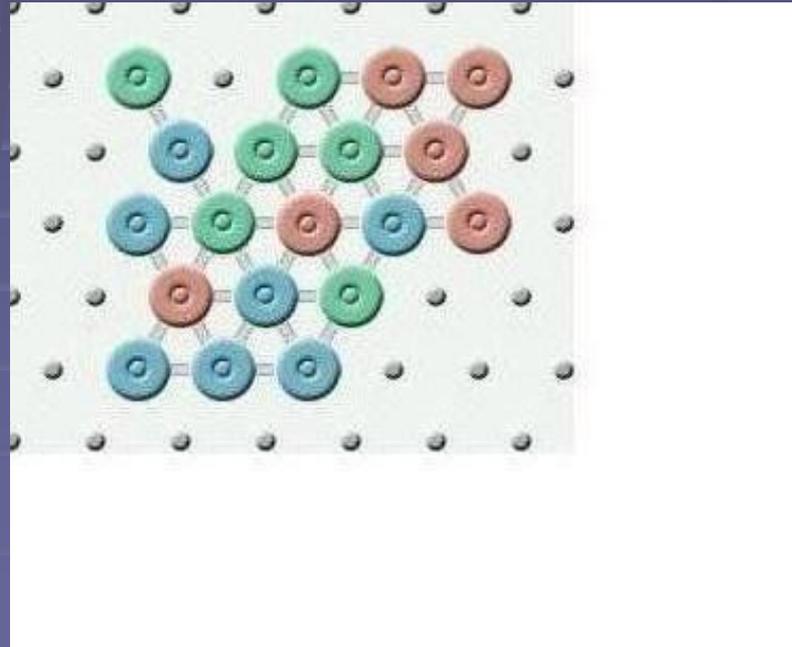
# Justificación: Visualización

- Gutierrez, (2006) Conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.
- Recopilación de habilidades psicológicas necesarias para visualización (Del Grande, 1990) cita distintas dimensiones de percepción espacial, según varios autores y selecciona siete de las destacadas por Hoffer (1977) por relevancia en estudio de matemáticas y geometría.

# Justificación: Visualización

## Dimensiones de la visualización:

1.-**Coordinación ojo-motor:** coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.



(Proceso de construcción)

# Justificación: Visualización

2.-Percepción figura-contexto: reconocer figura aislándola de contexto, en que aparece camuflada o distorsionada por superposición de otros elementos gráficos.

(Reconocer la estructura óptima de seis fichas en la de siete)



# Justificación: Visualización

3.-**Conservación de percepción:** reconocer que objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura...) aunque cambie de posición y deje de verse completo.

(El número de segmentos será siempre el mismo)



# Justificación: Visualización

4. **Percepción de posición en espacio:** relacionar un objeto en espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos.

(definir estructuras equivalentes)



# Justificación: Visualización

**5.-Percepción de las relaciones espaciales:** identificar correctamente relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.)

(Diferencias entre el tablero Hexagonal y cuadrado)



# Justificación: Visualización

**6.-Discriminación visual:** identificar semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición

(Representantes de cada clase de equivalencia)



# Justificación: Visualización

7.-**Memoria visual:** recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros. Memoria fotográfica

(Formar estructuras distintas modificando la anterior)



# Justificación: Diseño de la sesión

## Objetivos:

- Plantear actividades de enriquecimiento en contenidos de **geometría dinámica** (relativos a movimientos en plano y espacio) y del lenguaje y **razonamiento matemático** (definición, conjetura, demostración, contraejemplo, inducción, deducción).
- Trabajar conceptos geométricos de manera dinámica e intuitiva y resolver tareas de movimientos en el plano. Proponer secuencia de actividades que obligue a razonar utilizando visualización (sin herramientas algebraicas o analíticas).

# Justificación: Diseño de la sesión

- Fin enriquecedor de este programa (no avanzar en programas de clase, profundizar en aspectos nuevos).

Frente a tratamiento habitual en clase: describir resultado final tras aplicar movimientos a figuras.



