Aplicaciones sorprendentes del número *e*

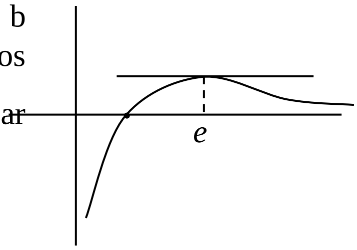
Joaquín Hernández, Estalmat Madrid

Como ya hemos comentado, una de las sesiones de ESTALMAT para veteranos (estudiantes de Bachillerato) está relacionada con el número *e*. El contenido de la sesión (3 horas) es algo más extenso que lo que desarrollaremos aquí, donde veremos algunos aspectos del número *e* que suelen atraer la atención de estos estudiantes, bien por su interés matemático o, más probablemente, por sus características curiosas o sorprendentes.

1. Si a y b son números positivos, ¿qué es mayor, a^b o b^a?

Parece natural pensar que el exponente juega un papel más importante a la hora de decidir qué número es mayor. Por ejemplo: $4^5 > 5^4$. Pero eso no siempre es así, por ejemplo: $2^{2'5} = \sqrt{32} > 2'5^2$. Nos plantearemos entonces: ¿Habrá algún número a partir del cual podamos establecer alguna afirmación general en este sentido?

Analicemos a^b y b^a y sus logaritmos naturales: $\ln(a^b) = b \ln a$ y $\ln(b^a) = a \ln b$. Comparar $b \ln a$ con $a \ln b$ nos lleva a comparar $\frac{\ln a}{a}$ con $\frac{\ln b}{b}$ y esto nos induce a pensar en la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ cuya gráfica es algo así:



En concreto es creciente en $(0, e)$ y decreciente en (e, ∞), con lo que ya estamos en condiciones de justificar la siguiente afirmación:

- Si $e \le a < b$, entonces $f(a) > f(b)$, es decir, $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$, o sea,

  $b \ln a > a \ln b \Leftrightarrow \ln a^b > \ln b^a \Leftrightarrow a^b > b^a$.

- Si $0 < a < b \le e$, $f(a) < f(b)$, de donde $a^b < b^a$.

El clásico ejercicio de qué es mayor: e^π ó π^e es, como veis, un caso particular.

2. ¿Hay alguna función exponencial $f(x) = a^x$ para la que $f'(x)=f(x)$?

Este punto tiene un verdadero interés matemático y el tratamiento que suele darse en los textos de Bachillerato es, a mi entender, algo insatisfactorio.

Una introducción más natural de la función exponencial de base *e*.

El camino más usual para introducir en Bachillerato la función exponencial $y = e^x$ y estudiar sus propiedades sigue habitualmente la siguiente línea:

- Se introduce (1º Bach.) el número e como límite de la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sugerida a veces sin más, en otras ocasiones como una aplicación del interés continuo.

- Se habla de las funciones exponenciales $y = a^x$ con $a > 0$ y de sus inversas, las $y = \log_a x$.

- Se deduce la derivada de $y = \log_e x$.

- Se deduce (aplicando la regla de la cadena) la derivada de $y = e^x$.

Como se puede observar, la introducción del número e es, cuando menos, artificial y la propiedad fundamental de la función exponencial de base e, a saber, $y = y´$, surge casi por una elección milagrosa de la base correspondiente.

Una introducción más natural:

Esbocemos las gráficas de $y = 2^x$, $y = 4^x$, dos exponenciales muy familiares. ¿Son tangentes en (0, 1) a la recta $y = x + 1$? No; $y = 2^x$, está demasiado tumbada, corta a $y = x + 1$ en (0, 1) y en (1, 2); y, por otra parte, $y = 4^x$ está demasiado estilizada, corta a $y = x + 1$ en (0, 1) y en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

¿Habrá algún valor de a para el que $y = x + 1$ sea tangente en (0, 1) a $y = a^x$?

