La cuadratura de la parábola y otros problemas geométricos

Sebastián Lajara

Departamento de Matemáticas
Universidad de Castilla-La Mancha
ESTALMAT Castilla-La Mancha

IX SEMINARIO SOBRE ACTIVIDADES PARA ESTIMULAR EL TALENTO PRECOZ EN MATEMÁTICAS

Instituto de Ciencias Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Abril de 2016

Real Academia de Ciencias Exactas • Físicas • Naturales

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD

FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Objetivos

- Familiarizar al alumno con las ideas que subyacen al concepto de integral, a través del planteamiento de diversos problemas geométricos *elementales*, que equivalen al cálculo de integrales de funciones potenciales.
- Profundizar en el estudio del concepto de límite.
- Introducir al alumno en el estudio de las series numéricas.

Introducción

Objetivos

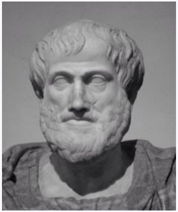
- Familiarizar al alumno con las ideas que subyacen al concepto de integral, a través del planteamiento de diversos problemas geométricos *elementales*, que equivalen al cálculo de integrales de funciones potenciales.
- Profundizar en el estudio del concepto de límite.
- Introducir al alumno en el estudio de las series numéricas.

Destinatarios

Estudiantes de Cuarto Curso del Programa ESTALMAT.

Los protagonistas de esta historia

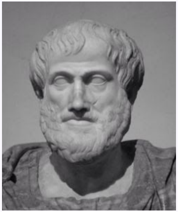
Siglo IV a.C.



Eudoxo

Volumen de la pirámide y el cono de revolución.

Los protagonistas de esta historia



Eudoxo

Siglo IV a.C.

Volumen de la pirámide y el cono de revolución.

Arquímedes

Siglo III a.C.

Área de un segmento de parábola.

Área de un segmento de la espiral.

Volumen de una esfera y de un tronco del paráboloide de revolución.

1630-1650

B. Cavalieri

B. Pascal

Determinación del área de un segmento de la curva de ecuación

$$y = x^p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

J. Wallis

P. de Fermat

E. Torricelli

G. Roberval

Determinación del área de un segmento de la curva de ecuación

$$y = x^p, \quad p \in \mathbb{Q}^+.$$

J. Wallis | P. de Fermat | E. Torricelli | G. Roberval

Determinación del área de un segmento de la curva de ecuación

$$y = x^p, \quad p \in \mathbb{Q}^+.$$

G. Saint-Vincent

Cálculo del área de un segmento de la hipérbola

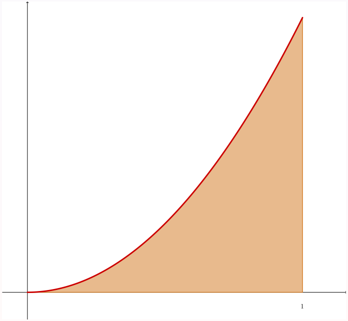
$$xy = 1.$$

Problema

Determinar el área de la región limitada por la parábola de la ecuación

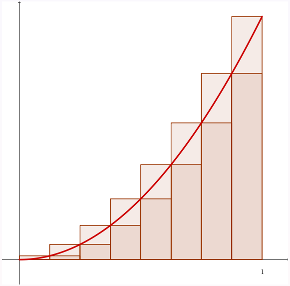
$$y = x^2,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.



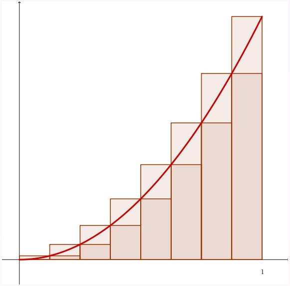
Idea

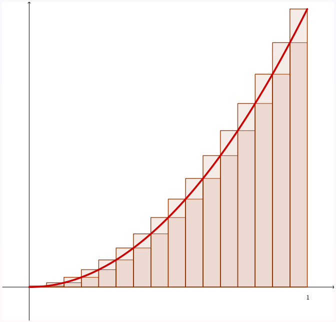
Aproximar el área de la región a través de la suma de áreas de colecciones rectángulos contenidos y continentes.



Idea

Aproximar el área de la región a través de la suma de áreas de colecciones rectángulos contenidos y continentes.





La aproximación parece mejor cuanto mayor es el número de rectángulos...

De la figura al papel...

Llamemos D a la región en cuestión. Fijamos un número natural n, y dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de longitud

$$\frac{1}{n},$$

cuyos extremos son los puntos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \quad x_n = 1,$$

es decir,

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

De la figura al papel...

