RECURSIÓN

Antonio de J. Pérez Jiménez
Seminario de Estalmat
Tenerife, marzo de 2008

RECURSIÓN

En este trabajo nos centraremos en la recursión aritmética.

La Recursión proporciona un método para abordar muchos problemas.

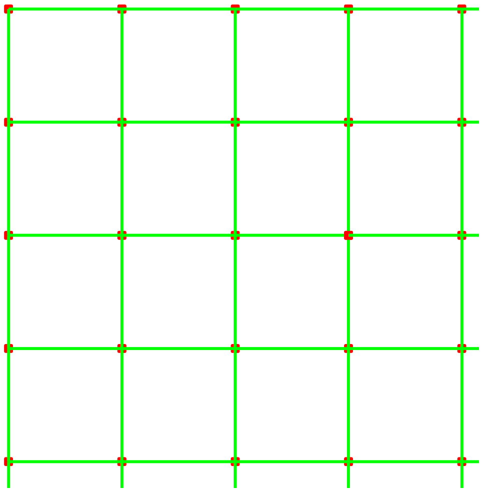
Sin embargo, tal vez por su abstracción o por motivos históricos y culturales no suele utilizarse en la enseñanza escolar.

En la enseñanza escolar se exigen, salvo en casos aislados, métodos explícitos, lo que conduce en ocasiones a soluciones ingeniosas y muy bellas pero dispares en la resolución de problemas con análoga estructura.

Veamos algunos ejemplos.

Las Cerillas

¿Cuántas cerillas son necesarias para montar un cuadrado formado por n^2 cuadraditos?

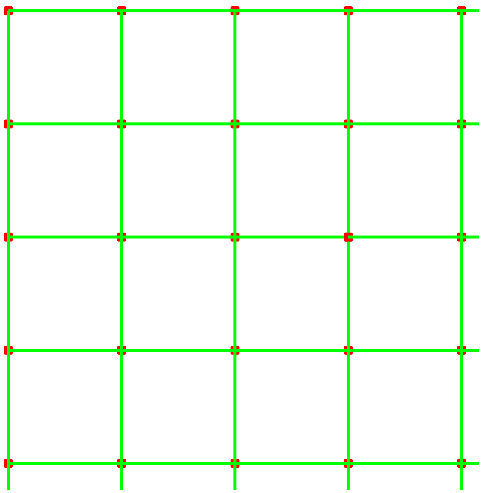


------------- n -------------

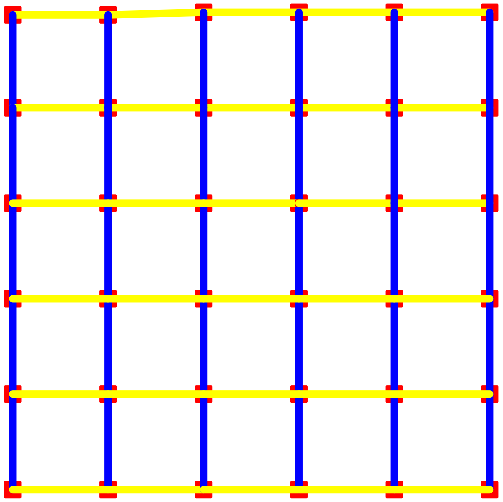
Las Cerillas

¿Cuántas cerillas son necesarias para montar un cuadrado formado por n^2 cuadraditos?

Solución guiada por la percepción:



→



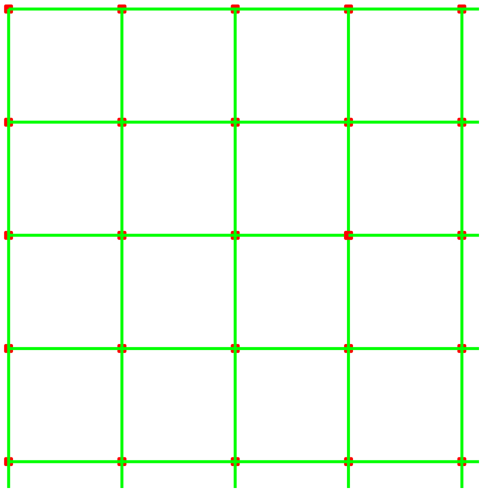
Hay *n(n+1)* en vertical y *n(n+1)* cerillas en horizontal

Luego se necesitan **2n(n+1)** cerillas

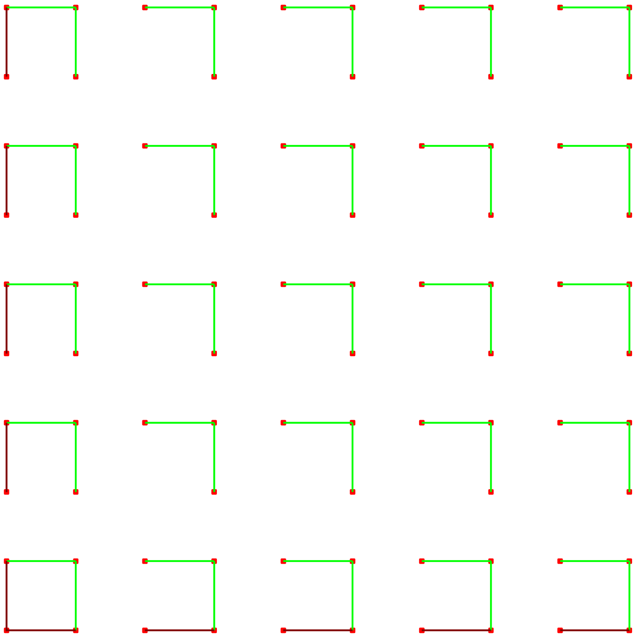
Las Cerillas

¿Cuántas cerillas son necesarias para montar un cuadrado formado por n^2 cuadraditos?

Otra Solución guiada también por la percepción:



→



Hay n^2 "L", más n cerillas en vertical más n cerillas en horizontal

Luego se necesitan $2n^2+2n$ = **2n(n+1)** cerillas

La Ecuación

¿Cuántas soluciones distintas enteras positivas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3 = 8$?