Objetivo sesión: Reconocer y describir **movimientos como transformaciones que dejan invariantes las figuras y permiten establecer criterios de igualdad.**

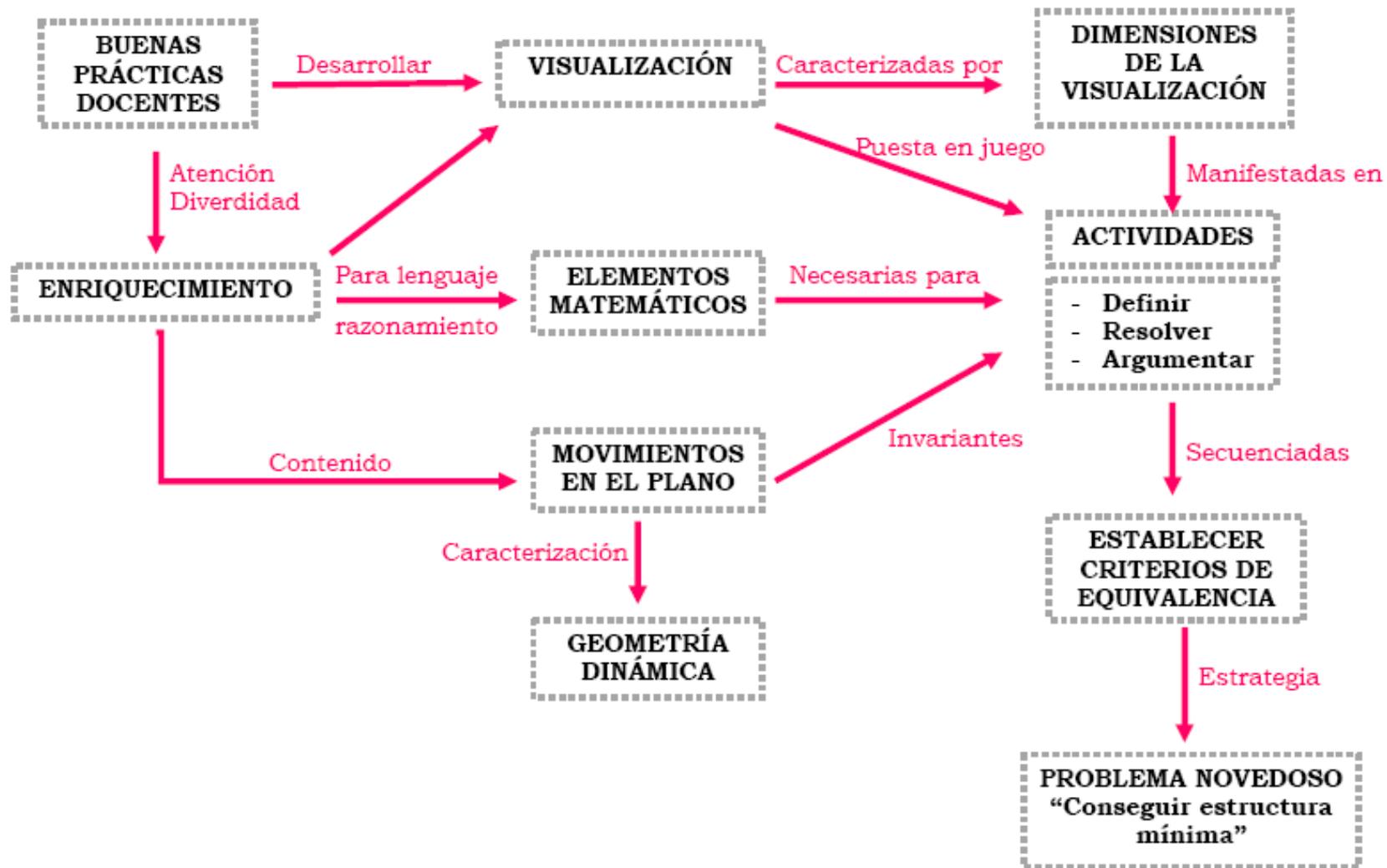
- Objetivo final: **RESOLVER UN PROBLEMA NOVEDOSO.** Para ello, debían definir la igualdad de figuras bajo movimientos en el plano y en el espacio.