Llamemos D a la región en cuestión. Fijamos un número natural n, y dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de longitud

$$\frac{1}{n},$$

cuyos extremos son los puntos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \quad x_n = 1,$$

es decir,

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Estos puntos inducen una colección de n rectángulos contenidos en D, y otra de rectángulos continentes. Designemos por $c_1, \ldots, c_n$ a los contenidos y por $C_1, \ldots, C_n$ a los continentes. Claramente,

$$\sum_{k=1}^{n} area(c_k) \leq area(D) \leq \sum_{k=1}^{n} area(C_k).$$

¿Cuáles son las áreas de estos rectángulos?

La parábola es la gráfica de la función

$$f(x) = x^2.$$

Fijemos un $k = 1, \ldots, n$. Para hallar el área de c_k determinamos su base y su altura. La base es

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}.$$

¿Cuáles son las áreas de estos rectángulos?

La parábola es la gráfica de la función

$$f(x) = x^2.$$

Fijemos un $k = 1, \ldots, n$. Para hallar el área de c_k determinamos su base y su altura. La base es

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}.$$

La altura de c_k es el mínimo de f sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al ser f creciente en ese intervalo, el mínimo se alcanza en x_{k-1}, y la altura de c_k es

$$f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2.$$

Consecuentemente,

¿Cuáles son las áreas de estos rectángulos?

La parábola es la gráfica de la función

$$f(x) = x^2.$$

Fijemos un $k = 1, \ldots, n$. Para hallar el área de c_k determinamos su base y su altura. La base es

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}.$$

La altura de c_k es el mínimo de f sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al ser f creciente en ese intervalo, el mínimo se alcanza en x_{k-1}, y la altura de c_k es

$$f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2.$$

Consecuentemente,

$$area(c_k) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(k-1)^2}{n^3}.$$

El área de C_k se determina de forma análoga. La base coincide con la de c_k, y la altura es el máximo de f sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, que se alcanza en x_k, al ser f creciente. Así pues,

$$area(C_k) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^3}.$$

Combinando las últimas tres fórmulas recuadradas obtenemos

El área de C_k se determina de forma análoga. La base coincide con la de c_k, y la altura es el máximo de f sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, que se alcanza en x_k, al ser f creciente. Así pues,

$$area(C_k) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^3}.$$

Combinando las últimas tres fórmulas recuadradas obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} \leq area(D) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3},$$

es decir,

$$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} \leq area(D) \leq \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

Esta desigualdad es válida para cada $n \in \mathbb{N}$...

... Y la intuición nos dice que los extremos de esta desigualdad se aproximan tanto como queramos al término central, si tomamos n suficientemente grande... (*límite*). Veamos si es así. Para cada n escribimos

$$s_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$

y

$$S_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

Intentemos calcular $\lim_n S_n$ y $\lim_n s_n$. A priori no parece fácil... pues el número de sumandos del numerador es cada vez mayor. Ahora bien, sabemos que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Por tanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

De forma análoga resulta

$$s_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Ahora es claro que

Por tanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

De forma análoga resulta

$$s_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Ahora es claro que

$$\lim_n s_n = \lim_n S_n = \frac{1}{3},$$

y puesto que

Por tanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

De forma análoga resulta

$$s_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Ahora es claro que

$$\lim_n s_n = \lim_n S_n = \frac{1}{3},$$

y puesto que

$$s_n \leq area(D) \leq S_n$$

obtenemos el resultado de Arquímedes,

$$area(D) = \frac{1}{3}.$$

Un par de reflexiones...

El cálculo del área del segmento parabólico exige un proceso de paso al límite (límite de sumas).

Un par de reflexiones...

El cálculo del área del segmento parabólico exige un proceso de paso al límite (límite de sumas).

El éxito obtenido en el cálculo (siguiendo el procedimiento anterior) ha dependido de la existencia de la fórmula

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esta identidad (nada trivial) ha aparecido en un par de ocasiones dentro de las clases del Programa ESTALMAT:

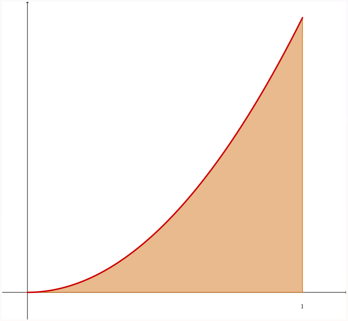
- En la sesión *El papel de la visualización en la demostración matemática* (Primer Curso),
- Y en la dedicada al *Principio de inducción* (Segundo Curso).

Problema

Determinar el área de la región limitada por la curva de ecuación

$$y = x^3,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.