Solución guiada por la representación unaria:

Una solución: (2, 3, 5) $\quad | \quad | + | \quad | \quad | + | \quad | \quad |$

Otra solución: (1, 4, 3) $\quad | + | \quad | \quad | \quad | + | \quad | \quad |$

Otra solución: (5, 2, 1) $\quad | \quad | \quad | \quad | \quad | + | \quad | + |$

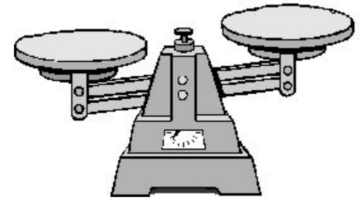
Cada vez que colocamos dos signos + en los espacios que hay entre los palotes, obtenemos una solución.

Cada solución se corresponde con la elección de dos de los siete espacios

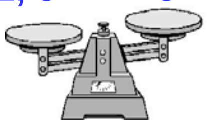
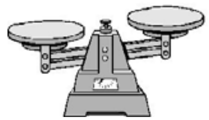
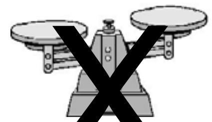
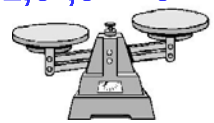
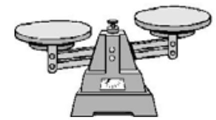
Por tanto, la solución será: $\binom{7}{2}$

Las pesadas

Con pesas de 1, 3, 3^2 y 3^3 kgs., ¿cuántas pesadas distintas no nulas pueden realizarse con una balanza de platillos?
(Nota: dos combinaciones distintas de pesas dan pesadas distintas)



El número 1201 será un código que significa:
Las pesas **1** *y* **3^3** *están en el platillo de la izquierda; la pesa* **3^2** *está en le platillo de la derecha*

	1, 3^3 — 3	3^3, 3^3		1,3^2,3^3 — 3	1, 3 — 3^3
Situación					
Código	1 2 0 1	0 0 2 2	0 0 0 0	1 2 1 1	1 1 0 2

<u>Nota</u>: Si intercambiamos los platillos se obtiene la misma pesada.
O sea: intercambiando los 1 con los 2 obtenemos códigos que representan la misma pesada.

Solución: $$\frac{VR_{3,4}-1}{2}=\frac{3^4-1}{2}=40$$

Solución guiada por codificación (en base 3)

Partes de un conjunto

¿Cuántos subconjuntos hay en un conjunto de 6 elementos?

Solución guiada por la función característica:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0 1 1 0 0 1	$\{2, 3, 6\}$
1 1 0 0 1 1	$\{1, 2, 5, 6\}$
0 0 0 0 0 0	$\acute{\emptyset}$
....	....
....	....

Hay tantos subconjuntos como $VR_{2,6}$*; o sea,* $\mathbf{2^6}$

Combinaciones

¿Cuántos subconjuntos de orden 3 hay en un conjunto de 6 elementos?

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Solución guiada por enumeración y organización de los datos:

Se forman las combinaciones y, por cada una de ellas, todas las permutaciones:

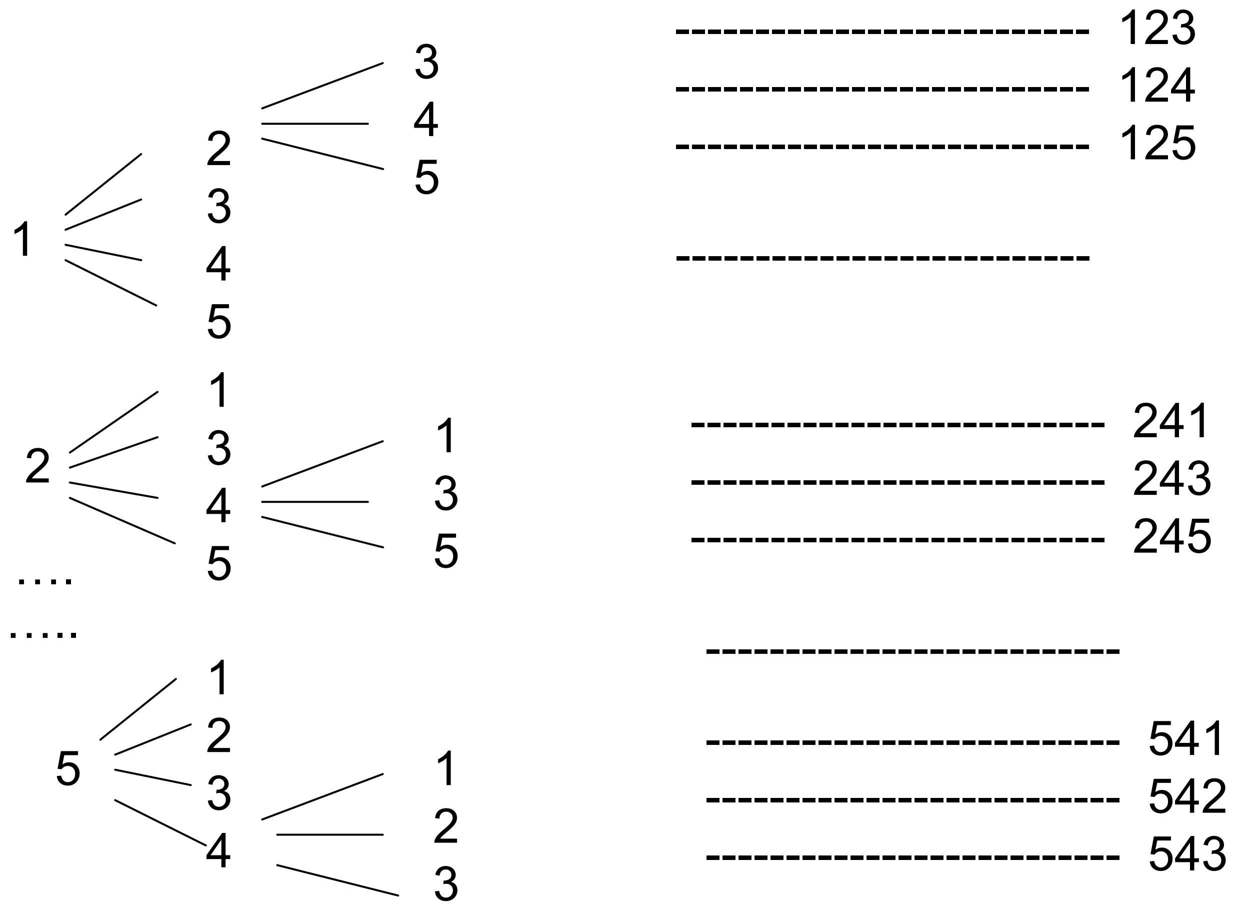
123	124	125	126	134	135	…..	356	456
132	142	152	……	…..	……	…..	365	465
213	214	215	…...	…..	…...	……	536	546
231	241	251	…...	…..	…...	……	563	564
312	412	512	…...	…..	…...	……	635	645
321	421	521	…...	…..	…...	……	653	654

