II Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas.

VI reunión nacional de Estalmat

POLÍGONOS ESTRELLADOS
ESTRELLAS
FORMAS ESTRELLADAS

ESTALMAT

CASTILLA Y LEÓN

MADRID – 13/03/2009

Inmaculada Fernández Benito

1. INTRODUCCIÓN - PROFESORES

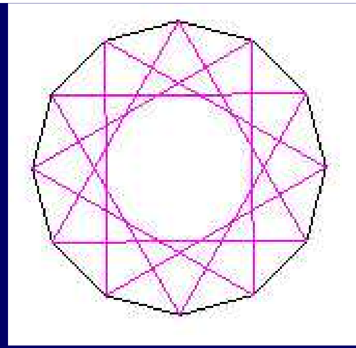
2. UNIDAD DIDÁCTICA - ALUMNOS

ESTRELLAS

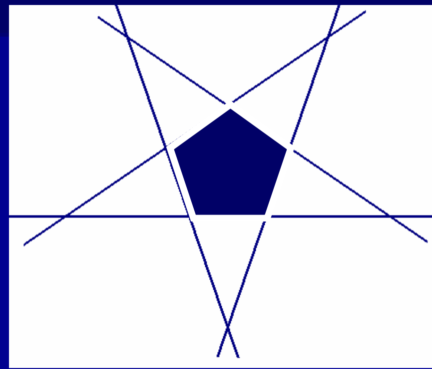
(POLÍGONOS ESTRELLADOS)

INTERPRETACIÓN 1

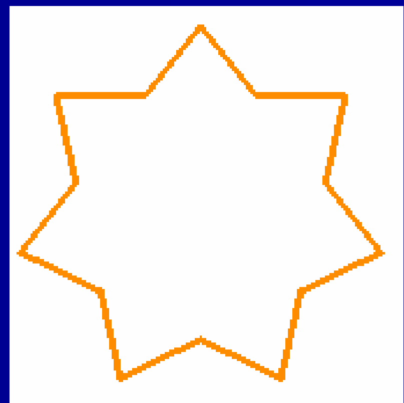
Uniendo vértices



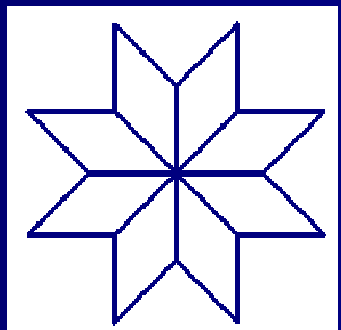
Prolongando lados

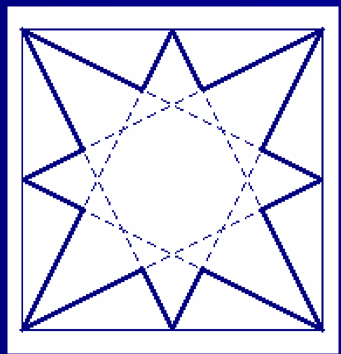


INTERPRETACIÓN 2



FORMAS ESTRELLADAS

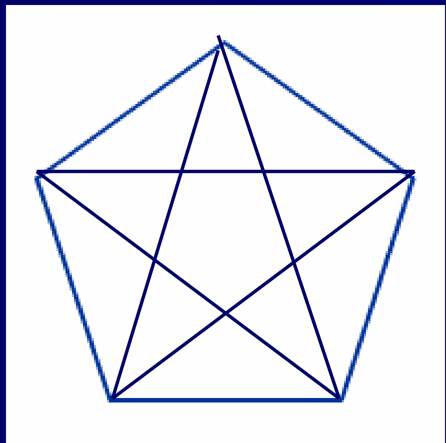


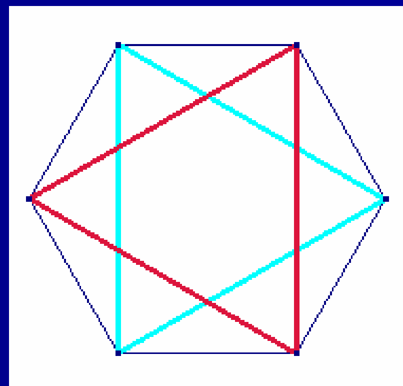


Polígonos estrellados y estrellas

1ª CONSTRUCCIÓN

A partir de un polígono regular de **n** lados. Se elige uno de sus vértices y se unen vértices no consecutivos, hasta que todo los vértices estén unidos. Se denotan por **n/q** (se saltan q-1 vértices).

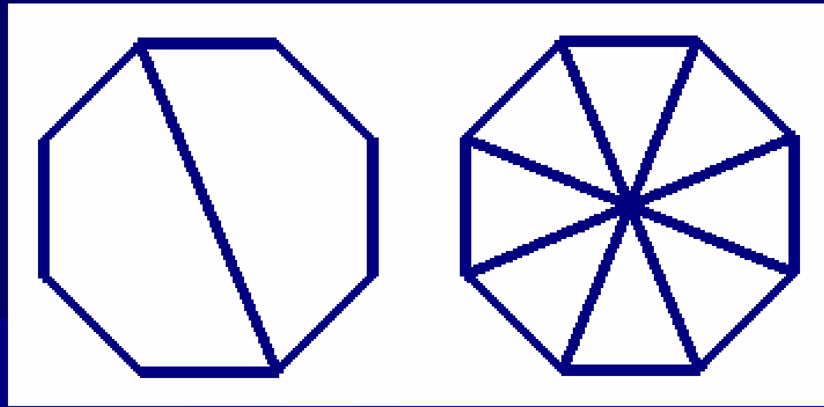




EJEMPLOS: polígono estrellado 5/2 (pentalfa o pentagrama) - estrella 6/2 (hexagrama)

UN CASO PARTICULAR

Si n es par, la construcción de la estrella n/q con q=n:2 sólo traza segmentos que dividen al polígono en dos partes de igual área.



Octógono – 8/4 (segmentos)

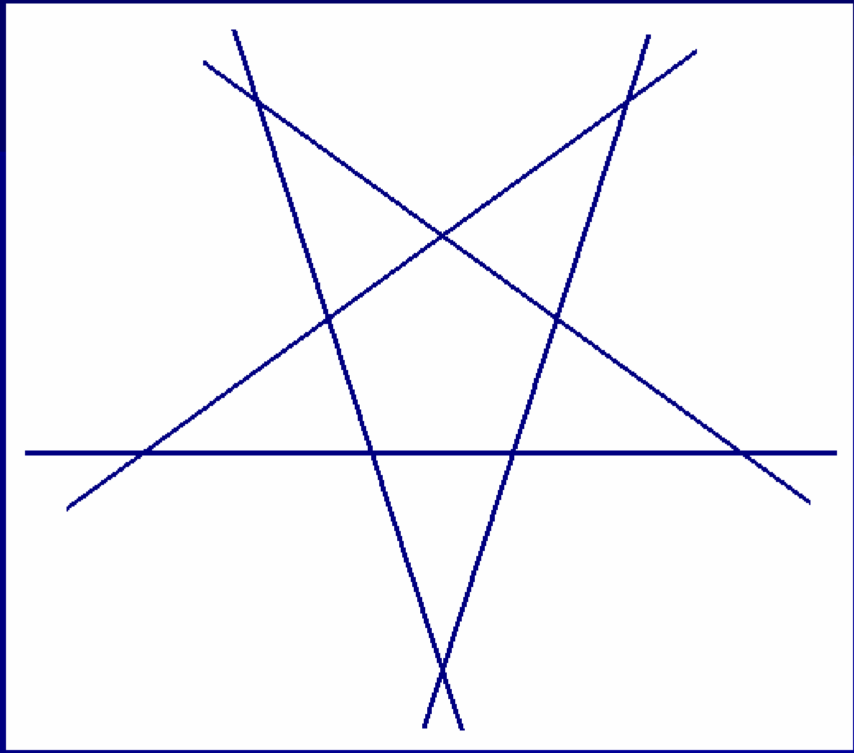
Cruz en mosaico. Sevilla

Polígonos estrellados y estrellas

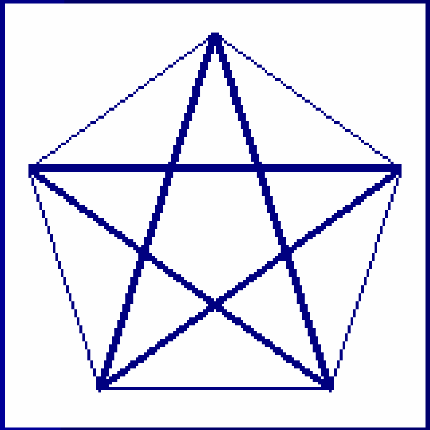
2ª CONSTRUCCIÓN

Sea un polígono regular convexo de n lados. Se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez.

En este proceso se llama **estrella** a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones de los lados del polígono.

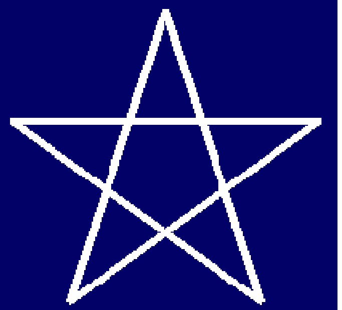


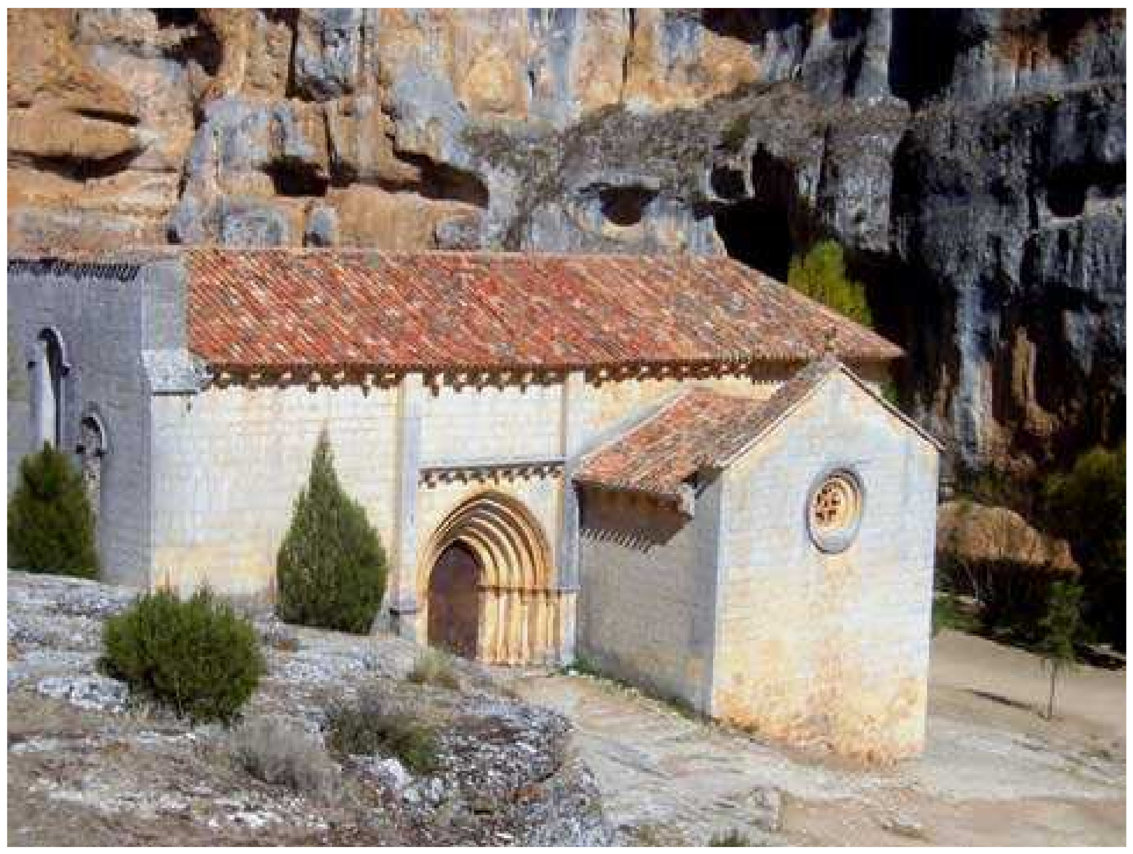
prolongando lados



uniendo vértices

Pentalfa o Pentagrama





Es el polígono estrellado 5/2.