Llamemos D a la región en cuestión. Al igual que antes, fijamos un número $n \in \mathbb{N}$, y dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de longitud $1/n$, generando la colección de puntos

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

que inducen n rectángulos contenidos en D, digamos $c_1, \ldots, c_n$, y n rectángulos continentes, $C_1, \ldots, C_n$. La base de cada rectángulo es $1/n$. Teniendo en cuenta que la parábola cúbica es la gráfica de la función (creciente)

$$f(x) = x^3,$$

deducimos que

$$area(c_k) = \frac{(k-1)^3}{n^4} \quad \text{y} \quad area(C_k) = \frac{k^3}{n^4}.$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3}{n^4} \leq area(D) \leq \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}.$$

Lo natural, ahora, es tomar límites en esta desigualdad, pero para ello sería conveniente disponer de una fórmula para la suma

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3}{n^4} \leq area(D) \leq \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}.$$

Lo natural, ahora, es tomar límites en esta desigualdad, pero para ello sería conveniente disponer de una fórmula para la suma

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

A diferencia de la identidad para la suma de cuadrados, ésta es fácil de deducir. Experimentando un poco obtenemos

$$1^3 + 2^3 = 9, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100, \ldots$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3}{n^4} \leq area(D) \leq \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}.$$

Lo natural, ahora, es tomar límites en esta desigualdad, pero para ello sería conveniente disponer de una fórmula para la suma

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

A diferencia de la identidad para la suma de cuadrados, ésta es fácil de deducir. Experimentando un poco obtenemos

$$1^3 + 2^3 = 9, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100, \ldots$$

Los números que van apareciendo a la derecha son cuadrados de números triangulares. Este hecho sugiere la siguiente conjetura (que se demuestra fácilmente por inducción):

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Por tanto,

$$\lim_n \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3}{n^4} = \lim_n \frac{n^2(n-1)^2}{4n^4} = \lim_n \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Análogamente,

$$\lim_n \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \lim_n \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto,

$$\lim_n \frac{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3}{n^4} = \lim_n \frac{n^2(n-1)^2}{4n^4} = \lim_n \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Análogamente,

$$\lim_n \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4} = \lim_n \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

En consecuencia,

$$area(D) = \frac{1}{4}.$$

Problema

Dado un número natural p, nos proponemos determinar el área de la región D_p limitada por la curva de ecuación

$$y = x^p,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Problema

Dado un número natural p, nos proponemos determinar el área de la región D_p limitada por la curva de ecuación

$$y = x^p,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Procediendo como antes obtenemos el siguiente resultado.

Lema

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p}{n^{p+1}} \leq area(D_p) \leq \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Esta desigualdad nos aboca al siguiente problema auxiliar (que interés independiente).

Problema

Sea $p \in \mathbb{N}$. Hallar una expresión para la suma

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

Conocemos la solución cuando $p = 1, 2, 3$. Podemos experimentar con $p = 4, 5, \dots$ Pero la cosa es complicada (como con $p = 2$).

Problema

Sea $p \in \mathbb{N}$. Hallar una expresión para la suma

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

Conocemos la solución cuando $p = 1, 2, 3$. Podemos experimentar con $p = 4, 5, \ldots$ Pero la cosa es complicada (como con $p = 2$).

El truco de Pascal

B. Pascal utilizó el Teorema del binomio para obtener una fórmula de recurrencia que relaciona la suma $1^p + 2^p + \cdots + n^p$ con las sumas de potencias correspondientes a exponentes más bajos.
Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

Problema

Sea $p \in \mathbb{N}$. Hallar una expresión para la suma

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

Conocemos la solución cuando $p = 1, 2, 3$. Podemos experimentar con $p = 4, 5, \ldots$ Pero la cosa es complicada (como con $p = 2$).

El truco de Pascal

B. Pascal utilizó el Teorema del binomio para obtener una fórmula de recurrencia que relaciona la suma $1^p + 2^p + \cdots + n^p$ con las sumas de potencias correspondientes a exponentes más bajos. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

Reemplazando n por $n-1$ en esta igualdad resulta

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1.$$

Aplicando la misma identidad al número $n-2$, y así sucesivamente, hasta llegar al caso en que $n=1$, se obtienen las identidades

$$\begin{aligned}
n^3-(n-1)^3 &= & 3n^2-3n & \quad +1\\
(n-1)^3-(n-2)^3 &= & 3(n-1)^2-3(n-1) & \quad +1\\
(n-2)^3-(n-3)^3 &= & 3(n-2)^2-3(n-2) & \quad +1\\
&\vdots & \vdots & \\
2^3-1^3 &= & 3\cdot 1^2-3\cdot 1 & \quad +1\\
1^3-0^3 &= & 3\cdot 0^2-3\cdot 0 & \quad +1
\end{aligned}$$