Por tanto, $C_{6,3} = \dfrac{V_{6,3}}{P_3}$

Variaciones sin repetición

¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden hacerse con las de del conjunto {1,2,3,4, 5}?

Solución guiada por la técnica del diagrama en árbol:



El número total de cifras pedidas será: 5*4*3

Partes de un conjunto

Probar la siguiente propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p}$$

$$\binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!} + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{(p-1)!} =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!} + \frac{p(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{p(p-1)!} =$$

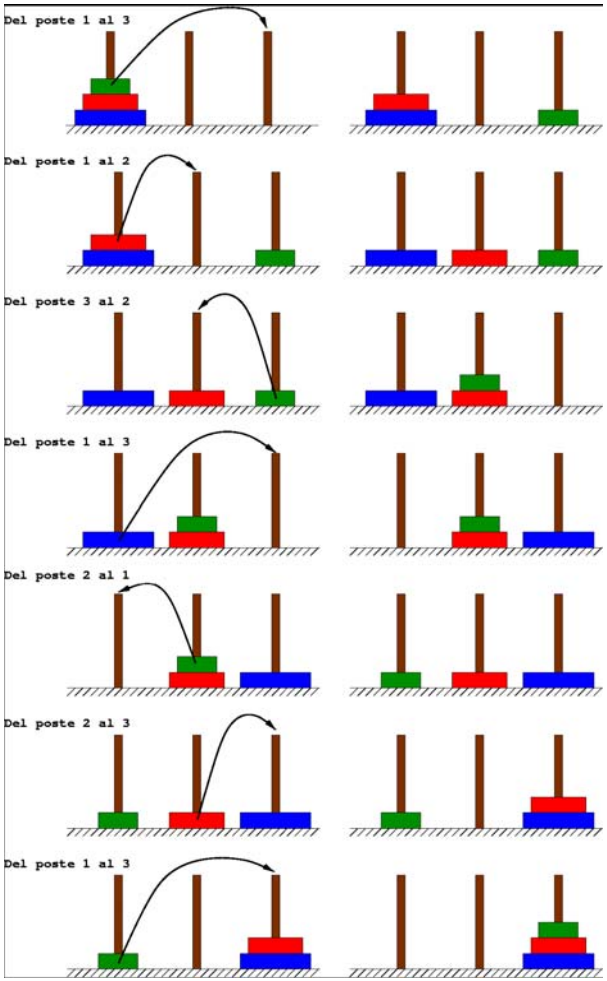
$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)[p+(m-p)]}{p!} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!} = \binom{m}{p}$$

Solución guiada directamente por el cálculo.

La Torre de Hanoi

¿Cuántos pasos hay que dar como mínimo para pasar los aros a otro vástago?



Sea n el número de aros:

Para n=1, 1 paso
Para n=2, 3 pasos
Para n=3, 7 pasos
Para n=4, 15 pasos
....
....
Para n, 2^n -1 pasos (conjetura).

Solución (conjetura) guiada por la inducción.

Subconjuntos de números no consecutivos

¿Cuántos subconjuntos de números no consecutivos hay en el el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

? ?

Por favor, intente resolverlo antes de continuar….

Subconjuntos de números no consecutivos

¿Cuántos subconjuntos de números no consecutivos hay en el el conjunto {1, 2, 3, …, n}?

n= 1	{1}	1 subconjunto
n=2	{1}, {2}	2 subconjuntos
n=3	{1},{2},{3}, {1,3}	4 subconjuntos
n=4	{1}, …,{4}, {1,3},{1,4},{2,4}	7 subconjuntos
n=5	{1}, …,{5}, {1,3},{1,4},{1,5},…,{3,5},{1,3,5}	12 subconjuntos
--------	------ --------- ------ ------ ------	??

Va bien incluir el conjunto vacío en el recuento:

n=0	Ø	1 subconjunto
n= 1	Ø, {1}	2 subconjunto
n=2	Ø, {1}, {2}	3 subconjuntos
n=3	Ø, {1},{2},{3}, {1,3}	5 subconjuntos
n=4	Ø, {1}, …,{4}, {1,3},{1,4},{2,4}	8 subconjuntos
n=5	Ø, {1}, …,{5}, {1,3},{1,4},{1,5},…,{3,5},{1,3,5}	13 subconjuntos
--------	------ --------- ------ ------ ------	

Conjetura: Sucesión de Fibonacci: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

Solución (conjetura) guiada por la inducción.

RECURSIÓN

La recursión se basa en la estrategia de la recurrencia:
** se obtiene la solución de un caso genérico a partir de un caso anterior o de casos anteriores. Se plantea así una ecuación de recurrencia.
** se calculan soluciones particulares (casos base).