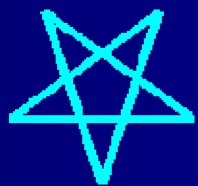
Símbolo de los pitagóricos. Símbolo de la salud y la vida.

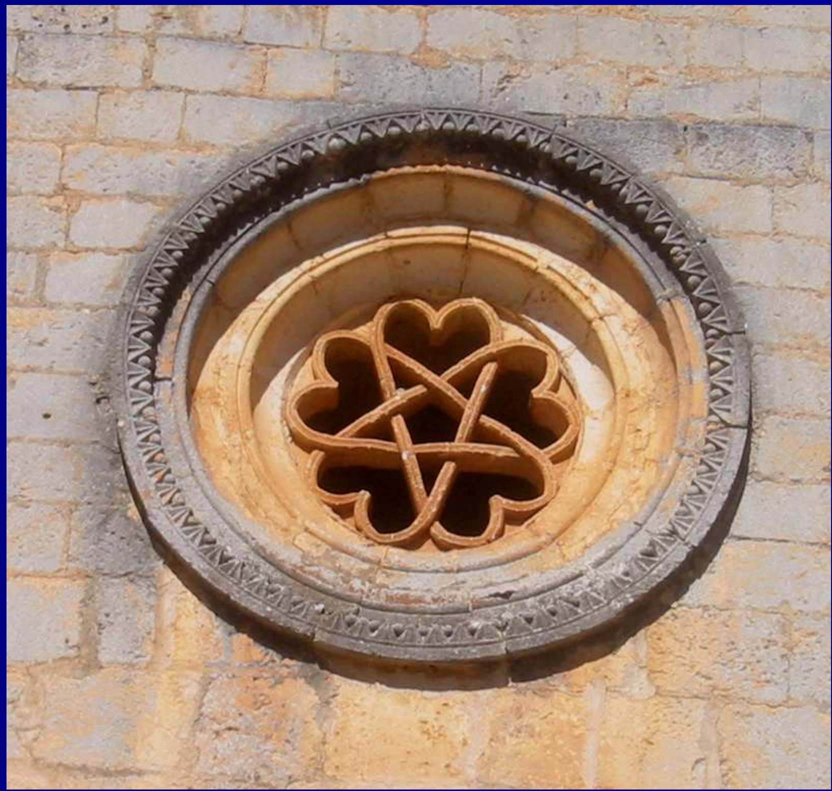
Para los judíos representa los “cinco libros Mosaicos”.

Iglesia de S. Bartolomé-Cañón del Río Lobos (S. XIII)

Pentalfa o Pentagrama

Los rosetones mandálicos de San Bartolomé están formados por diez corazones (5 pequeños y 5 largos) entrelazados, que rodean y crean la pentalfa y el pentágono. Esta enigmática celosía calada es, según algunos autores, de tracería musulmana.





Pentalfa o Pentagrama

Iglesia de S. Juan
AYLLÓN (Segovia)

Iglesia de S. Francisco
OPORTO

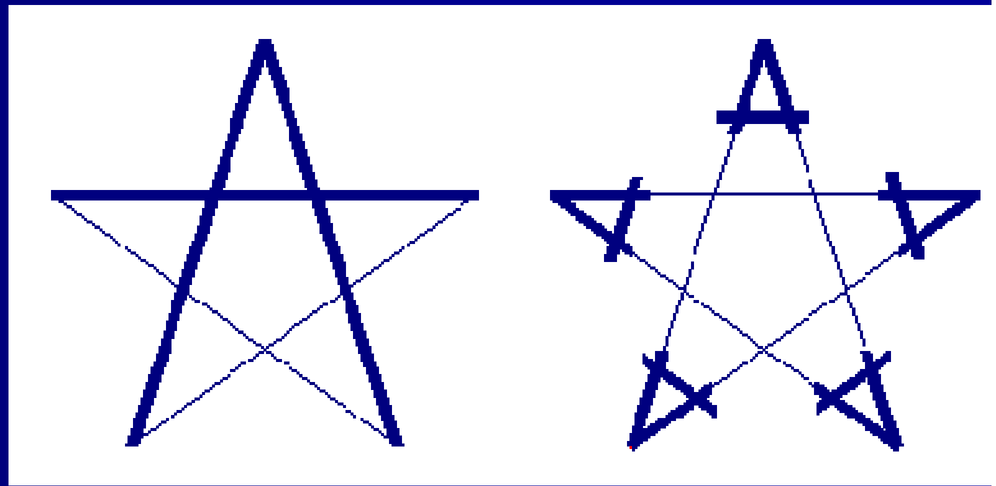
Pentalfa o Pentagrama

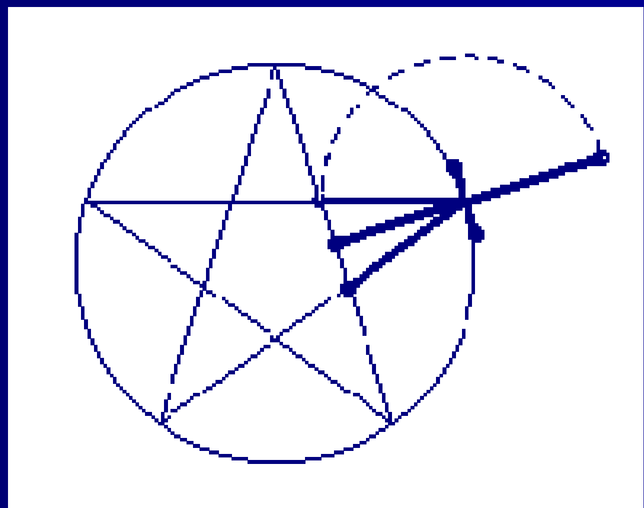
MARCAS DE CANTEROS
SOBRE PENTALFAS

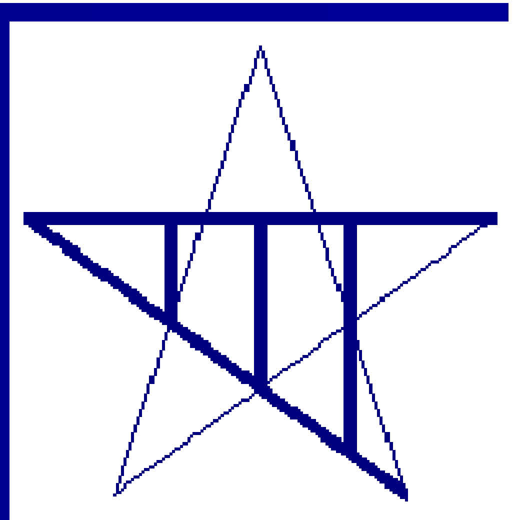
**CATEDRAL DE
BURGOS**

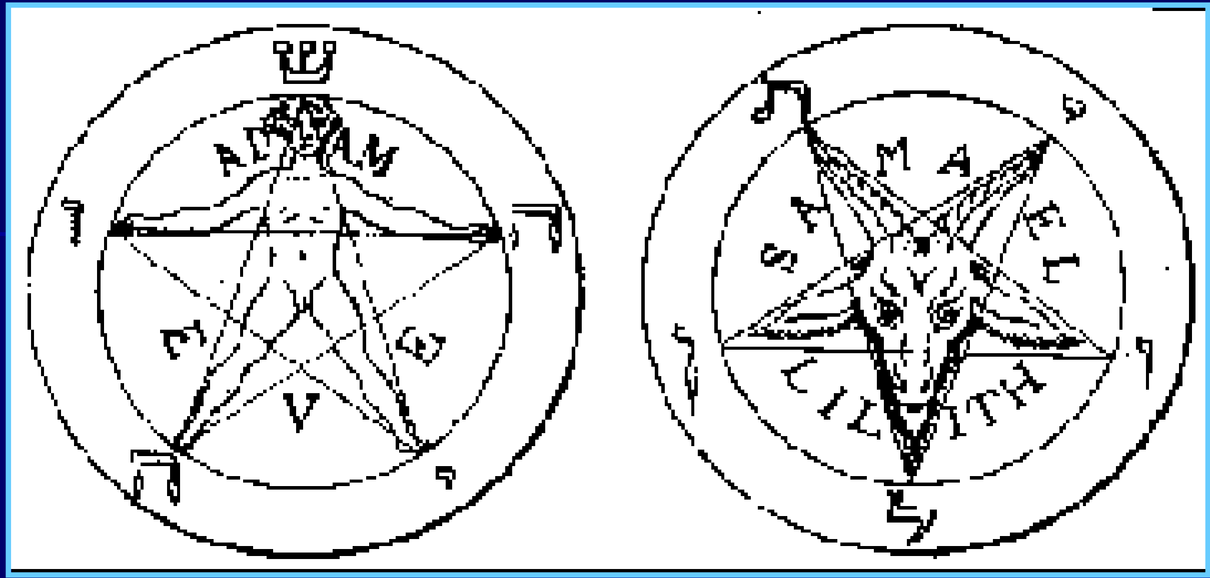
Los maestros constructores dejaban como firma SIGNOS LAPIDARIOS.