Aplicando la misma identidad al número $n-2$, y así sucesivamente, hasta llegar al caso en que $n=1$, se obtienen las identidades

$$\begin{array}{rcccr} n^3-(n-1)^3 & = & 3n^2-3n & +1 \\ (n-1)^3-(n-2)^3 & = & 3(n-1)^2-3(n-1) & +1 \\ (n-2)^3-(n-3)^3 & = & 3(n-2)^2-3(n-2) & +1 \\ & \vdots & \vdots & \\ 2^3-1^3 & = & 3\cdot 1^2-3\cdot 1 & +1 \\ 1^3-0^3 & = & 3\cdot 0^2-3\cdot 0 & +1 \end{array}$$

Sumando...

$$n^3 = \quad 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

Aplicando la misma identidad al número $n-2$, y así sucesivamente, hasta llegar al caso en que $n=1$, se obtienen las identidades

$$\begin{aligned}
n^3-(n-1)^3 &= & 3n^2-3n & \quad +1\\
(n-1)^3-(n-2)^3 &= & 3(n-1)^2-3(n-1) & \quad +1\\
(n-2)^3-(n-3)^3 &= & 3(n-2)^2-3(n-2) & \quad +1\\
&\vdots & \vdots & \\
2^3-1^3 &= & 3\cdot 1^2-3\cdot 1 & \quad +1\\
1^3-0^3 &= & 3\cdot 0^2-3\cdot 0 & \quad +1
\end{aligned}$$

Sumando...

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

y despejando el término $\sum k^2$, tras simplificar obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Hemos obtenido la fórmula para $p = 2$. Consideremos ahora el caso $p = 3$. Para ello partimos de la diferencia $n^4 - (n-1)^4$. Repitiendo el razonamiento anterior obtenemos la cadena de identidades

$$\begin{array}{rccr}
n^4 - (n-1)^4 = & 4n^3 - 6n^2 & & +4n - 1 \\
(n-1)^4 - (n-2)^4 = & 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 & & +4(n-1) - 1 \\
\vdots & \vdots & & \\
2^4 - 1^4 = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 & & +4 \cdot 1 - 1 \\
1^3 - 0^3 = & 3 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^3 & & +4 \cdot 0 - 1
\end{array}$$

Sumando...

Hemos obtenido la fórmula para $p = 2$. Consideremos ahora el caso $p = 3$. Para ello partimos de la diferencia $n^4 - (n-1)^4$. Repitiendo el razonamiento anterior obtenemos la cadena de identidades

$$\begin{array}{rccr} n^4 - (n-1)^4 = & 4n^3 - 6n^2 & & +4n - 1 \\ (n-1)^4 - (n-2)^4 = & 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 & & +4(n-1) - 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 2^4 - 1^4 = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 & & +4 \cdot 1 - 1 \\ 1^3 - 0^3 = & 3 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^3 & & +4 \cdot 0 - 1 \end{array}$$

Sumando...

$$n^4 = \quad 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - n,$$

y despejando el término para la suma $\sum k^3$, resulta

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Cuando p es un número natural cualquiera la cosa funciona exactamente igual, considerando la diferencia

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p-k} n^k.$$

Cuando p es un número natural cualquiera la cosa funciona exactamente igual, considerando la diferencia

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p-k} n^k.$$

Así que con este procedimiento podemos obtener cualquiera de estas fórmulas.

Para nuestros propósitos no es necesaria la expresión completa... El desarrollo del término de la derecha, y el razonamiento anterior, garantizan la existencia de números $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{N}$ de modo que

Cuando p es un número natural cualquiera la cosa funciona exactamente igual, considerando la diferencia

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p-k} n^k.$$

Así que con este procedimiento podemos obtener cualquiera de estas fórmulas.

Para nuestros propósitos no es necesaria la expresión completa... El desarrollo del término de la derecha, y el razonamiento anterior, garantizan la existencia de números $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n^{p+1} = (p+1) \sum_{k=1}^{n} k^p + (a_1 \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + a_{p-1} \sum_{k=1}^{n} k + a_p n).$$

Y echando mano de la inducción obtenemos

Cuando p es un número natural cualquiera la cosa funciona exactamente igual, considerando la diferencia

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p-k} n^k.$$

Así que con este procedimiento podemos obtener cualquiera de estas fórmulas.