Esto supone (a nivel escolar):

1) <u>Respecto de la solución</u>:

a) la solución del problema se obtiene **implícitamente** a través de una tabla, de un algoritmo –programa, hoja de cálculo-.

b) la solución del problema se **explicita a veces**:

- b1) a través de un patrón.
- b2) por inducción.

2) <u>Respecto del método</u>:

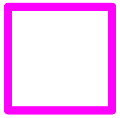
c) Utilización de la estrategia "divide y vencerás"
(en la mayoría nuestros ejemplos, dividiremos el conjunto solución en dos subconjuntos complementarios).

d) Un fuerte carácter simbólico y, por tanto,
d1) dificultad conceptual al suponer una gran abstracción.

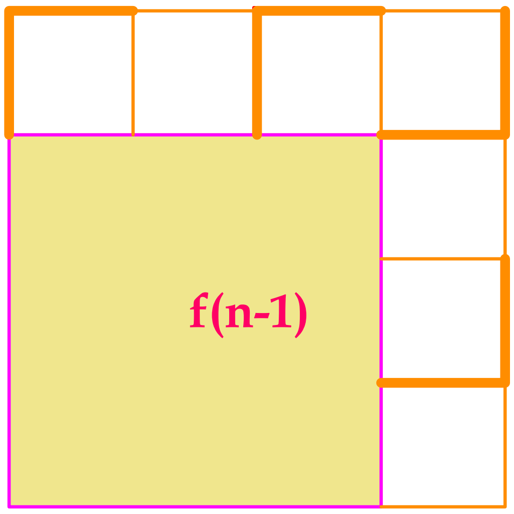
Las Cerillas

¿Cuántas cerillas son necesarias para montar un cuadrado formado por n^2 cuadraditos?

Designemos por $f(n)$ a la solución.



$f(1)=4$



------------ *n* ------------

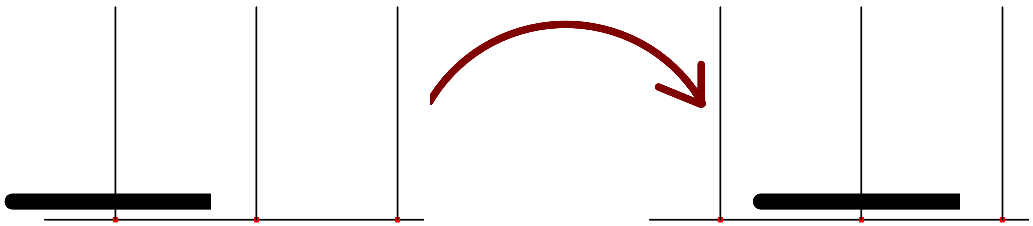
$f(n)=f(n-1)+4n$

n	1	2	3	4	……..
f(n)	4	12	24	40	……

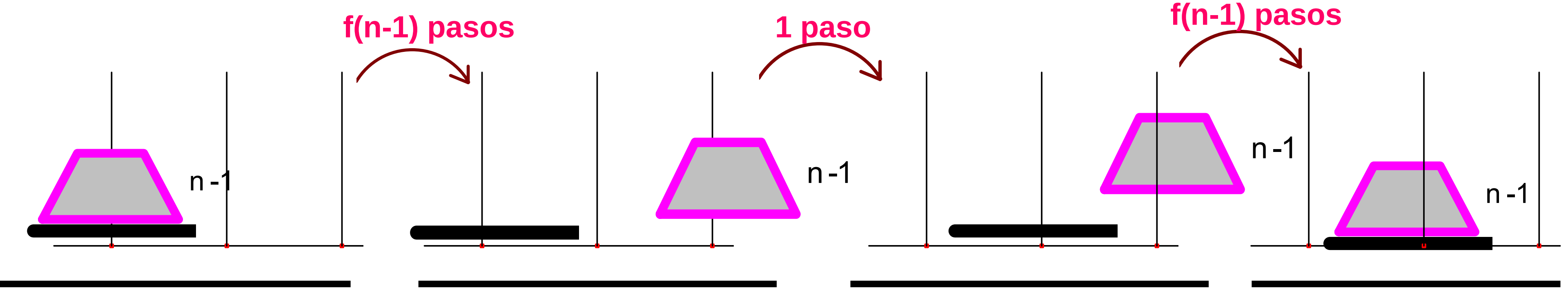
La Torre de Hanoi

¿Cuántos pasos hay que dar como mínimo para pasar los aros a otro vástago?

Sea **f(n)** el número de pasos para **n** aros.



f(1)=1 (Caso base)



Es decir, $\boxed{f(1)=1, \quad f(n) = 2f(n-1) + 1}$

n	1	2	3	4	……..
f(n)	1	3	7	15	……

Subconjuntos de números no consecutivos

¿Cuántos subconjuntos de números no consecutivos hay en el el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, …, n}?

Designemos la solución por: $S(n)$

Consideremos

a) Los subconjuntos tales que **no** contienen a **n**.
Hay $S(n-1)$ subconjuntos.

b) Los subconjuntos que **contienen** a **n**.
Hay $S(n-2)$ subconjuntos.

Por tanto: $S(n)= S(n-1) + S(n-2)$ **Casos base :** $S(0)=0, S(1)=2$

n	0	1	2	3	4	5	…...
f(n)	1	2	3	5	8	13	…..

Solución: ***sucesión de Fibonacci***

Partes de un conjunto

¿Cuántos subconjuntos hay en un conjunto de n elementos?

Designemos la solución por: $Sub(n)$

Consideremos

a) Los subconjuntos tales que **no** contienen a **n**.
Hay $Sub(n-1)$ subconjuntos.

b) Los subconjuntos que **contienen** a **n**.
Hay $Sub(n-1)$ subconjuntos.

Por tanto: $Sub(n)= 2Sub(n-1)$ **Caso base** : $Sub(0)=1$

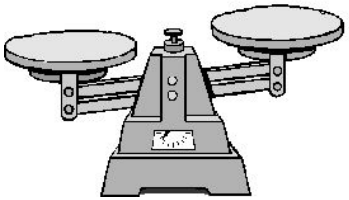
n	0	1	2	3	4	5	…...
Sub(n)	1	2	4	8	16	32	…..