De haberlo, este a parece que estará entre 2 y 4; más aún $y = 3^x$ está aún demasiado estilizada; corta a $y = x + 1$ en (0, 1) y en otro punto con abscisa comprendida entre $-\frac{1}{6}$ y $-\frac{1}{5}$ (comprobar con la calculadora). Este número a estará, pues, comprendido entre 2 y 3, bastante próximo a 3 pues el otro corte de $y = x + 1$ con $y = 3^x$ está muy cerca de (0, 1).

Una vez provocada la curiosidad geométrica: "¿Qué valor de a es aquel para el que $y = x + 1$ es tangente a $y = a^x$ en (0, 1)?", parece obligada esta otra: ¿y qué interés tienes en buscar una a para el que $y = x + 1$ sea tangente a $y = a^x$ en (0, 1)? Veamos:

Analicemos la derivada de $f(x) = a^x$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^h}{h} =$ $= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot f'(0)$. Así pues, para el a buscado, como $f'(0)$ será 1, se verificará que $f'(x) = f(x)$. ¿Y es interesante una exponencial $f(x)$ cuya derivada sea ella misma?

Veamos algunos fenómenos físicos:

- Crecimiento de un bosque: El crecimiento es proporcional a la masa que hay en cada instante, es decir, si ésta es $m(t)$, el crecimiento $m'(t)$ verificará $m'(t) = k\, m(t)$.

- Desintegración radiactiva: el ritmo de desintegración es proporcional a la masa que hay en cada instante: $x'(t) = -k\, x(t)$ con $k > 0$.

- Enfriamiento de un objeto: la razón de cambio $T'(t)$ es proporcional a la diferencia de la temperatura $T(t)$ a la que está el objeto y la temperatura ambiente Ta. (Ley de Newton) $T'(t) = k\left(T(t) - Ta\right)$.

Parece razonable pensar que si el crecimiento de un bosque, y el crecimiento de cualquier tipo de población, la desintegración radiactiva, el enfriamiento de un objeto, etc. se rigen por funciones cuya derivada es proporcional a ellas, una función que puede venir muy bien para medir este tipo de fenómenos, sería una función que se pareciera mucho a su derivada.

Volvemos, pues, a nuestra pregunta: ¿Quién será el a buscado para el que $f(x) = a^x$ verifica $f(x) = f'(x)$, es decir, para el que $y = x + 1$ sea tangente en (0, 1) a dicha curva?

Estudiemos el sistema $\begin{matrix} y = a^x \\ y = x+1 \end{matrix}$. Soluciones (0, 1) y ($h$, h + 1) donde $h + 1 = a^h$, $a = (1+h)^{\frac{1}{h}}$.

Estas dos líneas serán tangentes en (0, 1) cuando (h, h+1) se "confunda" con (0,1). El a buscado se parecerá más a $a = (1+h)^{\frac{1}{h}}$ cuanto menor sea h, o sea, el a buscado será $a = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$, ó, lo que es lo mismo, $a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, es decir, la exponencial $y = a^x$ cuya tangente en (0, 1) es $y = x + 1$ es aquella en que $a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

3. Es **en el cálculo de probabilidades** donde podemos encontrar situaciones más curiosas o al menos más atractivas, relacionadas con el número e.

Por ejemplo:

- En un rebaño de ovejas hay de media un balido al día. ¿Cuál es la probabilidad de que ayer no hubiera habido ningún balido? O, lo que es lo mismo:

- En los últimos 20 años me ha tocado la primitiva de media una vez al año. ¿Cuál es la probabilidad de que no me tocara el año pasado?