Para nuestros propósitos no es necesaria la expresión completa... El desarrollo del término de la derecha, y el razonamiento anterior, garantizan la existencia de números $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n^{p+1} = (p+1)\sum_{k=1}^{n} k^p + \left(a_1 \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\sum_{k=1}^{n} k + a_p n\right).$$

Y echando mano de la inducción obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \left(\sum \quad \text{potencias de exponente} \quad \leq p\right).$$

Así pues,

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Análogamente,

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Estas identidades, junto con la desigualdad expresada por el lema del principio, nos conducen al resultado de Cavalieri-Pascal:

$$area(D_p) = \frac{1}{p+1}.$$

Problema

Dado un número $p > 0$, determinar el área de la región D_p limitada por la curva de ecuación

$$y = x^p,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

El razonamiento anterior no funciona...

Cuadratura de la curva x^p $(p > 0)$. El enfoque de Fermat

Problema

Dado un número $p > 0$, determinar el área de la región D_p limitada por la curva de ecuación

$$y = x^p,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

El razonamiento anterior no funciona... En los casos previos hemos considerado colecciones de rectángulos de igual base. Pero esto no es necesario... (Además, bastaría considerar el caso en que $p > 1$).

Cuadratura de la curva x^p $(p > 0)$. El enfoque de Fermat

Problema

Dado un número $p > 0$, determinar el área de la región D_p limitada por la curva de ecuación

$$y = x^p,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

El razonamiento anterior no funciona... En los casos previos hemos considerado colecciones de rectángulos de igual base. Pero esto no es necesario... (Además, bastaría considerar el caso en que $p > 1$).

Idea

Buscar colecciones de rectángulos *aproximantes* cuya suma de áreas resulte fácil de estimar.

¿Existe alguna progresión (aparte de las que hemos visto) cuya suma sea especialmente sencilla?

Series geométricas

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)\left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1\right).$$

En particular, si $\alpha \neq 1$,

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Series geométricas

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)\left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1\right).$$

En particular, si $\alpha \neq 1$,

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

¿Tiene sentido la suma infinita

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots?$$

Series geométricas

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

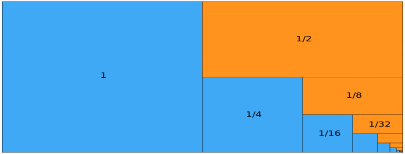
$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)\left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1\right).$$

En particular, si $\alpha \neq 1$,

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

¿Tiene sentido la suma infinita

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots ?$$



Escribamos, para cada $\alpha \neq 1$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Escribamos, para cada $\alpha \neq 1$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Si $-1 < \alpha < 1$ entonces

$$\alpha^n \to 0,$$

luego

$$\lim_n S_n(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Escribamos, para cada $\alpha \neq 1$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Si $-1 < \alpha < 1$ entonces

$$\alpha^n \to 0,$$

luego

$$\lim_n S_n(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Así pues,

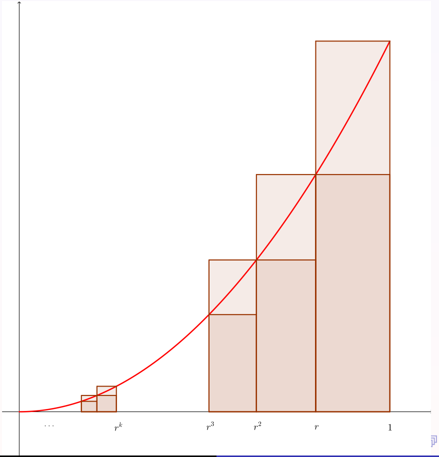
La suma $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$ tiene sentido, y de hecho:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{si} \quad -1 < \alpha < 1.$$

Volvamos al problema de hallar el área de la región D_p. Fijamos un número $0 < r < 1$. Y consideramos la sucesión (infinita) de puntos

$$x_0 = 1, \quad x_1 = r, \quad x_2 = r^2, \ldots, \quad x_k = r^k, \ldots$$

... Que inducen una colección de rectángulos contenidos en D_p, $c_1, c_2, \ldots$, y otra de rectángulos continentes, $C_1, C_2, \ldots$



Para los rectángulos continentes resulta:

$$area(C_1) = 1 - r$$
$$area(C_2) = (1 - r)r^{p+1}$$
$$area(C_3) = (1 - r)r^{2p+2}$$
$$\vdots$$

Para los rectángulos continentes resulta:

$$\begin{aligned} area(C_1) &= 1 - r \\ area(C_2) &= (1 - r)r^{p+1} \\ area(C_3) &= (1 - r)r^{2p+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Las áreas forman una sucesión geométrica de razón $\alpha = r^{p+1}$. (Y este número está entre 0 y 1). Por tanto,

$$\sum_{k \geq 1} area(C_k) = \frac{1 - r}{1 - r^{p+1}}.$$

Para los rectángulos continentes resulta:

$$area(C_1) = 1 - r$$
$$area(C_2) = (1 - r)r^{p+1}$$
$$area(C_3) = (1 - r)r^{2p+2}$$
$$\vdots$$