Conjetura: $Sub(n)=2^n$

Las pesadas

Con pesas de 1, 3, 3^2, 3^3, … kgs., ¿cuántas pesadas distintas no nulas pueden realizarse con una balanza de platillos?

(Nota: dos combinaciones distintas de pesas dan pesadas distintas)



Designemos por **f(n)** a la solución para **n** pesas

Número de pesadas con **n** pesas:

1) Que **no esté** la pesa **n** : hay **f(n-1)** pesadas.
2) Que **sí esté**:

A cada una de las pesadas obtenidas con 3 pesas añadimos la pesa cuarta:

a) en el platillo de la izquierda: + **f(n-1)** pesadas.

b) en el platillo de la derecha: + **f(n-1)** pesadas.

Finalmente, colocamos sólo la cuarta pesa : + **1** pesada.

Es decir: $f(n) = 3f(n-1) + 1$, Caso base: $f(1)=1$

n	1	2	3	4	……..
f(n)	1	4	13	40	……

RECURSIÓN

En muchos ejercicios se combinan

** División del conjunto solución en dos subconjuntos disjuntos.

** Utilización del triángulo aritmético de Pascal, o

** Utilización del triángulo de Tartaglia (idéntico al anterior pero con una disposición distinta).

Combinaciones

¿Cuántos subconjuntos de orden 3 hay en el conjunto {1,2,3,…,8} ?

Designamos la solución por: $\binom{8}{3}$ (**número combinatorio**)

Consideremos

a) Las subconjuntos tales que **<u>no</u> contienen** ningún **8**.

Hay $\binom{7}{3}$ subconjuntos.

b) Las subconjuntos tales que **contienen** un **8**.

Hay $\binom{7}{2}$ subconjuntos.

Por tanto: $\binom{8}{3}=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$

En general: $\binom{m}{p}=\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-1}{p}$ siendo: $\binom{m}{0}=1;\binom{m}{m}=1$

Combinaciones

¿Cuántos subconjuntos de orden p hay en el conjunto {1,2,3,…,n} ?

[[Utilización del **Patrón**: **triángulo de Tartaglia**]]

Casos base: $\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1$ **General**: $\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p}$

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	----	----	----	----	----	----		----
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Cada celda es un número combinatorio

Ejemplo: $\binom{8}{3} = 56 = 21 + 35 = \binom{7}{2} + \binom{7}{3}$

Ecuación

¿Cuántas soluciones distintas enteras positivas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3 = 8$?

Designemos la solución por: *Sol(8,3)*

Consideremos

a) Las soluciones tales que $\mathbf{x_3 = 1}$

Resolvemos $\mathbf{x_1+x_2 = 7}$ y obtenemos *Sol(7,2)* soluciones.

b) Las soluciones tales que $\mathbf{x_3 \neq 1}$

Resolvemos $\mathbf{x_1+x_2+x_3 = 7}$ y obtenemos *Sol(7,3)* soluciones.

Por tanto: ***Sol(8,3)=Sol(7,2) + Sol(7,3)***

Razonando análogamente obtendríamos, por ejemplo:

Sol(7,2)= Sol(6,1)+Sol(6,2); Sol(9,4)=Sol(8,3)+Sol(8,4); etc.

Y, en general: ***Sol(m,p)=Sol(m-1,p-1)+Sol(m-1,p)***

<u>Casos base</u>: Sol(1,1)=1; Sol(2,2)=1; Sol(3,3)=1; … ***Sol(p,p)=1***

Sol(2,1)=1; Sol(3,1)=1; … ***Sol(m,1)=1***

Ecuación

¿Cuántas soluciones distintas enteras positivas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3 = 8$?

[[Utilización del **Patrón**: **triángulo de Tartaglia**]]

Casos base: Sol(m, 1)=1; Sol(p, p)=1
General: Sol(m,p)=Sol(m-1, p-1) + Sol(m-1, p)

m\p	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9
1	1	----	----	----	----	----	----	----	----
2	1	1							
3	1	2	1						
4	1	3	3	1					
5	1	4	6	4	1				
6	1	5	10	10	5	1			
7	1	6	15	20	15	6	1		
8	1	7	**21**	35	35	21	7	1	
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Por tanto, $Sol(8,3) = \binom{7}{2} = 21$ y, en general: $Sol(m,p) = \binom{m-1}{p-1}$

El triángulo aritmético de Pascal

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6	7	8	9
2	**1**	3	6	10	**15**	21	28	36	45
3	**1**	4	10	20	35	56	84	120	165
4	**1**	5	15	35	70	126	210	330	495
5	**1**	6	21	56	126	252	462	792	1287
6	**1**	7	28	84	210	462	924	1716	3003
7	**1**	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
8	**1**	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

Tabla numérica constituida por filas y columnas.
Cada número de la tabla está en una celda y se obtiene de la siguiente manera:

- *La primera fila y la primera columna se forman con 1*
- *Cada número se obtiene sumando todos los de la fila anterior hasta llegar a su altura.*

Las celdas se designan por P(m,p). Por ejemplo, P(2,4)=15

El triángulo aritmético de Pascal

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6	7	8	9
2	**1**	3	6	**10**	**15**	21	28	36	45
3	**1**	4	10	20	35	56	84	120	165
4	**1**	5	15	**35**	70	126	210	330	495
5	**1**	6	**21**	**56**	126	252	462	792	1287
6	**1**	7	28	84	210	462	924	1716	3003
7	**1**	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
8	**1**	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

15 = **1+2+3+4**+**5** = **10 + 5**

56 = **21+35**

P(2,4)=15=P(1,4)+P(2,3)

P(5,3)=P(4,3)+P(5,2)

- *Cada número se obtiene sumando las celdas de arriba y de la izquierda.* ***P(m,p)=P(m-1,p)+P(m,p-1)***

Pascal - Tartaglia

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432

Las filas del triángulo de Pascal se corresponden con diagonales del triángulo de Tartaglia. Podemos observar:

$P(3,0)=\binom{3}{0}$ $P(3,1)=\binom{4}{1}$

$P(3,2)=\binom{5}{2}$ $P(3,3)=\binom{6}{3}$

$P(3,4)=\binom{7}{4}$

....