# Justificación: Selección de actividades

## Diseño de actividades:

- Procurar que conceptos matemáticos (movimientos en plano, identidad de figuras) y visualización aparezcan de manera funcional
- Abordar contenidos no tratado en currículo
- Promover al máximo puesta en juego y desarrollo destrezas visualizadoras.
- Se manifiesten dimensiones de visualización para: Definir, Resolver y Argumentar.

# Diseño de la sesión



# Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora

- Justificación
- Descripción de las actividades
  - Recurso: “Constelaciones: el juego de los tres colores
  - Introducción al problema: buscar la estructura mínima
  - Formalización y demostración
  - Generalización
  - Definición
- Expectativas de la investigación

# Actividades

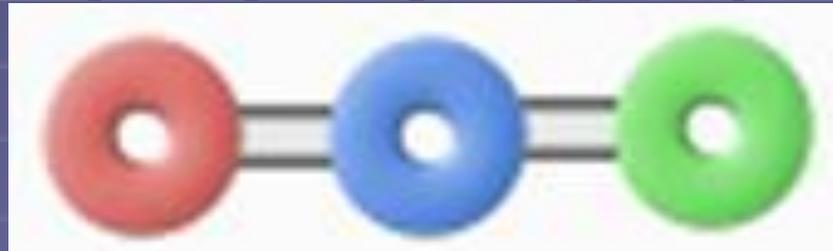
## Constelaciones: el juego de los tres colores

- Juego de mesa con propiedades geométricas y numerosas aplicaciones para aprendizaje matemático (Teorema de Tales, combinatoria, estructuras geométricas, característica de Euler, grafos conexos...). Versión original patentada en colaboración con Universidad de Granada
- Versión informática ha sido proyecto subvencionado por Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado de Junta de Andalucía en II Concurso de Materiales y Recursos Educativos Digitales en Software Libre

# Actividades

## Constelaciones: el juego de los tres colores

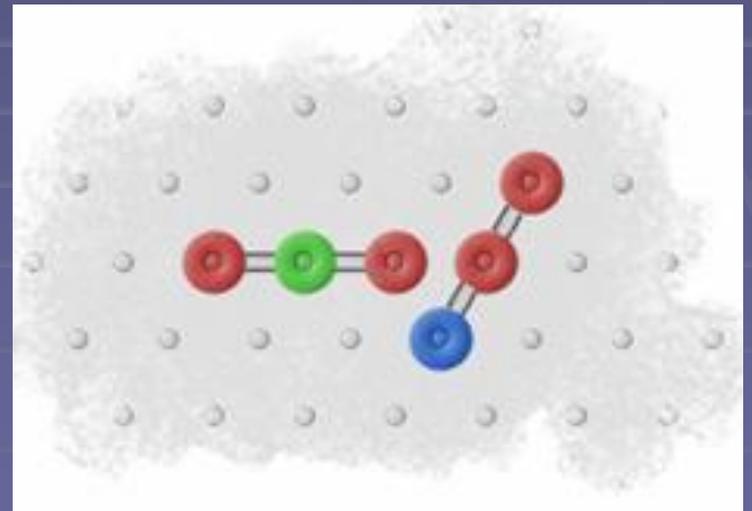
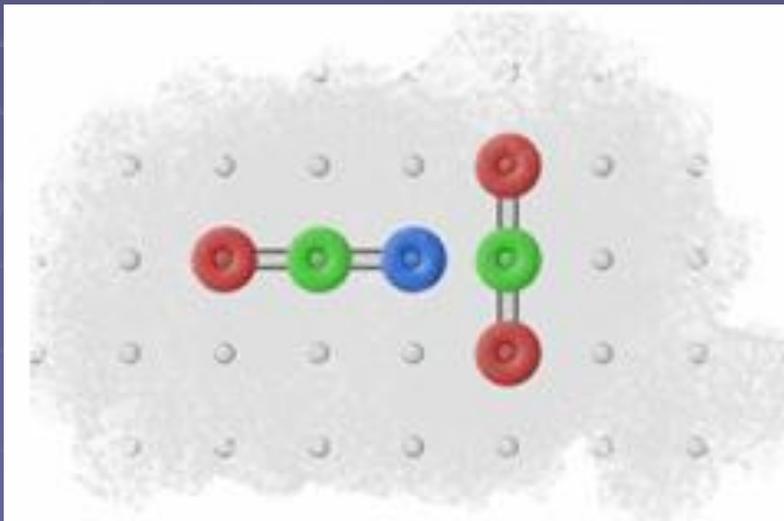
- 18 fichas diferentes, todas las posibles combinaciones de tres colores: rojo, verde y azul.
- La ficha compuesta por tres círculos (discos), alineados y unidos por dos segmentos, de igual longitud que diámetro:



# Actividades

## Constelaciones: el juego de los tres colores

- Tablero que contiene pivotes en los que depositar fichas. Fichas se pueden girar y trasladar a en tablero antes de colocarlas.
- Ejemplo: dos fichas colocadas en tablero cuadrado (izquierda) o hexagonal (isométrico, derecha)



# Actividades

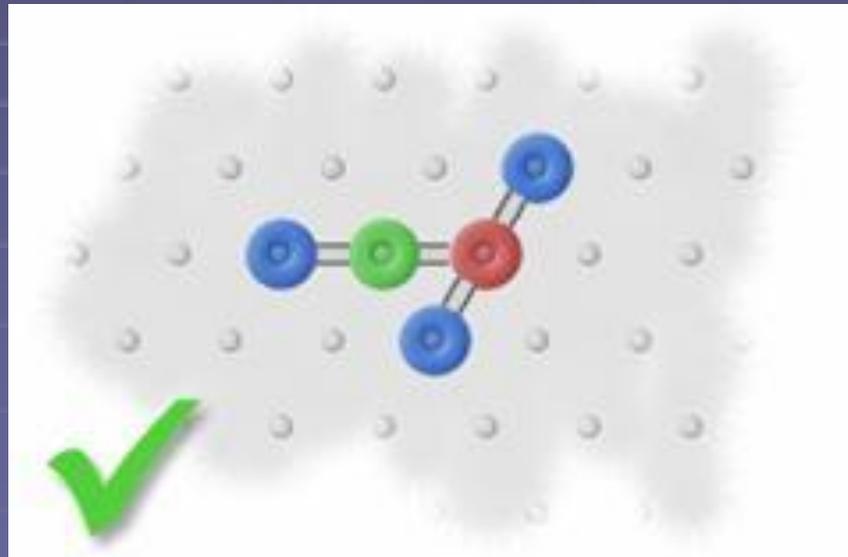
## Constelaciones: el juego de los tres colores

- *Debes colocar las 18 fichas de colores en el tablero, de manera que el número de discos visibles sea el mínimo posible; las fichas se pueden solapar entre sí, siempre que cumplan unas reglas muy fáciles.*

# Actividades

## Constelaciones: el juego de los tres colores

- Dos fichas se unen al superponer un único círculo de una con otro del mismo color de la otra. Sólo pueden contactar en uno de sus círculos (segmentos no pueden superponerse ni contactar con círculos ni otros segmentos).



# Actividades

## Constelaciones: el juego de los tres colores

- Videojuego

Actividades: Introducción al problema:  
buscar la estructura mínima

- Actividad 1- Determina una estructura con el mínimo número de círculos utilizando 18 fichas y dibújala (Selecciona tablero cuadrado y un solo color)

Justifica que es una estructura mínima

## Actividades: Introducción al problema: buscar la estructura mínima

- Actividad 2.- Determina la estructura mínima con seis fichas, dibújala y justifica por qué es la mínima.
- ¿Todas las estructuras mínimas serían la misma?

## Actividades: Introducción al problema: buscar la estructura mínima

- Actividad 3.- Determina la estructura mínima con siete fichas, dibújala y justifica por qué es la mínima. ¿Todas las estructuras mínimas serían la misma?

Actividades: Introducción al problema:  
buscar la estructura mínima

- (Seleccionamos un solo jugador, plantilla **HEXAGONAL** y un solo color).