Parece algo sorprendente la pregunta. Vayamos con las ovejas:

Si hay de media un balido al día la probabilidad de que ayer, dicho balido se produjera a, por ejemplo, las 11:23:47 es $\frac{1}{86400}$ (86400 segundos hay en 1 día), es decir la probabilidad p de que no se produjera en ese instante es $p = 1 - \frac{1}{86400}$, por lo que la probabilidad de que no se produjera en todo el día es la probabilidad de que no se produjera en ninguno de esos instantes del día, es decir $\left(1-\frac{1}{86400}\right)^{86400}$ que es, ciertamente, un número muy parecido a $\frac{1}{e}$.

Otro caso curioso:

- Construyo sucesiones aleatorias de números del intervalo [0,1] y me quedo con los $(k+1)$ primeros términos si la lista de los k primeros es monótona creciente y la lista de los $(k+1)$ primeros no es monótona creciente.

¿Cuál es la media de las longitudes de las listas con las que me quedo?

Ejemplo:	0´71, 0´79, 0´83, 0´54:	longitud: 4
	0´53, 0´28:	longitud: 2
	0´25, 0´67, 0´91, 0´93, 0´52:	longitud: 5

Si k es un número positivo, p (longitud de la lista > k) = $p\ (x_1 < x_2 < \ldots < x_k) = \frac{1}{k!}$

Llamemos p_k a la probabilidad de que la longitud de la lista con la que me quedo sea k, $p_k = p\ (\text{long} = k)$.

Calculemos la media de las longitudes de las listas, $E(L)$:

$E(L) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \ldots$ donde

$p_1 = 0$ pues me quedo al menos con listas de dos términos.

Así pues

$$\begin{aligned} E(L) = \ & p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + \\ & p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + \\ & \quad\ + p_3 + p_4 + \ldots + \\ & \qquad\quad + p_4 + \ldots + \end{aligned}$$

, es decir

$$E(L) = p(L > 1) + p(L > 1) + p(L > 2) + p(L > 3) + \ldots = \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots = e.$$

4. Un punto indudablemente interesante sobre el número e para estudiantes de Bachillerato es probar su *irracionalidad*.

De no poder utilizar la fórmula de Taylor y, por otra parte, tener nuestros estudiantes de Bachillerato poco manejo con las sucesiones, podría parecer complicado demostrarles que e es irracional, pero no es exactamente así:

El siguiente ejercicio, válido para estudiantes de 2º, resuelve el problema:

Sea $f(x) = xe^{1-x}$ e $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$. Probar que:

1. I_n nunca es entero (n = 1, 2, …)

2. I_{n+1} = (n +1) I_n − 1.

3. Si definimos k_n como $k_n = n!\, e - I_n$, k_n siempre es entero.

4. $n!$ e nunca es entero y por tanto es irracional.

Veamos:

1. $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}\,dx = e - 2$ (integrando por partes) y si $n \ge 2$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$, por lo que al ser $x \in [0, 1]$, es $1 \le e^{1-x} \le e$, por lo que $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$, es decir, $\int_0^1 x^n\,dx \le I_n \le e\int_0^1 x^4\,dx$, o sea, $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$ con lo que para $n \ge 2$, tenemos que $0 < I_n < 1$, con lo que I_n no es entero.

2. $I_{n+1} = \int_0^1 \underset{\downarrow f}{x^{n+1}}\ \underset{\downarrow g'}{e^{1-x}}\,dx = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx = -1 + (n+1)\, I_n$.

3. Si $n = 1$, $k_1 = e - I_1 = e - (e-2) = 2$.

   $k_{n+1} = (n+1)!\, e - I_{n+1} = (n+1)!\, e - \left[(n+1)I_n - 1\right] = (n+1)!\, e - (n+1)\, I_n + 1 =$ $= (n+1)\left(n!e - I_n\right) + 1 = (n+1)\, k_n + 1$, así que si k_n es entero, también lo es k_{n+1}, por lo que, al serlo k_1, k_n siempre es entero.