$P(3,p)=\binom{3+p}{p}$

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	----	----	----	----	----	----	
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Se verifica:

$P(m,0)=\binom{m}{0}=1;$ $P(0,p)=\binom{p}{p}=1$

$P(m,p)=\binom{m+p}{p}$

Combinaciones con repetición

¿Cuántas combinaciones con repetición de orden 3 pueden formarse con los elementos del conjunto {1,2,3,…,8} ?

Designemos la solución por: $CR(8,3)$

Consideremos

a) Las combinaciones tales que **no** contienen ningún **8**.
Serán $CR(8,2)$ combinaciones.

b) Las combinaciones tales que contienen **al menos** un **8**.
Serán $CR(7,3)$ combinaciones.

Por tanto: $CR(8,3)=CR(8,2) + CR(7,3)$

Razonando análogamente obtendríamos, por ejemplo:
CR(7,2)= CR(7,1)+CR(6,2); CR(9,4)=CR(9,3)+CR(8,4); etc.

Y, en general: $\boldsymbol{CR(m,p)=CR(m-1,p)+CR(m,p-1)}$

Casos base: CR(1,0)=1; CR(2,0)=1; CR(3,0)=1; … $\boldsymbol{CR(m,0)=1}$
CR(1,1)=1; CR(2,1)=2; CR(3,1)=3; … $\boldsymbol{CR(1,p)=1}$

Combinaciones con repetición

¿Cuántas combinaciones con repetición de orden 3 pueden formarse con los elementos del conjunto {1,2,3,…,8} ?

[[Utilización del **Patrón**: **triángulo aritmético de Pascal**]]

Casos base: *CR(m,0)=1; CR(1,p)=1*
General: *CR(m,p) = CR(m-1,p-1) + CR(m-1, p)*

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
8	1	8	36	**120**	330	792	1716	3432	6435
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

Por tanto, *CR(8,3)* = $\binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = 120$ En general, *CR(m,p)=P(m-1,p)=* $\binom{m+p-1}{p}$
=

Ecuación-2-

¿Cuántas soluciones distintas enteras no negativas tiene la ecuación:
$x_1+x_2+x_3 = 8$?

Designemos la solución por: *Sol(8,3)*

Consideremos

a) Las soluciones tales que $x_3 = 0$

Resolvemos $x_1+x_2 = 8$ y obtenemos *Sol(8,2)* soluciones.

b) Las soluciones tales que $x_3 \neq 0$

Resolvemos $x_1+x_2+x_3 = 7$ y obtenemos **Sol(7,3)** soluciones.

Por tanto: *Sol(8,3)=Sol(8,2) + Sol(7,3)*

Razonando análogamente obtendríamos, por ejemplo:

Sol(7,2)= Sol(7,1)+Sol(6,2); Sol(9,4)=Sol(9,3)+Sol(8,4); etc.

Y, en general: *Sol(m,p)=Sol(m-1,p)+Sol(m,p-1)*

Casos base: Sol(0,1)=1; Sol(0,2)=1; Sol(0,3)=1; … *Sol(0,p)=1*

Sol(1,1)=1; Sol(2,1)=1; Sol(3,1)=1; … *Sol(m,1)=1*

Ecuación-2-

¿Cuántas soluciones distintas enteras no negativas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3 = 8$?

[[Utilización del **Patrón**: **triángulo aritmético de Pascal**]]

Casos base: *Sol(m,1)=1; Sol(0,p)=1;*
General: *Sol(m,p)=Sol(m-1,p) + Sol(m,p-1)*

m\p	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432
8	1	9	**45**	165	495	1287	3003	6435
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Por tanto, *Sol(8,3)* = $\binom{10}{2}$ y, en general: *Sol(m,p) =P(m, p-1)* = $\binom{m+p-1}{p-1}$

Stirling

¿Cuántas particiones en tres subconjuntos puede realizarse en el conjunto: {1,2,3,4,5,6} ?

Designemos por $S(6,3)$ al número de 3-particiones (particiones en 3 subconjuntos).

1) Las que **contienen** a A={6} : **S(5,2)**
2) Las que **no contiene** a A={6}

Formamos todas las 3-particiones en {1,2,3,4,5}.
Para cada una de éstas obtenemos otras 3 añadiendo el 6 en cada uno de los 3 subconjuntos. Obtenemos: **3S(5, 3)**

Luego, en total, serán $S(6,2)= S(5,2) + 3S(5, 3)$
Casos base: $S(1,1)=S(2,1)= \ldots=1; S(2,2)=S(3,3)= \ldots=1$

En general: $S(n,k)= S(n-1,k-1) + kS(n-1, k)$, con $S(n,1)=S(k,k)=1$; n>0

Formamos así la tabla:

n\k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	**90**	65	15	1

Solución: $S(6,2)=90$

Sistemas Formales

Los Sistemas Formales definidos por propiedades recursivas proveen de esquemas en los que la recursión y el razonamiento por inducción se producen de manera natural.

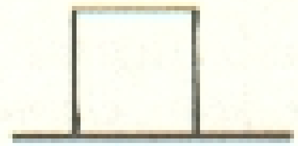
Presentamos tres ejemplos, el primero de los cuales lo desarrollamos con una cierta amplitud para ver posibles utilizaciones escolares de estos sistemas.