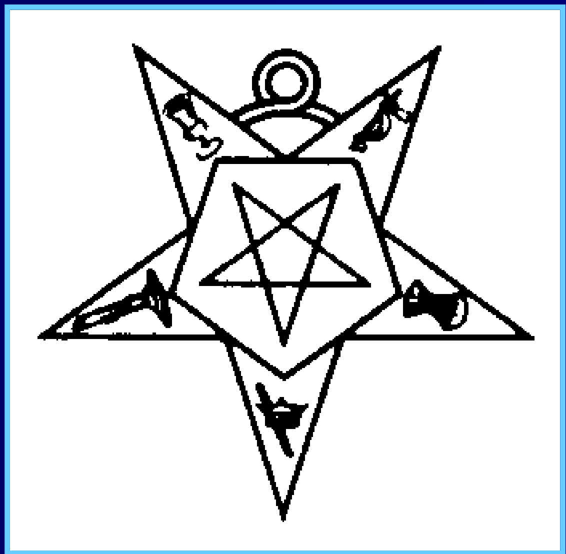
En esta época, el conocimiento sólo se podía transmitir oralmente o simbólicamente mediante el empleo de estos signos.







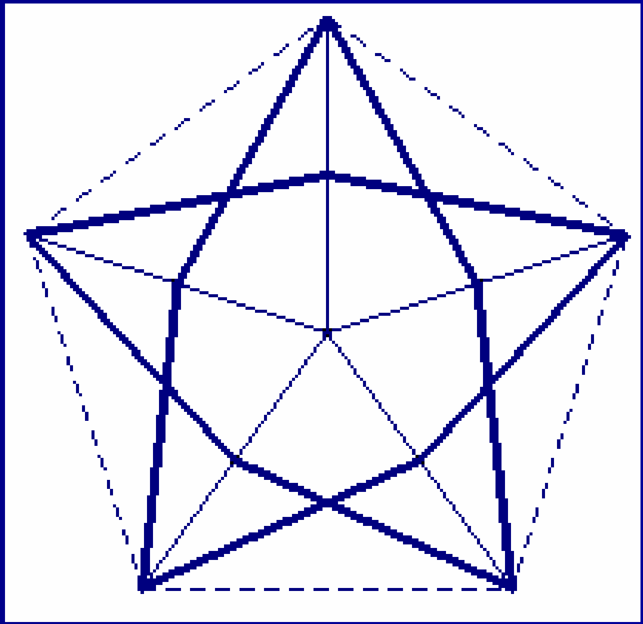




Pentalfas y formas estrelladas de cinco puntas en símbolos masónicos

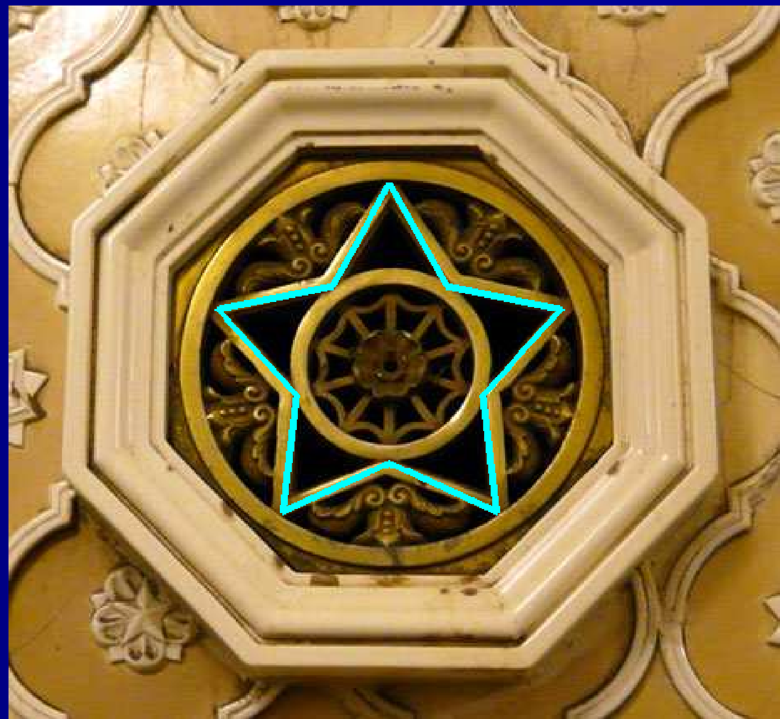
Estrella de cinco puntas (OTRA)

La variedad de pentagrama de la figura fue encontrada en la parte inferior de las actas de una logia de 1860, tal vez de esta forma deriva la Estrella Roja de los Soviets.



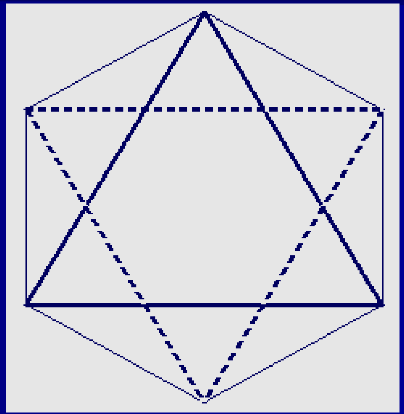
Se traza a partir de un pentágono regular, uniendo el punto medio de cada uno de sus radios con los dos vértices adyacentes.
En la parte central de la construcción aparecen cinco cuadriláteros que forman un decágono equilátero pero no regular.

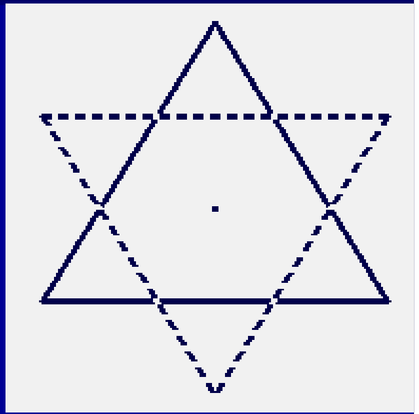
Estrella de cinco puntas (OTRA)



Hexagrama

Es la estrella 6/2 formada por dos triángulos equiláteros girados 60° uno respecto de otro.





Basílica ROMA

Sinanoga PRAGA

Iglesia LOVAINA

Hexagrama

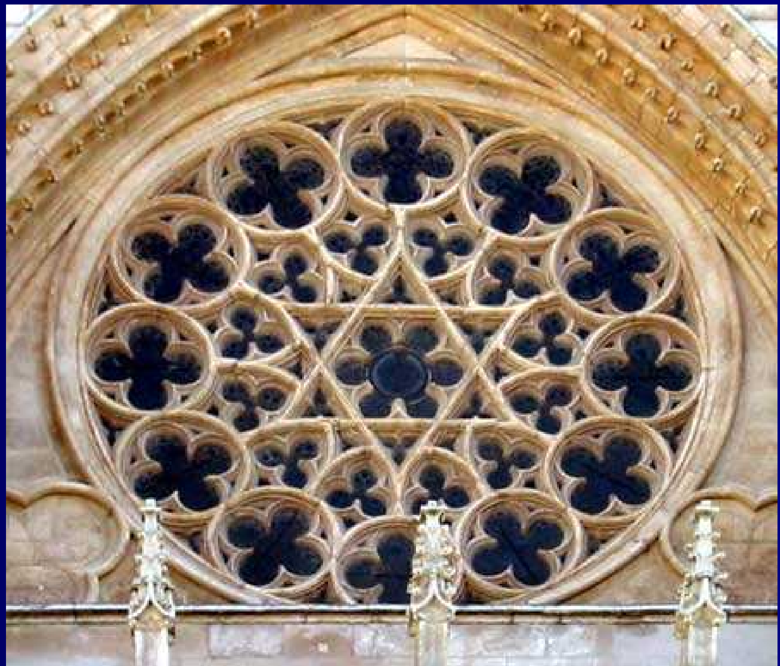
Esta figura conocida también como "estrella de David" o "sello de Salomón", además de símbolo hebreo, es utilizada, como elemento decorativo, por otras culturas y religiones.