Actividad 4- Determina la estructura mínima utilizando 6 fichas. ¿Valdría justificación de que es la mínima de la actividad 2?

Actividades: Introducción al problema:  
buscar la estructura mínima

(Seleccionamos un solo jugador, plantilla  
**HEXAGONAL** y un solo color).

- Actividad 5- Determina la estructura mínima utilizando 7 fichas. ¿Valdría la justificación de que es la mínima de la actividad 3?

# Actividades: Formalización y demostración

(Seleccionamos un solo jugador, plantilla CUADRADA y un solo color)

Actividad 6- Vamos a profundizar en la determinación y justificación de la estructura es mínima partiendo de situación más sencilla, reduciendo el número de fichas. Construye todas las estructuras distintas con **dos** fichas. Dibújalas.

## Actividades: Formalización y demostración

- Actividad 7.- Construye todas las estructuras distintas con **tres** fichas. Dibújalas.
- Actividad 8: Busca y señala las estructuras de 2 fichas encontradas en las estructuras de 3 fichas

# Actividades: Generalización

- Actividad 9: Caso hexagonal, construye todas las estructuras con **dos** fichas. ¿Cuál es la mínima? ¿Son equivalentes las estructuras mínimas? (¿Es única la estructura mínima?)
- Actividad 10: Caso hexagonal, construye las estructuras con **tres** fichas. ¿Cuál es la mínima? ¿Son equivalentes las estructuras mínimas? (¿Es única la estructura mínima?)
- Actividad 11: Señala las estructuras de 2 fichas en las de 3 fichas.

# Actividades: Definición

- ESTRUCTURAS IGUALES

- Actividad 12: Definir individualmente estructuras iguales:

*Dos estructuras son iguales si .....*

- Actividad 13: Definir en grupo estructuras iguales:

*Dos estructuras son iguales si.....*

# Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora

- Justificación
- Descripción de las actividades
- Expectativas de la investigación
  - Investigación de diseño
  - Conclusiones tras la prueba piloto
  - Expectativas

# Investigación de diseño

- Sesión tiene objetivo formador, enriquecer visión espacial de alumnos. Objetivo general de investigación es analizar visualización de estudiantes y cómo se desarrolla en las sesiones.

Objetivo general se concreta en objetivos específicos:

- Estudiar qué dimensiones de visualización se ponen en juego en actividades de enseñanza
- Caracterizar dimensiones de visualización más comunes
- Identificar dimensiones específicas de algunos estudiantes, si permiten identificar grupos de dimensiones que destacan a estudiantes mejores visualizadores.

# Investigación de diseño

- Investigación con metodología de *investigación de diseño*, en tres sesiones:
- Sesión 1: Visualización: Movimientos en plano. Igualdad de figuras, unicidad. Teselaciones.
- Sesión 2: Visualización: relleno del espacio (propiedades). Puzzles de Pirámides.
- Sesión 3: Argumentación visual en resolución de problemas.

# Investigación de diseño

## Antes de intervenir en el aula:

- Búsqueda bibliográfica y experiencia de investigadores (estudios piloto):
- Definir problema de investigación
- Justificar interés y pertinencia de este estudio
- Elegir, justificar elección y describir sujetos participantes en estudio
- Diseñar, en líneas generales, secuencia de intervenciones en aula y justificarlo
- Identificar metodologías de enseñanza adecuadas según objetivos de investigación
- Elaborar hipótesis de investigación contrastables a partir de intervenciones

# Investigación de diseño

## Antes de cada intervención:

- Identificar objetivos de intervención
- Diseñar siguiente intervención, teniendo en cuenta:
  - Análisis de datos recogidos,
  - Revisión bibliográfica
  - Conocimientos previos de alumnos
  - Trabajo realizado
- Justificar diseño y temporalización de intervención, decisiones tomadas a partir de análisis de datos recogidos
- Elaborar hipótesis sobre resultados esperados en intervención. Prever posibles reacciones de alumnos y dificultades que pueden presentarse