Los Bloques

Los sistema formales pueden presentarse como **juegos**, con sus reglas

c) Ponemos para terminar un juego muy instructivo. Propongamos a los alumnos que construyan, mediante las siguientes *reglas*, un conjunto $\mathfrak{A}$ de figuras formadas por cuadrados:

regla O: *la figura*



es elemento de $\mathfrak{A}$*;*

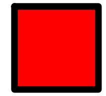
regla D: *Si* $\mathfrak{F}$ *es elemento de* $\mathfrak{A}$*, entonces se obtiene un nuevo elemento de* $\mathfrak{A}$ *juntando a* $\mathfrak{F}$ *un cuadrado abajo a la derecha;*

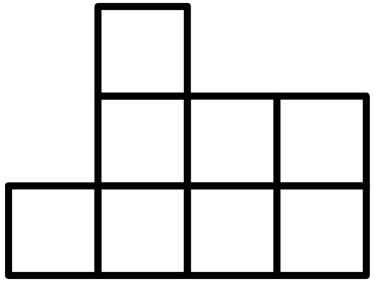
regla H: *Si* $\mathfrak{F}$ *es elemento de* $\mathfrak{A}$*, entonces se obtiene un nuevo elemento de* $\mathfrak{A}$ *juntando a* $\mathfrak{F}$ *un cuadrado sobre el vértice de la columna que está más a la derecha.*

regla Z: *No hay más figuras que las construidas de este modo que sean elementos de* $\mathfrak{A}$.

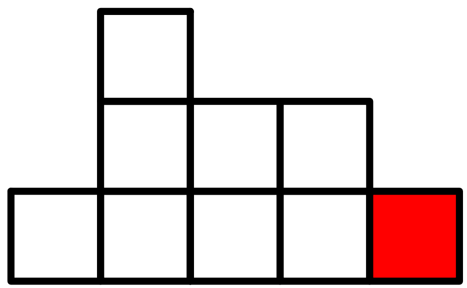
Glaymann y Vargas. *La Probabilidad en la Escuela*. Ed Teide

Los Bloques

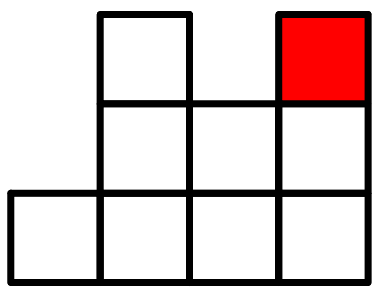
Axioma: Un cuadrado es un Bloque:  (Bloque **unitario**)

Si una figura  es un Bloque, se obtiene otro Bloque añadiendo:

Regla 1: Un cuadrado **abajo a la derecha**:



Regla 2: Un cuadrado a la **derecha arriba**:

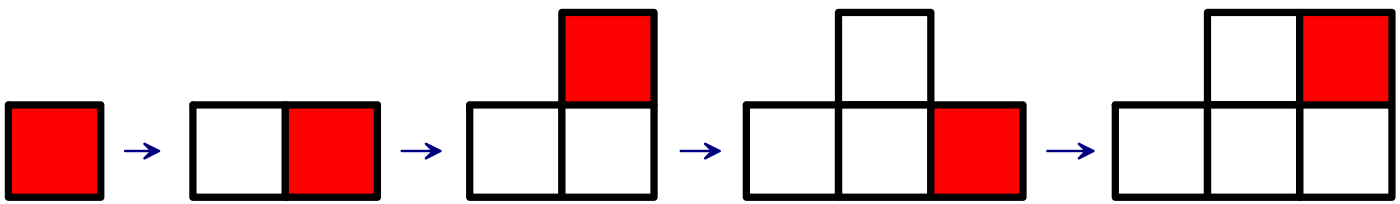


No hay más Bloques que los construidos de este modo.

Los Bloques

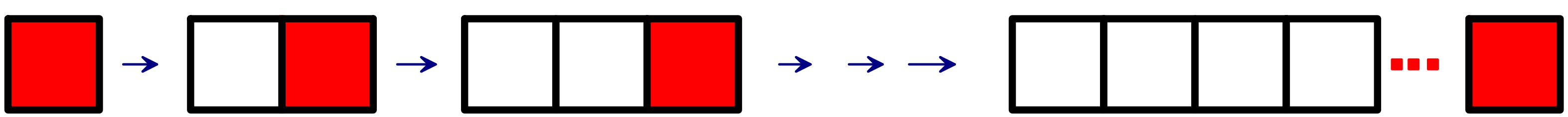
Derivación de bloques

Los siguientes pasos, dados según las reglas 1 y 2, son una derivación (deducción) de Bloques (del último bloque respecto del primero).



Como el primero es un bloque, todos los obtenidos a partir de él también lo son

Teorema: Las hileras son Bloques

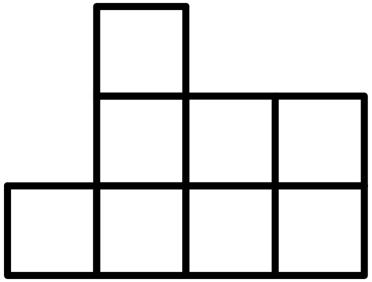


Los Bloques

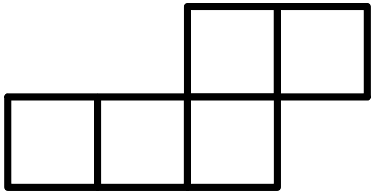
Actividad 1

De las siguientes figuras,

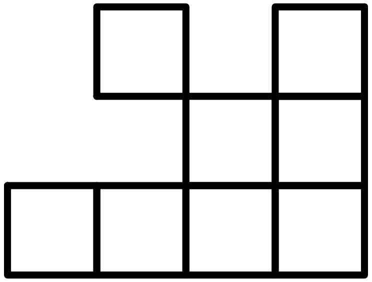
A)



B)



C)

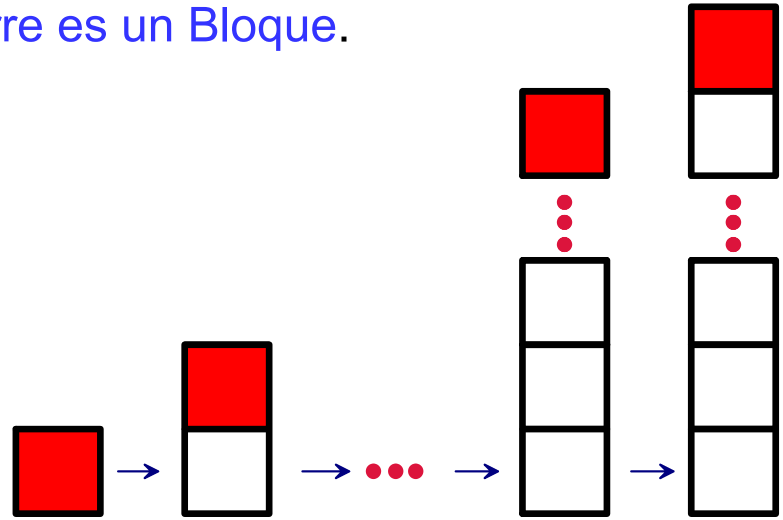


Indicar cuáles son Bloque y cuáles no.
Si lo es, construirlo; si no, explicar por qué.