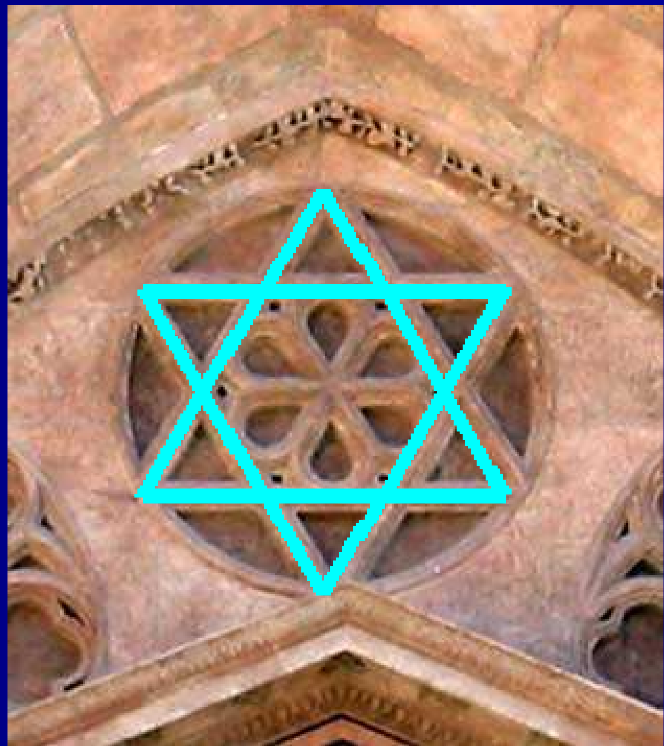
Claustro de la Catedral ÉVORA

Hexagrama

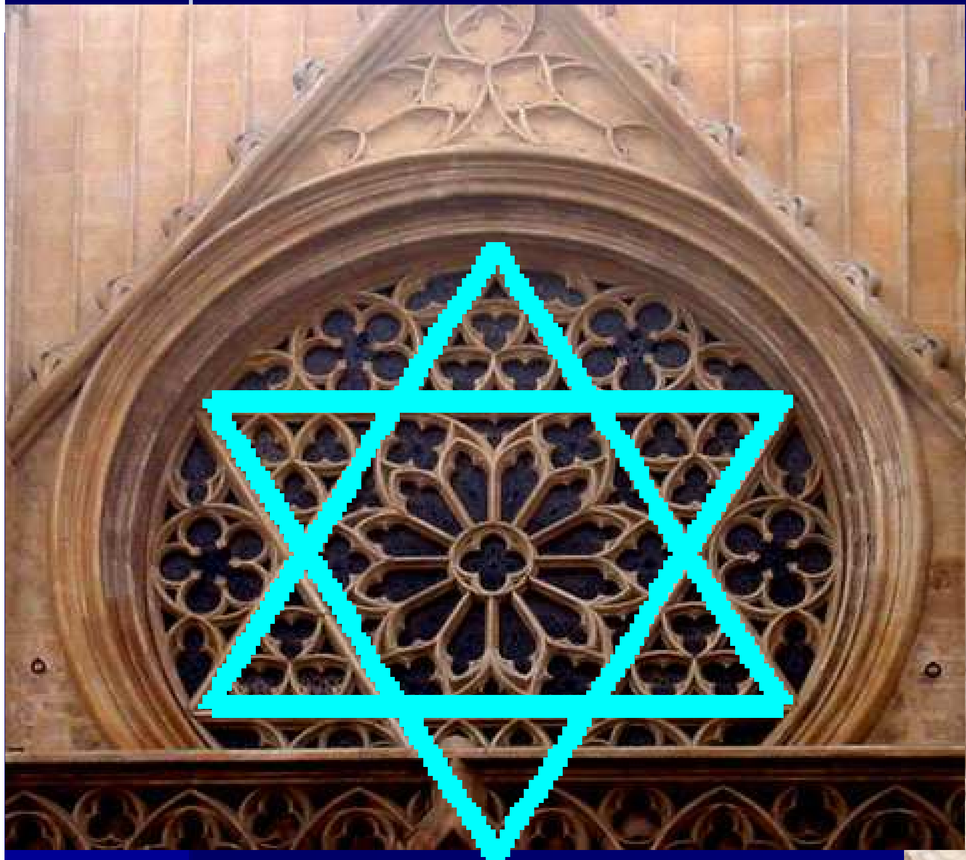
HEXAGRAMAS EN LOS ROSETONES DE LA

CATEDRAL DE BURGOS

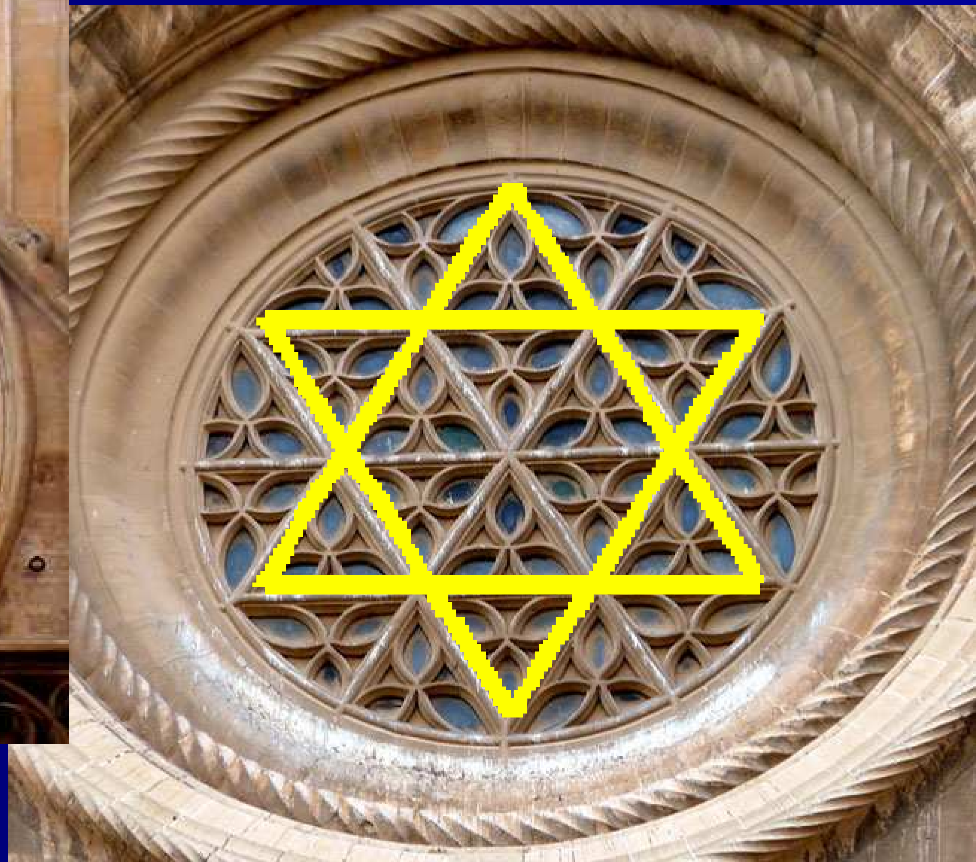




Hexagrama

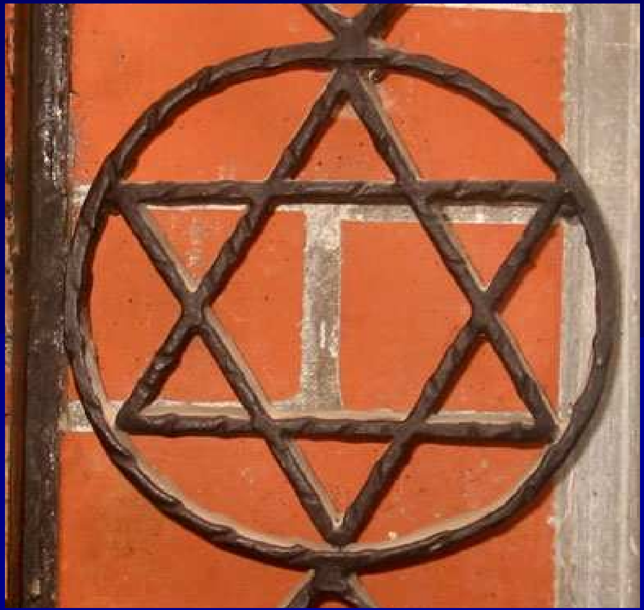


CATEDRAL DE VALENCIA

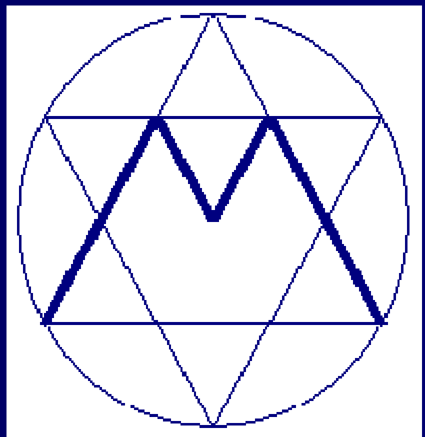


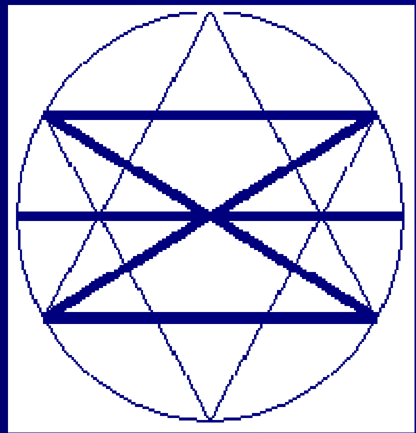
CATEDRAL DE PALMA DE MALLORCA

Hexagrama



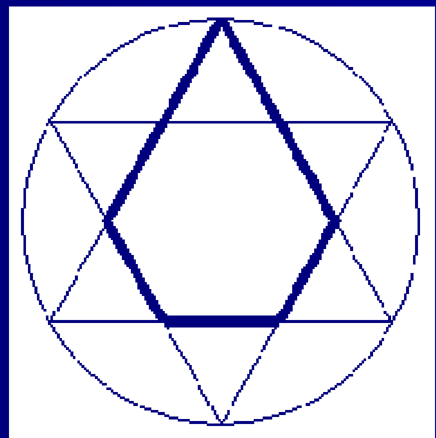
Hexagrama

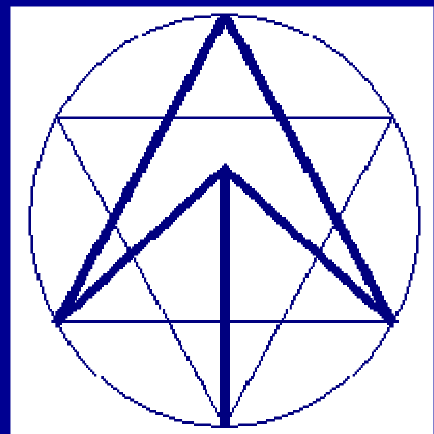




MARCAS DE CANTEROS SOBRE HEXAGRAMAS

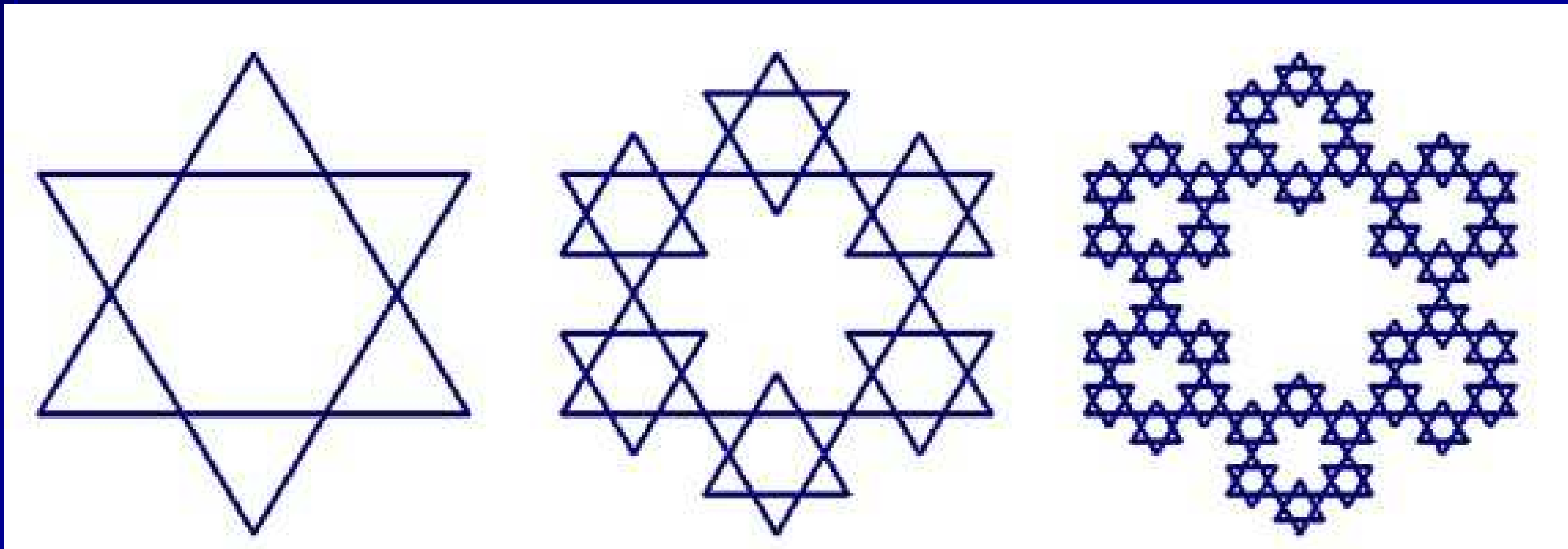
CATEDRAL DE BURGOS





Hexagrama

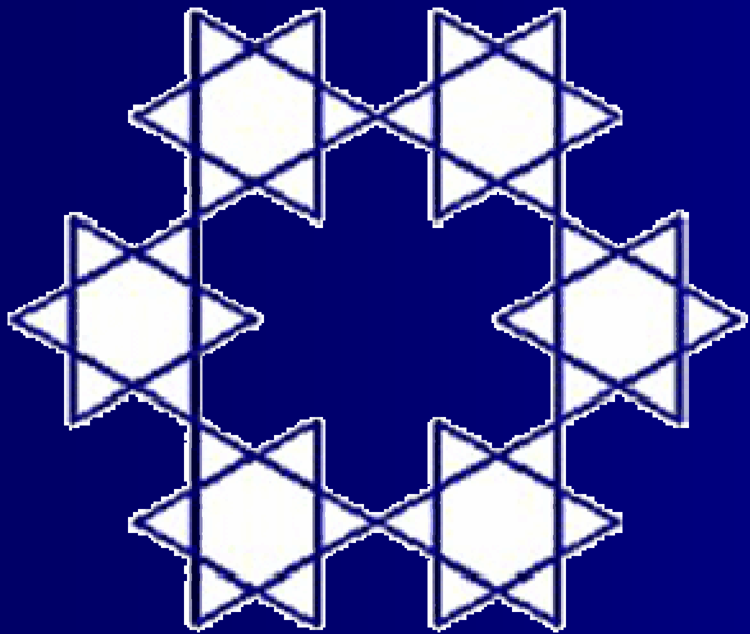
FACTAL DE HEXAGRAMAS



FRACTAL – AUTOSEMEJANZA

Una parte es réplica a menor escala del total.

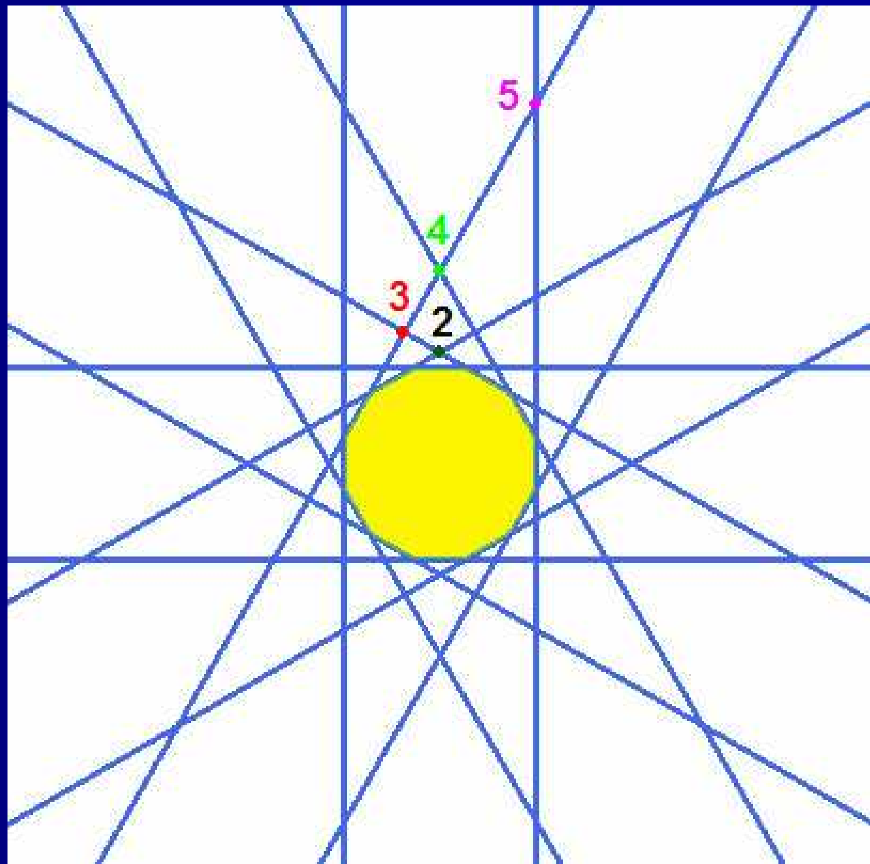
Hexagrama



Mosaico - Sinagoga
PRAGA

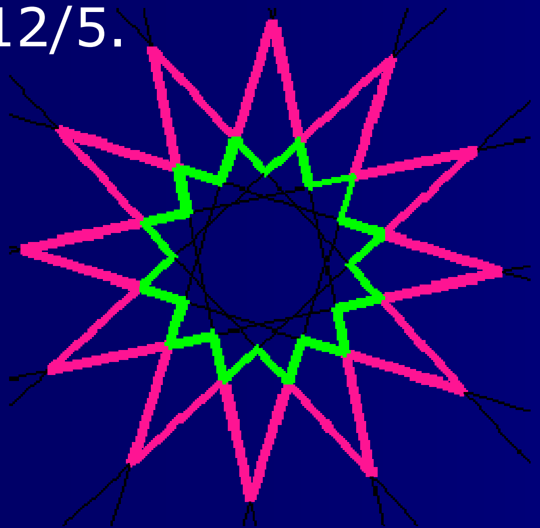