4. Como $K_n = n!\, e - I_n$ resulta que $n!\, e$ nunca será entero, al serlo K_n y no I_n, de donde e no es racional.

5. La exponencial de variable compleja

Nuestros estudiantes de Bachillerato de ciencias cuando llegan a la Universidad suelen presentar lagunas –muy generalizadas– en algunos temas como números complejos, cálculo de probabilidades, combinatoria, etc. Alguien llegó a decir algún día que lo que no entraba en el programa de 2º de Bachillerato, más aún, lo que no entraba en el programa de mínimos que proponía la Universidad para la prueba de acceso, no existía.

En uno de los temas citados, los números complejos, existe un punto, el de la exponencial de variable compleja, que podría suscitar el interés de nuestros estudiantes por la sorpresa que les ocasiona a todos ellos cuando se toca. Lo que pretendo es dar una justificación razonable de por qué se define e^{ix}, $x \in \mathbb{R}$, como $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Las justificaciones más conocidas, la que dio el propio Euler mediante desarrollo en serie de e^{ix} observando que la parte real correspondía al desarrollo de $y = \cos x$ y la parte imaginaria al de $y = \operatorname{sen} x$, o la basada en la unicidad de soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ con las condiciones iniciales pertinentes caen obviamente fuera del contexto en el que nos movemos y es posible que esa sea la razón por la que ningún estudiante del Bachillerato ha oído antes de ir a la Universidad qué es e^{ix} con $x \in \mathbb{R}$.

Una introducción razonable podría ser la siguiente:

Definamos e^{ix} como $A(x) + iB(x)$ donde A y B son funciones reales.

Particularizando en $x = 0$, es $e^{i\cdot 0} = 1 = A(0) + iB(0)$. Así pues, $A(0) = 1$ y $B(0) = 0$. Si a la función e^{ix} le exigimos que sea derivable y que su derivada se porte igual que cuando el exponente es real, sería $e^{ix} = A'(x) + iB'(x)$ y como $e^{ix} = A(x) + iB(x)$,

es $iA(x) - B(x) = A'(x) + iB'(x)$, de donde

$A'(x) = -B(x)$ y $B'(x) = A(x)$. Así pues, las funciones buscadas

$A(x)$ y $B(x)$ verificarán que

$A(0) = 1$, $B(0) = 0$, $A'(x) = -B(x)$ y $B'(x) = A(x)$. Unas funciones que verifican esas condiciones son, obviamente, $A(x) = \cos x$, $B(x) = \operatorname{sen} x$.

Pero, ¿no habrá más?

Supongamos, por un momento, que existieran otras dos funciones $a(x)$ y $b(x)$ que verificaran las mismas condiciones, es decir, $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $a'(x) = b(x)$, $b'(x) = a(x)$. Pensemos entonces en la función $k(x) = \left(a(x) - A(x)\right)^2 + \left(b(x) - B(x)\right)^2$.

Como $k(0) = 0$ y $k'(x) = 2\left(a(x) - A(x)\right)\left(a'(x) - A'(x)\right) + 2\left(b(x) - B(x)\right)\left(b'(x) - B'(x)\right)$ $= 0$ por la exigencia hecha a $a(x)$ y $b(x)$, sigue $k(x) =$ cte e igual a 0 por ser $k(0) = 0$. Así pues, $a(x) = A(x)$, $b(x) = B(x)$ de lo que sigue que $A(x) = \cos x$, $B(x) = \operatorname{sen} x$ son los únicos candidatos para $e^{ix}\, A(x) + iB(x)$.

Esta fórmula enunciada por Euler por primera vez, y particularizada para $x = \pi$, le condujo a escribir $e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$, o sea, $e^{i\pi} + 1 = 0$, igualdad que llamó la atención al mismísimo Euler: los cinco números más utilizados en Análisis, juntos en una fórmula.

Bibliografía

- Excursions in Calculus. Robert M. Young M.A.A.
- Matemáticas II. Ed. SM
- A century of Calculus. Tom Apostol y otros M.A.A.
- Charming proofs. Claudi Alsina y Roger Nelsen M.A.A.