Las áreas forman una sucesión geométrica de razón $\alpha = r^{p+1}$. (Y este número está entre 0 y 1). Por tanto,

$$\sum_{k \geq 1} area(C_k) = \frac{1 - r}{1 - r^{p+1}}.$$

Análogamente,

$$area(c_1) = (1 - r)r^{p}$$
$$area(c_2) = (1 - r)r^{2p+1}$$
$$area(c_3) = (1 - r)r^{3p+2}$$
$$\vdots$$

... Luego

$$\sum_{k\geq 1} area(c_k) = \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}}.$$

... Luego

$$\sum_{k\geq 1} area(c_k) = \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}}.$$

Consecuentemente,

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} \cdot r^p \leq area(D_p) \leq \frac{1-r}{1-r^{p+1}}.$$

Esto es cierto para cada $r \in (0,1)$. Y la intuición nos dice que, la aproximación será mejor cuanto a medida que $r \to 1$. Esto nos conduce al siguiente problema auxiliar:

... Luego

$$\sum_{k\geq 1} area(c_k) = \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}}.$$

Consecuentemente,

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} \cdot r^p \leq area(D_p) \leq \frac{1-r}{1-r^{p+1}}.$$

Esto es cierto para cada $r \in (0,1)$. Y la intuición nos dice que, la aproximación será mejor cuanto a medida que $r \to 1$. Esto nos conduce al siguiente problema auxiliar:

Problema

Calcular

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-r}{1-r^{p+1}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{r\to 1} \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}}.$$

Es suficiente calcular el primero. Y la cosa es fácil cuando $p \in \mathbb{Q}$...

CASO PARTICULAR: $p \in \mathbb{N}$. Ya hemos visto que

$$r^{p+1} - 1 = (r-1)(1 + r + r^2 + \cdots + r^p),$$

luego

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \frac{1}{1 + r + r^2 + \cdots + r^p} \to \frac{1}{p+1} \quad \text{cuando} \quad r \to 1.$$

CASO PARTICULAR: $p \in \mathbb{N}$. Ya hemos visto que

$$r^{p+1} - 1 = (r-1)(1 + r + r^2 + \cdots + r^p),$$

luego

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \frac{1}{1 + r + r^2 + \cdots + r^p} \to \frac{1}{p+1} \quad \text{cuando} \quad r \to 1.$$

CASO GENERAL: $p + 1 = m/n$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Haciendo

$$r = t^n$$

resulta

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \frac{1-t^n}{1-t^m} = \frac{1 + t + \cdots + t^{n-1}}{1 + t + \cdots + t^{m-1}} = \frac{1 + r^{1/n} + \cdots + r^{(n-1)/n}}{1 + r^{1/n} + \cdots + r^{(m-1)/n}}.$$

Aparecen n sumandos en el numerador, y m en el denominador, así

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \frac{n}{m} = \frac{1}{p+1}.$$

Recapitulando...

Si $p > 0$, entonces para cada $r \in (0,1)$:

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} \cdot r^p \leq area(D_p) \leq \frac{1-r}{1-r^{p+1}}.$$

Recapitulando...

Si $p > 0$, entonces para cada $r \in (0,1)$:

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} \cdot r^p \leq area(D_p) \leq \frac{1-r}{1-r^{p+1}}.$$

Si $p \in \mathbb{Q}^+$ entonces

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \lim_{r\to 1} \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Conclusión (Fermat, Roberval, Torricelli, Wallis):

Recapitulando...

Si $p > 0$, entonces para cada $r \in (0,1)$:

$$\frac{1-r}{1-r^{p+1}} \cdot r^p \leq area(D_p) \leq \frac{1-r}{1-r^{p+1}}.$$

Si $p \in \mathbb{Q}^+$ entonces

$$\lim_{r \to 1} \frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \lim_{r \to 1} \frac{(1-r)r^p}{1-r^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Conclusión (Fermat, Roberval, Torricelli, Wallis):

Si $p \in \mathbb{Q}^+$ entonces:

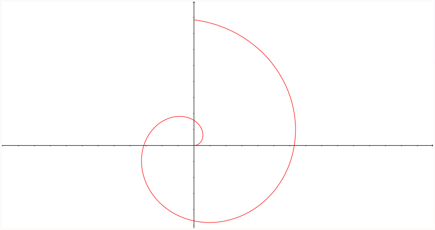
$$area(D_p) = \frac{1}{p+1}$$

La versatilidad de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Área de un segmento de espiral de Arquímedes

Definición

Se llama espiral de Arquímedes a la curva plana descrita por un punto que se mueve sobre una recta con velocidad constante al tiempo que ésta gira en torno a un punto fijo O, con velocidad angular constante.