Polígonos estrellados y estrellas

Las estrellas y el polígono estrellado derivados del dodecágono son : 12/2, 12/3, 12/4 y 12/5.



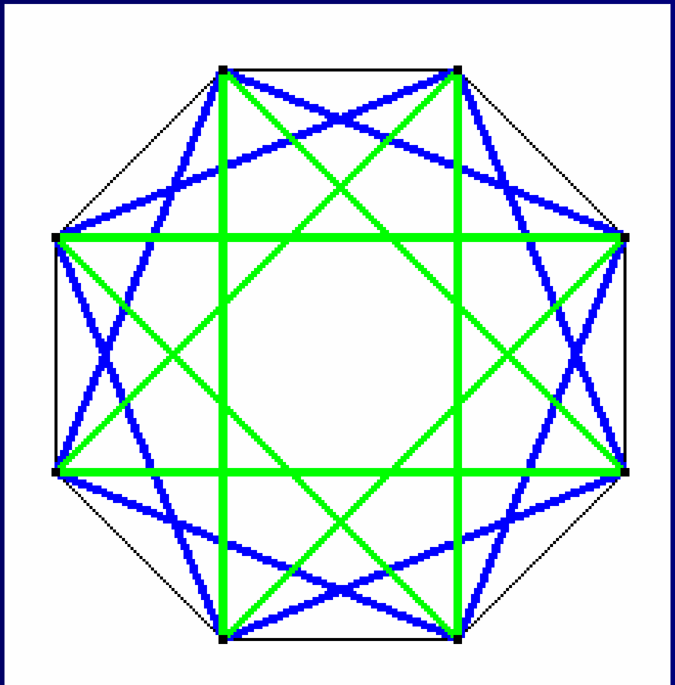
Polígonos estrellados y estrellas

El círculo central oculta las estrellas denotadas por 12/2 y 12/3 simulando el centro de un sol cuyos radios corresponden a los segmentos de las estrellas 12/4 y 12/5.



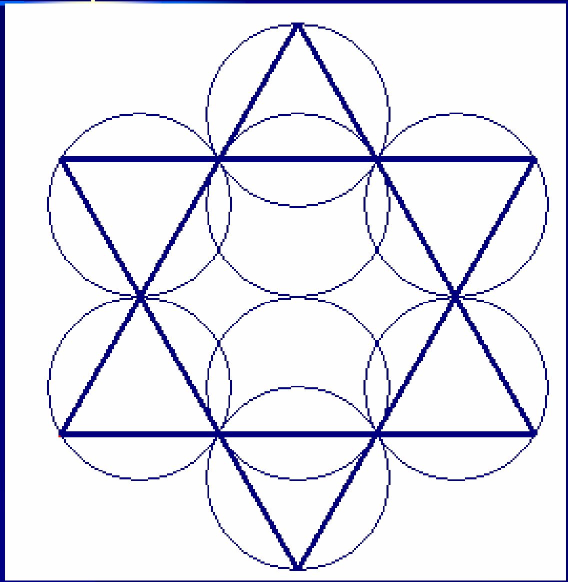
"El Capricho" de Gaudí
COMILLAS

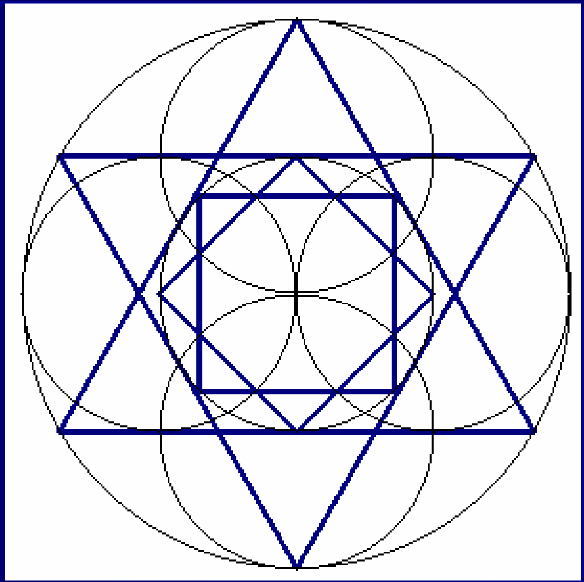
Estrella 8/2 – Polígono estrellado 8/3

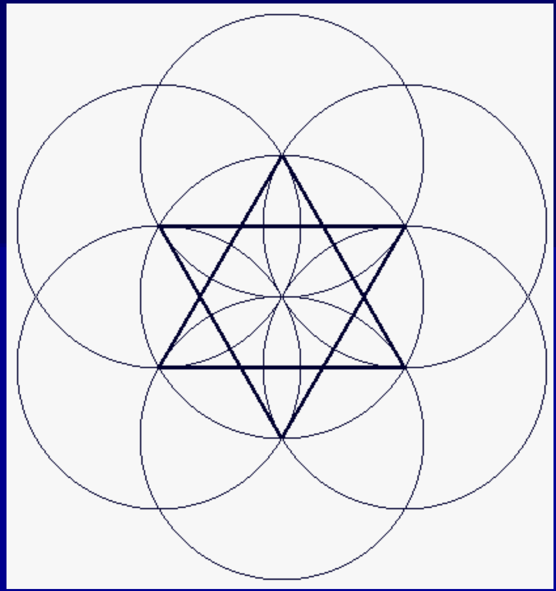


ESTELLA (Navarra)

Diagramas y signos





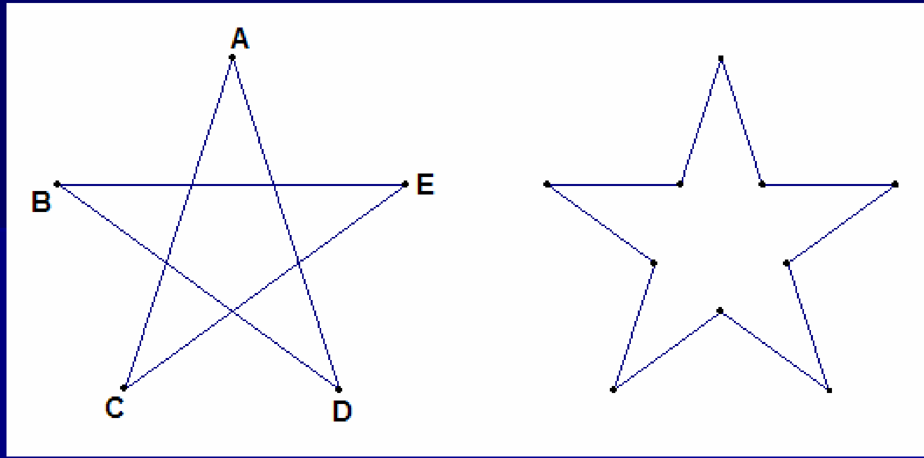


Diagramas meditativos o cabalísticos

El hexagrama junto con el hexágono regular y la estrella octogonal 8/2 son las formas poligonales que más relevancia tuvieron en la arquitectura de las catedrales góticas.