# Investigación de diseño

## En cada intervención en el aula:

- Realizar recogida de datos exhaustiva: grabaciones en video o en audio, hojas de trabajo, toma de notas por observadores, etc...
- Modificar de forma justificada diseño de intervención si se considera conveniente de acuerdo con objetivos concretos de intervención

# Investigación de diseño

Después de cada intervención:

- El investigador-docente, toma notas sobre intervención que complementen y ayuden a comprender los datos recogidos
- Analizar datos recogidos
- Contrastar resultados con hipótesis y, en su caso, reformular alguna de hipótesis para futuras intervenciones

# Investigación de diseño

Después de recogida de datos:

- Transcribir grabaciones realizadas
- Organizar datos
- Analizar datos (utilizar información obtenida en búsqueda bibliográfica previa, para guiar dicho análisis)
- Dar respuesta, si es posible, a objetivos del estudio
- Contrastar resultados con obtenidos en otros estudios
- Elaborar un modelo que describa aprendizaje o desarrollo de alumnos, de docentes o de tareas
- Si es necesario, ampliar búsqueda bibliográfica

# Investigación: conclusiones tras la prueba piloto

Para análisis, elaboramos una nueva tabla de especificación que recoge actividades propuestas y tareas específicas de visualización asociadas.

Apreciamos qué aspectos de visualización se reflejaban en respuestas de alumnos.

Todos los alumnos encuentran la mínima estructura pedida en la actividad 1.2, (ninguno expone un argumento que lo justifique completamente)

# Investigación: conclusiones tras la prueba piloto

- Percepción de relaciones espaciales: individualmente sólo tres alumnos (en tres grupos diferentes) consideraban la simetría para establecer igualdad de figuras, todos los grupos la exponen en definición colectiva. Ningún alumno (individual ni en grupo) considera la simetría para definir igualdad de dos cubos.
- Definiciones de grupo enriquecen las individuales. A veces prevalece una opinión más pobre de un único alumno sobre las más precisas de compañeros de grupo (inseguridad de algunos alumnos para defender sus razonamientos o liderazgo impuesto por mayor convencimiento de un argumento particular).

# Investigación: conclusiones tras las pruebas piloto

- Alumnos manifiestan mayoritariamente dimensiones de visualización en alguno de ejercicios.
- Todos manifiestan de manera espontánea dimensiones 3 y 4 en respuestas individuales y las 3, 4 y 5 en grupo (la dimensión 6 estaba exigida explícitamente en las actividades).
- De manera natural los alumnos han empleado estrategias visualizadoras cuando se les exige explícitamente.

# Investigación: conclusiones tras la prueba piloto

- Los alumnos razonan visualmente sobre ejemplos concretos. Es necesario razonar sobre “casos generales”, distinguiendo todos los posibles.
- Técnicas de argumentación: Para argumentación visual es necesario conocer elementos matemáticos que la apoyen: contraejemplos, definiciones, caracterización de las propiedades, inducción, analogía, generalización...
- El uso de ejemplos concretos con material manipulable (para validar ejemplos o contraejemplos) les obligará a dar mayor rigor y exactitud en sus definiciones.

# Investigación: expectativas

- Los alumnos han utilizado aspectos visualizadores al no encontrar argumentos algebraicos para resolver actividades. Les cuesta argumentar utilizando estrategias visuales, lo hacen de manera incompleta e intuitiva. Necesitan técnicas de argumentación visual para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

# Investigación: expectativas

- Todos los alumnos manifiestan visualización cuando se les pide en las tareas → Las tareas deben ser más amplias, para barrer todas las dimensiones
- Los alumnos razonan sobre ejemplos concretos → Plantear tareas generales, sin apoyos concretos
- Argumentaciones incompletas → Enseñar elementos matemáticos para razonar
- Dificultades para encontrar contraejemplos en abstracto → Utilizar material manipulativo para que encuentren ejemplos

# Muchas gracias

*El matemático que olvidara la existencia del mundo exterior (mundo sensible), sería semejante a un pintor que supiera combinar armoniosamente los colores y las formas, pero a quien le faltaran los modelos*

*Jules Henri Poincaré*