Esta curva ha sido estudiada en la sesión sobre *Números complejos* (Tercer Curso), donde se prueba que si el punto O es el origen de coordenadas, entonces la ecuación polar de la espiral es

$$\rho(\theta) = k\theta, \quad k \quad \text{constante.}$$

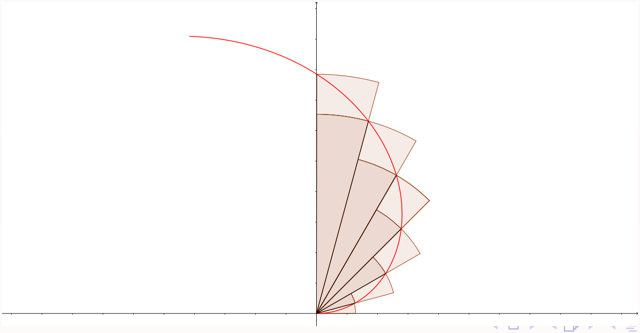
Hallar el área del primer brazo de la espiral.

Esta curva ha sido estudiada en la sesión sobre *Números complejos* (Tercer Curso), donde se prueba que si el punto O es el origen de coordenadas, entonces la ecuación polar de la espiral es

$$\rho(\theta) = k\theta, \quad k \quad \text{constante.}$$

Hallar el área del primer brazo de la espiral.

Idea: Aproximar el área de la región a través de la suma de áreas de sectores circulares inscritos y circunscritos.



Volúmenes

Hallar el volumen de un cono recto de altura h y radio r.

Volúmenes

Hallar el volumen de un cono recto de altura h y radio r.

Idea: El volumen puede aproximarse a través de la suma de los volúmenes de cilindros contenidos y continentes...

Calcular el volumen de una esfera de radio r.

Los tres problemas propuestos y el del segmento parabólico tienen algo en común...

Volúmenes

Hallar el volumen de un cono recto de altura h y radio r.

Idea: El volumen puede aproximarse a través de la suma de los volúmenes de cilindros contenidos y continentes...

Calcular el volumen de una esfera de radio r.

Los tres problemas propuestos y el del segmento parabólico tienen algo en común...

Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la parábola

$$y = \sqrt{x}$$

y la recta $x = r^2$ alrededeor del eje Ox (paraboloide de revolución).

La curva $y = x^p$ ($p > 0$ cualquiera).

Dado un número $p > 0$ (racional o no), hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^p$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

La curva $y = x^p$ ($p > 0$ cualquiera).

Dado un número $p > 0$ (racional o no), hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^p$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Idea: Ya hemos resuelto el problema cuando p es racional. Si p es irracional, entonces existen sucesiones de números $a_n, b_n \in \mathbb{Q}^+$ de modo que

$$a_n < p < b_n,$$

y

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = p.$$

La gráfica de la función

$$f(x) = x^p$$

queda encajada entre las de las funciones

$$g_n(x) = x^{b_n} \quad \text{y} \quad h_n(x) = x^{a_n}.$$

... Una versión refinada del método de exhausción.

Aplicación al cálculo de límites (procediendo a la inversa...)

Dado $p > 0$ (no necesariamente natural, ni racional), calcular

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Aplicación al cálculo de límites (procediendo a la inversa...)

Dado $p > 0$ (no necesariamente natural, ni racional), calcular

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Dado $p > 0$, calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1}.$$

Este resultado nos proporciona la derivada de la función potencial de exponente cualquiera ¡sin usar la derivación logarítmica...!

Si $\alpha \geq 1$, entonces la función

$$f(x) = x^\alpha$$

es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$, siendo $f'(x) = \ldots$

Áreas de regiones no acotadas

Nos proponemos averiguar si la región D (ilimitada) encerrada por la curva

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$, tiene área finita.

Áreas de regiones no acotadas

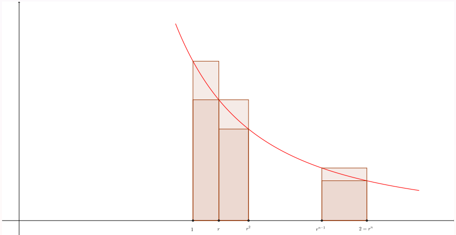
Nos proponemos averiguar si la región D (ilimitada) encerrada por la curva

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1,$$

el eje de abscisas y la recta $x = 1$, tiene área finita.
Fijemos un número $r > 1$. Consideremos la sucesión de puntos

$$x_0 = 1, \quad x_1 = r, \quad x_2 = r^2, \quad x_3 = r^3, \ldots$$

y las colecciones de rectángulos contenidos y contienentes...