INTERPRETACIÓN 2.-

Conectando los 2n segmentos externos de una estrella construida según cualquiera de los procedimientos anteriores, resulta un polígono cóncavo que también se denomina **estrella** y se denota por **|n/q|**, con dos tipos de vértices: punta y mella.



Esta nueva denominación aparece en el segundo libro de la obra "Harmonice Mundi" de Kepler.

Estrella |5/2| - Fachada **VALLADOLID**

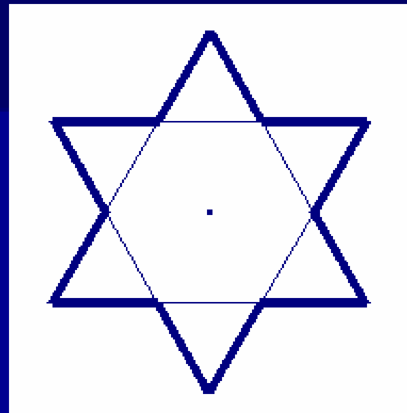
Claustro . Concatedral **SORIA**

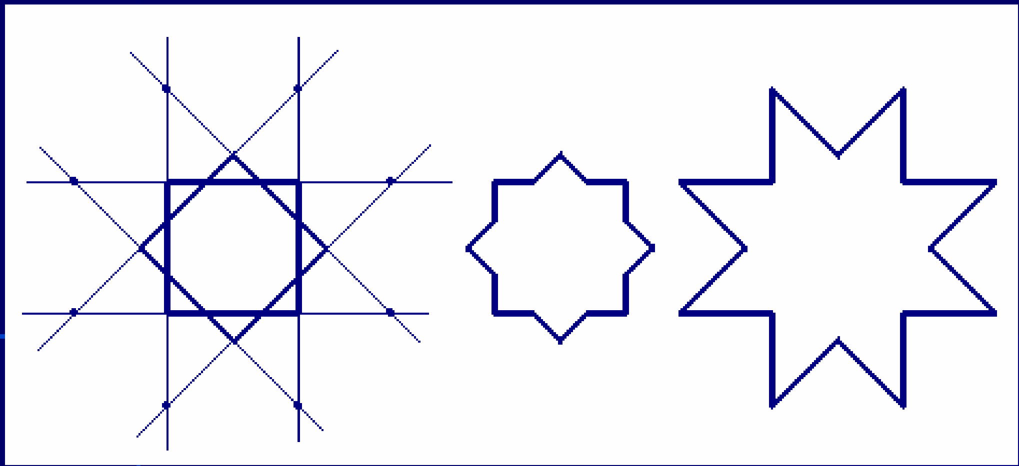
INTERPRETACIÓN 2.-

Estrellas |5/2| - MOSCÚ

INTERPRETACIÓN 2.-

De la estrella 6/2 se obtiene la estrella |6/2| que es un polígono cóncavo de 12 lados.





Mosaico romano – Palacio de Lebrija
SEVILLA

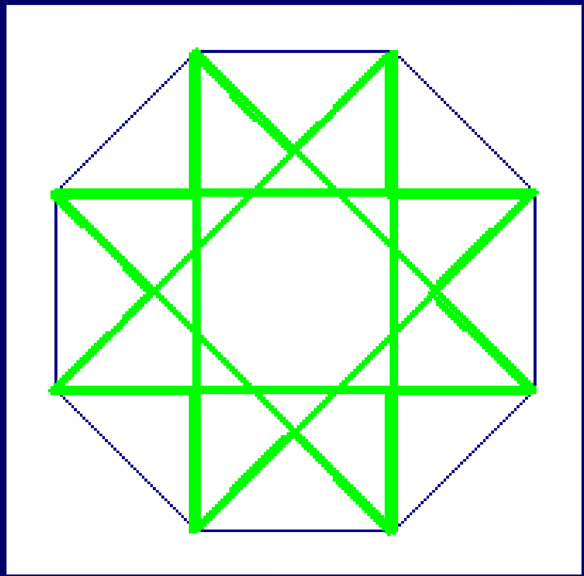
Sinagoga de BUDAPEST

INTERPRETACIÓN 2.-

ERMITAGE – **SAN PETESBURGO**

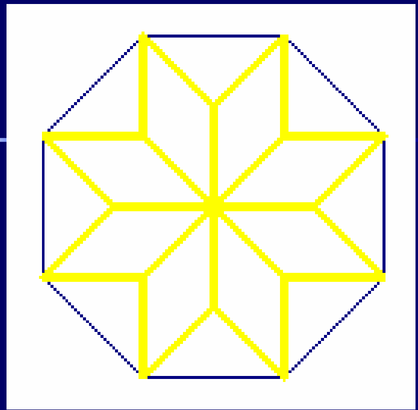
INTERPRETACIÓN 2.-

A partir del polígono estrellado 8/3 se obtiene el polígono cóncavo |8/3| que tiene dieciséis lados.



Pavimento – Capilla de la Consolación (CATEDRAL DE Burgos)

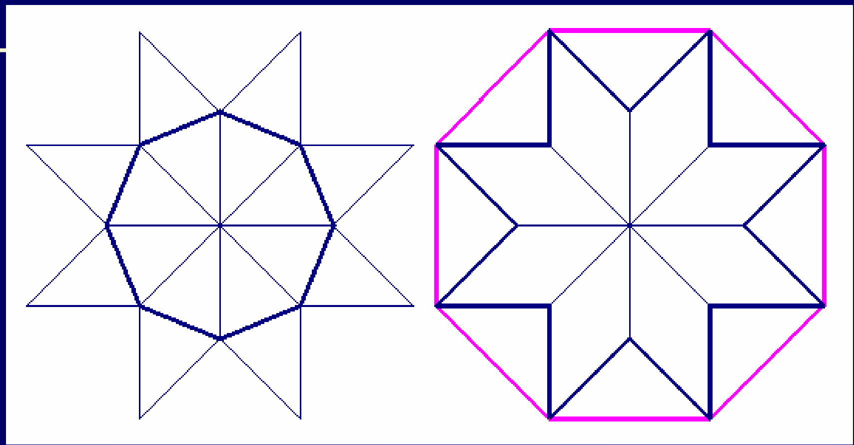
Formas estrelladas en la Catedral de Burgos

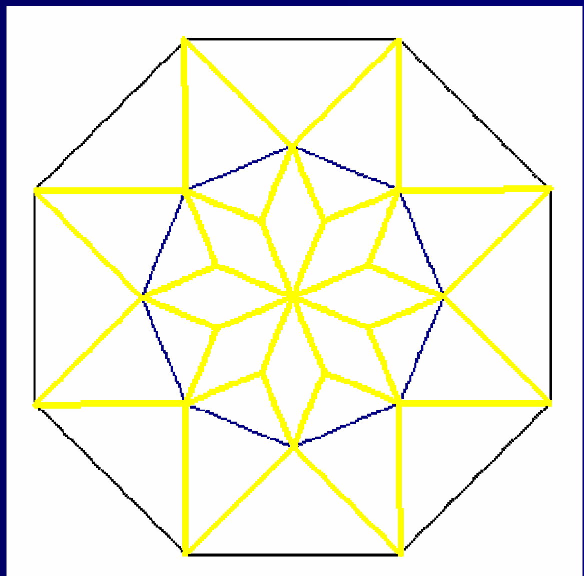


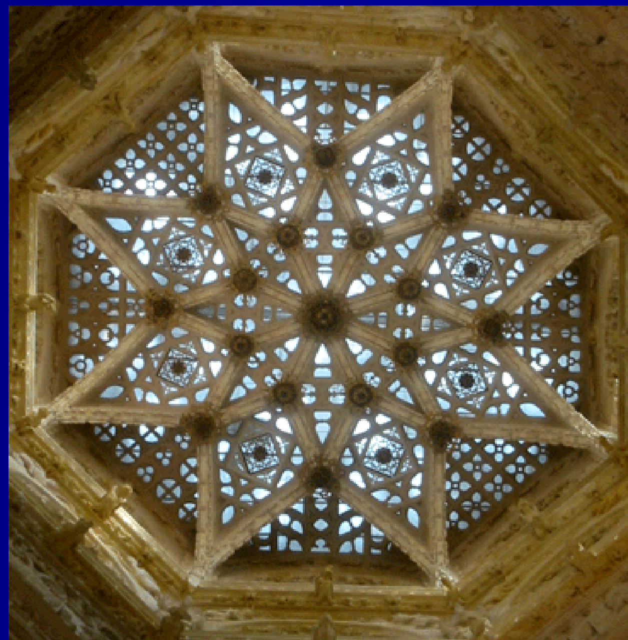
Capilla de la Consolación

Catedral de BURGOS

Formas estrelladas en la Catedral de Burgos



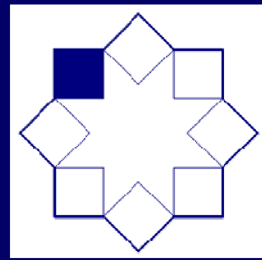


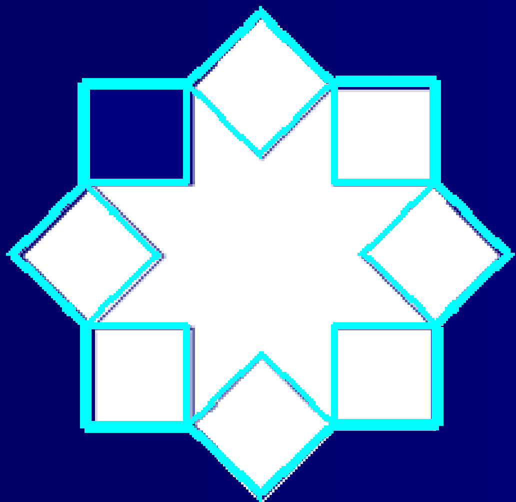


Cimborrio

Catedral de BURGOS

Estrellas **|8/2|** y **|8/3|** en la Abadía de **WESTMISTER**





Detalle del abovedado de la Capilla de Enrique VIII

INTRODUCCIÓN - PROFESORES

UNIDAD DIDÁCTICA - ALUMNOS

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

CONSTRUCCIÓN 1ª

A partir de un polígono regular de ***n*** lados. Se elige uno de sus vértices y, a partir de él, se trazan segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Este trazado se realiza de manera ordenada y sistemática, dejando sin unir en cada paso el mismo número de vértices.

