El número π y la descomposición de un número como suma de dos cuadrados.

Para cada entero no negativo n, sea $r(n)$ el número de pares ordenados de enteros (x,y) tales que $x^2+y^2=n$.

Unos cuantos valores de $r(n)$ serían $r(0)=1$, $r(1)=4$ las parejas $(0,\pm1)$ y $(\pm1,0)$, $r(2)=4$ las parejas $(\pm1,\pm1)$, $r(5)=8$ $(\pm1,\pm2)$ y $(\pm2,\pm1)$, $r(3)=0$, $r(7)=0$, $r(25)=12$ $(\pm5,0)$, $(0,\pm5)$, $(\pm3,\pm4)$, $(\pm4,\pm3)$ etc.

Como se puede observar, el comportamiento de la función $r(n)$ es tremendamente irregular; por ejemplo es fácil ver que para $n=4k+3$, $r(n)=0$, pues si $n=a^2+b^2$, uno de los dos debería ser impar y el otro par, pero $(2p+1)^2+(2t)^2=4k+1$ y no $n=4k+3$, pero también puede tomar valores arbitrariamente grandes.

En cambio, el valor medio de $r(n)$ a lo largo de los z enteros $0,1,2,3,...,z-1$, es decir $\frac{r(0)+r(1)+...+r(z-1)}{z}$ ya tiene otro aspecto. En concreto: llamaremos $R(z)=r(0)+r(1)+...+r(z-1)$, algunos valores de la función $\frac{R(z)}{z}$ son:

$z=1$, $\frac{R(1)}{1}=r(0)=1$

$z=2$, $\frac{R(2)}{2}=\frac{r(0)+r(1)}{2}=\frac{5}{2}$

$z=3$, $\frac{R(3)}{3}=\frac{1+4+4}{3}=3$

$z=4$, $\frac{R(4)}{4}=\frac{9}{4}$

$z=5$, $\frac{R(5)}{5}=\frac{13}{5}$

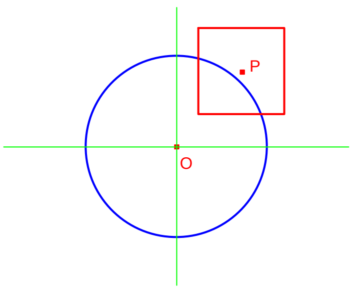
Parece que fue Gauss (a los 22 años) quien conjeturó y probó que $\lim_{z\to\infty}\frac{R(z)}{z}=\pi$, es decir, que un entero no negativo tiene por término medio π representaciones como suma de dos cuadrados.

Una curiosa demostración de este resultado podría ser la siguiente:

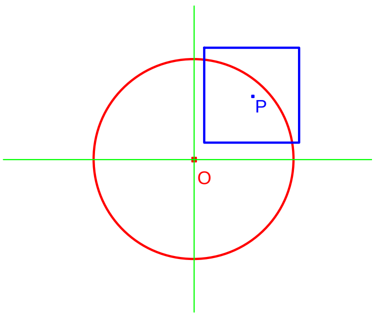
Consideremos la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{z}$, es decir $C(\sqrt{z}): x^2 + y^2 = z$ con z entero y contemos el número de puntos reticulares que hay en su interior: un punto reticular (a,b) de su interior verificará $a^2 + b^2 = n < z$, es decir, la pareja (a,b) estará contada en $r(n)$. Así pues, la suma $R(z) = r(0) + r(1) + ... + r(z-1)$ coincidirá con el número de puntos reticulares en el interior de $C(z)$.

Estimemos el número $R(z)$.

Alrededor de cada punto P reticular del plano, coloreamos un cuadrado de lado 1 centrado en P y de lados paralelos a los ejes. Si P es del interior de $C(z)$ lo coloreamos de azul y si no, de rojo. Como estos cuadrados no se solapan y cubren todo el plano y tienen área 1, $R(z)$ coincidirá con el área de la región que hayamos coloreado de azul; $R(z) =$ Área azul.



Casi todo el interior de la circunferencia será azul aunque habrá trozos rojos correspondientes a cuadrados como el de la figura,



Y casi todo el exterior será rojo, aunque análogamente habrá trozos azules.

Ahora bien: Sea O el centro de la circunferencia, si R es un punto rojo y Q el centro del cuadrado al que pertenece, es $OQ \geq \sqrt{z}$ y $QR \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que, de la desigualdad $OQ \leq OR + QR$ se tiene que $OR \geq OQ - QR \geq \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir, cualquier punto rojo dista del origen un número mayor o igual que $\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que el interior de $C\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es completamente azul.

Análogamente: si A es un punto azul y P el centro del cuadrado al que pertenece, es $OP < \sqrt{z}$ y $AP \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que $OA \le OP + PA < \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; por lo tanto el área azul, o sea, $R(z)$, estará comprendida entre el área de estos dos círculos.

Así pues, $\pi\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \le R(z) \le \pi\left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$,

con lo que $\pi\left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{z}{2}}\right) \le R(z) - \pi z \le \pi\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{z}{2}}\right)$,

de donde $\pi\left(\frac{1}{2z} - 2\sqrt{\frac{1}{2z}}\right) \le \frac{R(z)}{z} - \pi \le \pi\left(\frac{1}{2z} + 2\sqrt{\frac{1}{2z}}\right)$,

es decir, $\lim_{z\to\infty}\left(\frac{R(z)}{z} - \pi\right) = 0$ y $\lim_{z\to\infty}\frac{R(z)}{z} = \pi$