El caso $p > 1$

Demostrar que las áreas de los rectángulos continentes constituyen una progresión geométrica de razón

$$\alpha = \frac{1}{r}.$$

Así pues, D es un subconjunto de una región con área finita, luego D encierra... Calcular

$$area(D).$$

El caso $p > 1$

Demostrar que las áreas de los rectángulos continentes constituyen una progresión geométrica de razón

$$\alpha = \frac{1}{r}.$$

Así pues, D es un subconjunto de una región con área finita, luego D encierra... Calcular

$$area(D).$$

Sea $p > 0$, y consideremos la región D_p delimitada por la curva

$$y = \frac{1}{x^p}, \quad x \geq 1,$$

el eje de abscisas, y la recta $x = 1$. Comprobar que si $p > 1$, entonces D_p tiene área finita. Calcular $area(D_p)$.

El caso $p = 1$

Demostrar que la región limitada por la hipérbola

$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 1,$$

el eje de abscisas, y la recta $x = 1$ no tiene área finita.

El caso $p = 1$

Demostrar que la región limitada por la hipérbola

$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 1,$$

el eje de abscisas, y la recta $x = 1$ no tiene área finita.

Idea: las sumas de antes no darán resultado... Pero la hipérbola

$$y = 1/x$$

queda por encima de (todas) las curvas

$$y = 1/x^p, \quad (p > 1).$$

Y conocemos las áreas encerradas por éstas.

Supongamos ahora que $p \in (0, 1)$, ¿Es finita el área de D_p?

Cuadratura de la hipérbola (el caso acotado es más difícil...)

Sea $p \geq 1$, y consideremos la región D_p delimitada por la curva

$$y = \frac{1}{x^p}, \quad x \geq 1,$$

el eje de abscisas, y la recta $x = a$, $(a > 1)$.

Calcular el área de D_p en el caso $p \neq 1$.

Cuadratura de la hipérbola (el caso acotado es más difícil...)

Sea $p \geq 1$, y consideremos la región D_p delimitada por la curva

$$y = \frac{1}{x^p}, \quad x \geq 1,$$

el eje de abscisas, y la recta $x = a$, $(a > 1)$.

Calcular el área de D_p en el caso $p \neq 1$.

Demostrar que en el caso $p = 1$, el área en cuestión es

$$\lim_n \left[n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) \right].$$

Calcular este límite.

Idea: El asunto tiene relación con la función exponencial. De hecho,

$$area(D_1) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Aproximación intuitiva a las series. La serie armónica

Hemos visto que la serie infinita

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}$$

tiene suma finita cuando $\alpha \in (-1, 1)$, es decir, existe un número S, de modo que la suma se acerca a S tanto como queramos, con tal de tomar un número de sumandos suficientemente grande. En este caso,

$$S = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Esto no tiene por qué ser siempre así, naturalmente.

Aproximación intuitiva a las series. La serie armónica

Hemos visto que la serie infinita

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}$$

tiene suma finita cuando $\alpha \in (-1, 1)$, es decir, existe un número S, de modo que la suma se acerca a S tanto como queramos, con tal de tomar un número de sumandos suficientemente grande. En este caso,

$$S = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Esto no tiene por qué ser siempre así, naturalmente.

Sumas parciales... Convergencia de una serie...

Comprobar que la serie (armónica)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, es decir, la sucesión $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ tiende a infinito.

Comprobar que la serie (armónica)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, es decir, la sucesión $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ tiende a infinito.

Idea: Consideramos la hipérbola $xy = 1$, $(x \geq 1)$, y construimos rectángulos continentes sobre los puntos $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots$

Comprobar que si $p > 1$ entonces la serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdot + \frac{1}{n^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge. ¿Qué ocurre si $0 < p < 1$?

Observación: Toda sucesión creciente y acotada tiene límite.

Nota

Una cosa es saber que la serie converge, y otra calcular su suma. En el caso $p = 2$, la cuestión (conocida como *problema de Basilea*) fue resuelta por Leonhard Euler en 1735.

L. Euler

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler calculó asimismo las sumas correspondientes a $p = 4, 6, \ldots$.

Nota

Una cosa es saber que la serie converge, y otra calcular su suma. En el caso $p = 2$, la cuestión (conocida como *problema de Basilea*) fue resuelta por Leonhard Euler en 1735.

L. Euler

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Euler calculó asimismo las sumas correspondientes a $p = 4, 6, \ldots$.
Sin embargo, a día de hoy, nadie conoce la suma de la serie

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

André Weil

Our students of mathematics would profit much more from a study of Euler's Introductio in Analysin Infinitorum, rather than of the available modern textbooks.