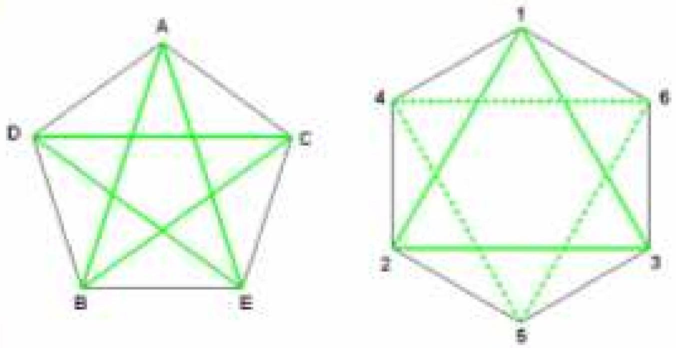
Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Una estrella así construida se denota por **n/q** (notación de *Schläfli*).

n es el número de vértices del polígono regular del que procede y

q-1 es el número de vértices que se dejan sin unir en cada paso.

Por ejemplo, para el pentágono y el hexágono regular construimos las estrellas 5/2 y 6/2.



- Observa que la estrella 5/2 es un único polígono, se llama **polígono estrellado** (su trazado se recorre con un solo trazado) ¿Qué ocurre en el caso de la estrella 6/2?

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

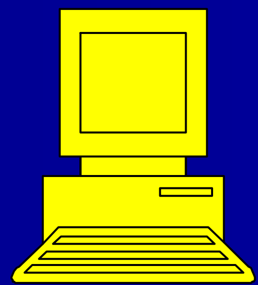
POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

- Utiliza el programa CABRI GÉOMÈTRE para dibujar los siguientes polígonos regulares y las estrellas indicadas:

  a) Octógono: 8/2, 8/3, 8/4 y 8/5

  b) Eneágono: 9/2, 9/3 9/4 y 9/7

  c) Decágono: 10/2, 10/3, 10/4 y 10/5.



ESTALMAT
CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

- A la vista de las construcciones anteriores contesta a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es **n/1**?

2) ¿Qué ocurre si **n** es par y **q** = **n:2**?

3) ¿Qué relación hay entre las estrellas **n/q** y **n/n-q**?
¿Cuántas estrellas diferentes se pueden construir a partir de un polígono de **n** lados?

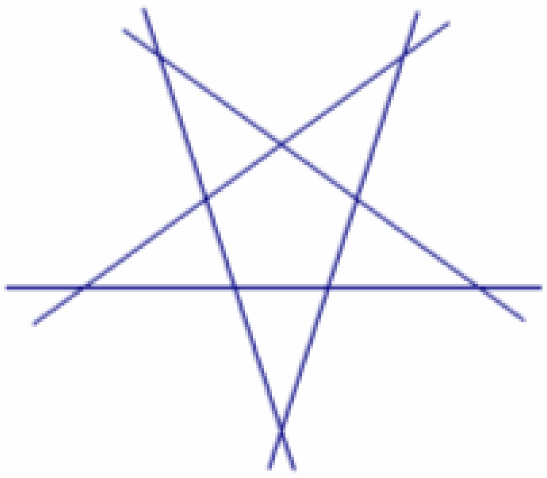
4) ¿Cómo deben ser los números **n** y **q** para que la estrella sea un polígono estrellado?

5) ¿Qué ocurre si **q** es un divisor de **n**?
¿Cuántos polígonos regulares forman la estrella?
¿Qué polígonos son?

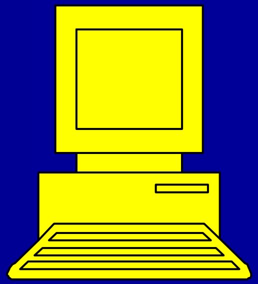
6) ¿Qué se obtiene si **n** no divide a **q** pero ambos tienen divisores comunes? Explícalo para 10/4, 15/6. Generaliza las deducciones siendo **d** el máximo común divisor de **n** y **q**.

CONSTRUCCIÓN 2ª

A partir de un polígono regular de **n** lados. Se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez. En este proceso se llama **estrella** a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones de los lados del polígono. En el dibujo se ha obtenido el polígono estrellado 5/2 prolongando los lados de un pentágono regular.

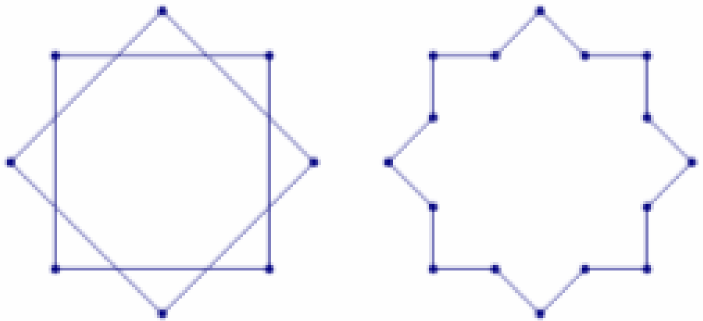


- Construye utilizando este método las estrellas 8/2 y 8/3 a partir de un octógono regular. Dibuja los polígonos regulares (octógonos) circunscritos a las estrellas anteriores. Observa que las estrellas aparecen construidas uniendo los vértices de los octógonos como en el primer método. Utiliza el programa CABRI.
- Puedes repetir todo el proceso con los octógonos exteriores para obtener un bonito diseño de entrelazados.



POLÍGONOS CÓNCAVOS CON FORMA DE ESTRELLA

Resaltando el contorno de una estrella **n/q**, se construye un polígono cóncavo de **2n** lados que se denota por **|n/q|**. Observa la estrella 8/2 y el polígono cóncavo |8/2| de dieciséis lados con ángulos de dos tipos en sus vértices.



- Considera los polígonos estrellados o estrellas, 5/2, 6/2 y 8/3 y a partir de ellos, los polígonos cóncavos con forma de estrella que tienen respectivamente 10, 12, 16 lados. ¿Cuánto miden los ángulos en los vértices de cada una de estos polígonos? Comprueba tus respuestas utilizando el programa CABRI.

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

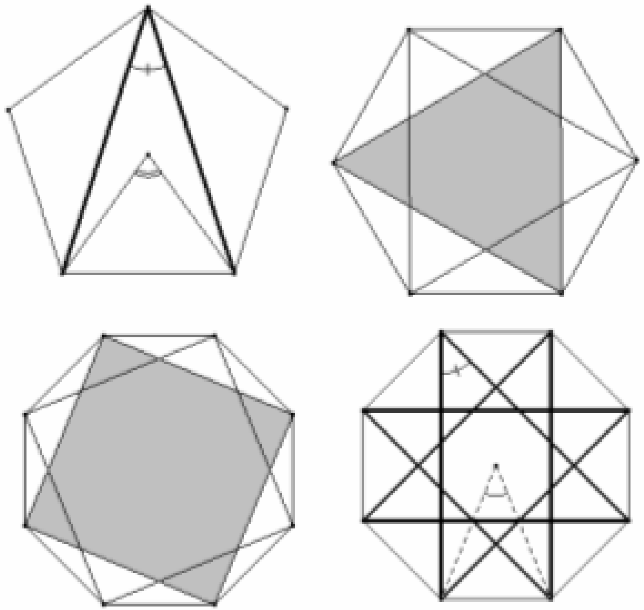
POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- Calcula el ángulo en la punta de las estrellas o polígonos estrellados: 5/2, 6/2, 8/2 y 8/3.

- Rellena la siguiente tabla para los polígonos con el número de vértices que se indica.

			Polígonos regulares	
Nº de lados	Nº de diagonales	Suma de ángulos interiores	**Ángulo central**	**Ángulo interior**
3				
4				
5				
6				
8				
n				

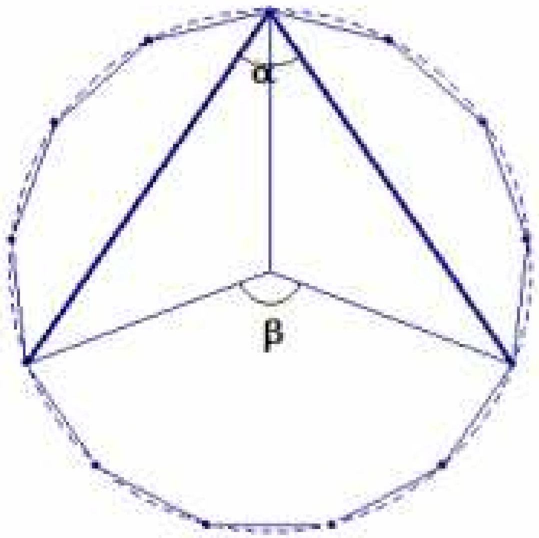
- Observa los dibujos e indica la medida de los ángulos que se han marcado.



ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

- Generaliza y calcula el ángulo en la punta de las estrellas n/q y |n/q|.



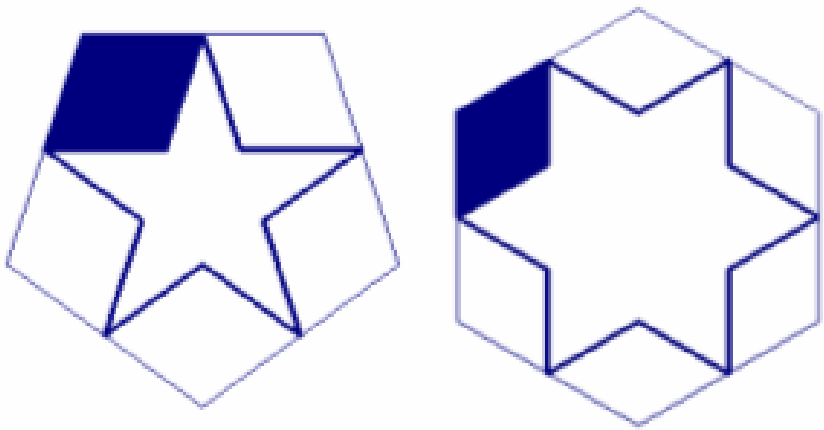
$$\beta = (n - 2q)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$$\alpha = \frac{n - 2q}{n}\cdot\pi$$

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

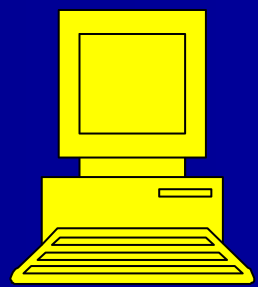
POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- En el dibujo aparecen los polígonos cóncavos |5/2| y |6/2| construidos a partir de rombos que giran.



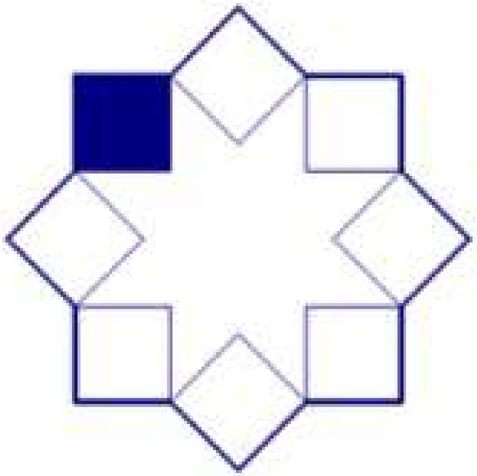
- ¿Cuánto miden los ángulos de los rombos? ¿Cuáles son los ángulos de giro en cada caso?
- Generaliza para llegar a la conclusión siguiente:

  Girando n veces un rombo de ángulos ρ y $\mu = \pi - \rho$, se obtiene la estrella |n/2|, siendo ρ el ángulo interior del n-polígono regular.



ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN	POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- En la figura de la derecha aparecen la forma |8/2| exteriormente y la |8/3| en el interior.



- Comprobar, por ejemplo utilizando el programa CABRI, que un cuadrado girado alrededor de uno de sus vértices, genera las dos estrellas |8/2| y |8/3| derivadas del octógono regular. ¿Cuál es el ángulo de giro?
- Hallar las áreas de los octógonos interior y exterior de la figura y la razón entre ellas.
- Observa que las dos estrellas |8/2| y |8/3| tienen el mismo perímetro. Comprueba que la proporción entre sus áreas es el número de plata $\theta = 1 + \sqrt{2}$.

ESTALMAT
CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- Observa la fotografía y contesta a las siguientes preguntas:

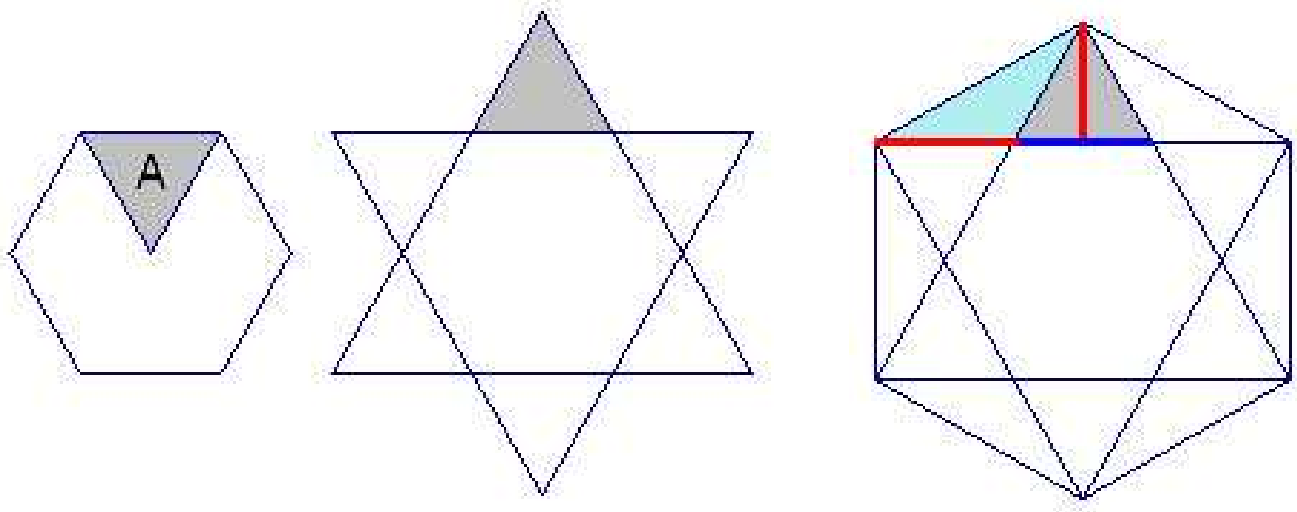
- Describe los polígonos convexos, estrellas, polígonos estrellados y polígonos cóncavos que aparecen.
- Observa que el octógono central motivo de la figura. Verifica que las prolongaciones de sus lados originan las estrellas 8/2 y 8/3.
- Suponiendo que la medida del lado del octógono interior es una unidad, calcular las áreas de los diferentes tipos de triángulos que aparecen.

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- Utilizando que el área del triángulo equilátero sombreado es A, contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el área del hexágono de la izquierda?
- ¿Cuál es el área de la estrella central?
- ¿Cuál es el área del hexágono circunscrito?



ACTIVIDAD.- Tomando el lado del hexágono regular de partida es **x**, calcula las áreas de las figuras de la actividad anterior.

El hexágono de lado **x** se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de altura $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Por lo tanto las áreas son:

$$A_H = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$A_{H'} = 3 \cdot A_H = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2$$

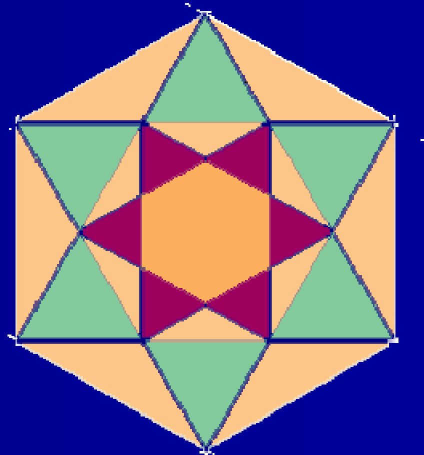
$$\text{Área} \quad \text{hexagrama} \quad = 2.A_H = 3\sqrt{3}\,x^2$$

ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- Observa la fotografía y el detalle de los hexagramas descompuestos en triángulos y la sucesión de hexágonos concéntricos.

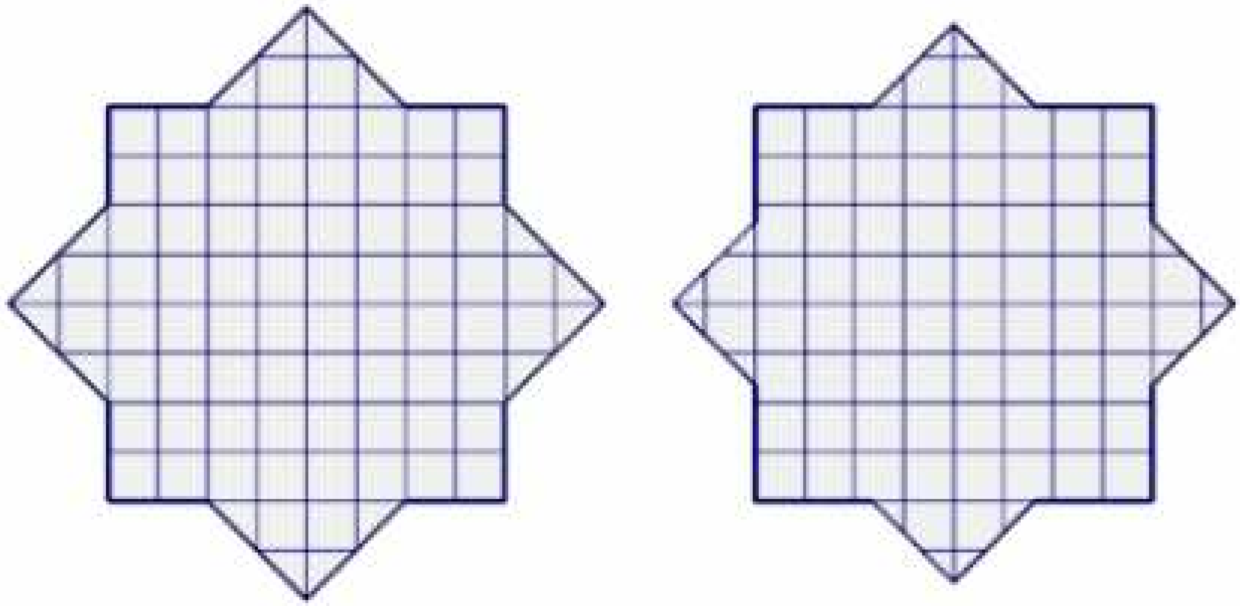
Calcula las áreas de los hexágonos e la sucesión.



$$A_{H''} = 3A_{H'} = 9A_{H}$$

$$A_{H''} = 9\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}x^2$$

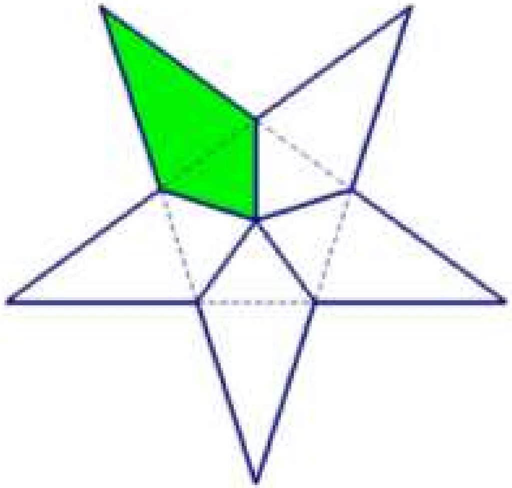
- ACTIVIDAD.- De las formas estrelladas de la figura identifica la que es derivada de la estrella 8/2, ¿cómo se ha construido la otra estrella? ¿Calcula el área y el perímetro de cada una?



ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN

POLÍGONOS ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

ACTIVIDAD.- Otra forma de obtener figuras estrelladas es formar cuadriláteros a partir de un polígono estrellado o de una estrella (ver dibujo). Se obtiene una forma estrellada formada por n cuadriláteros.



- Observa las formas estrelladas de las fotografías e indica de qué polígonos estrellados o estrellas proceden y calcula la medida de los ángulos de los cuadriláteros.


ACTIVIDAD.- En la fotografía hay una forma estrellada compuesta por seis rombos, generada a partir de un hexágono regular y de su estrella |6/2|.

- Calcula las dimensiones y el área del rectángulo y del cuadrado más pequeños que se pueden circunscribir a la forma estrellada.