Los Bloques

Una Torre es un apilamiento de cuadrados con uno en la base.

Teorema: Una torre es un Bloque.



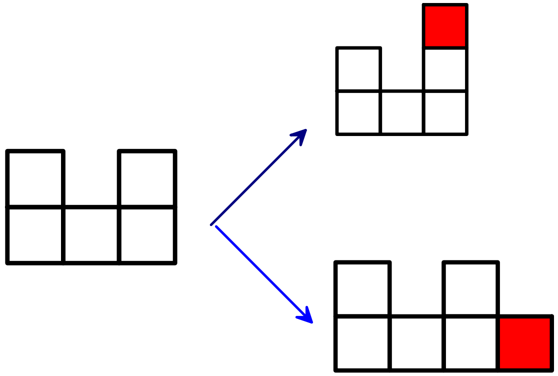
Teorema: Si a un Bloque le añadimos a la derecha una torre, obtenemos otro bloque.
En efecto, aplicamos la regla 1 al bloque de partida y, después, sucesivamente la regla 2 hasta completar la torre.

Corolario: Si anexamos torres obtenemos un Bloque.

Los Bloques

Teorema (!): Cualquier Bloque se obtiene anexando Torres.

1) *Un cuadrado es una Torre*.
2) *Suponiendo que los Bloque de n cuadrados estén formados por Torres, como cualquiera de n+1 se obtiene de uno de n con las reglas 1 o 2, también estará formado por Torres.*



Padre **Hijos**

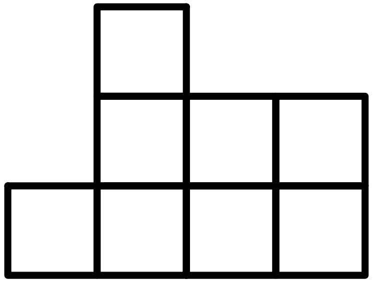
Teorema: Todo Bloque tiene dos hijos.

Teorema (!): Todo Bloque, salvo el unitario, tiene un único padre.

*** Si el Bloque es una torre, sólo procede de otra torre (de altura, un cuadrado menos).*

*** Si no, razonamos con la torre más a la derecha*.

Los Bloques



Este Bloque está formado por ocho cuadrados, con cuatro en la base.
Diremos que tiene una **configuración (8,4)**

Actividad 2.- ¿Cuántos Bloques hay con la configuración (8,4)?

Designemos por $Bq(8,4)$ al número pedido.

1) Los obtenidos añadiendo un cuadrado a la derecha (Regla 1): $Bq(7,3)$

2) Los obtenidos añadiendo un cuadrado arriba (Regla 2) : $Bq(7,4)$

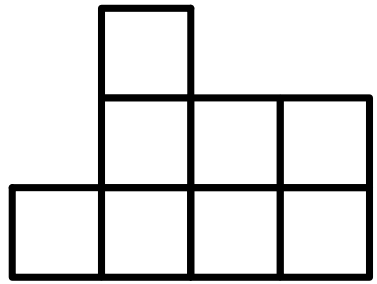
Es decir $Bq(8,4)=Bq(7,3)+Bq(7,4)$; *siendo* $Bq(m,1)=1$; $Bq(m,m)=1$ $(m>0)$

Utilizando el Triángulo de Tartaglia: $Bq(8,4) = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

Los Bloques

Actividad 3.- ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$?

Designemos por $Sol(8,4)$ a la solución.

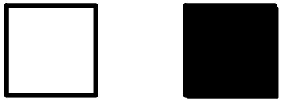


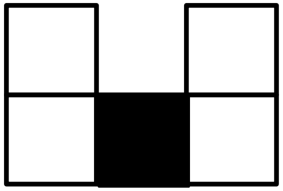
Una solución: (1, 3, 2, 2)

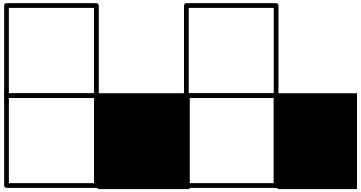
Hay tantas como Bloques con la configuración (8, 4).

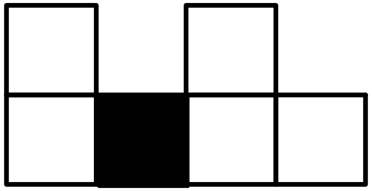
$$Sol(8,4)=Bq(8,4)=\binom{7}{3}=35$$

Los Bloques-**BN**-

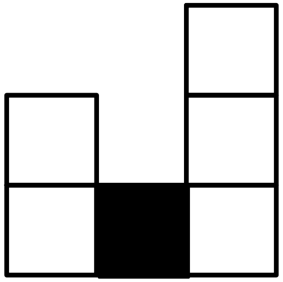
Axioma: Un cuadrado blanco o negro es un bloque **BN**:  (**unitarios**)

Si una figura  es un bloque **BN**, obtenemos otro bloque **BN** añadiendo:

Regla 1 a): Un cuadrado negro **abajo a la derecha**: 

Regla 1 b): Un cuadrado blanco **abajo a la derecha**: 

Regla 2: Un cuadrado blanco **a la derecha arriba, sobre uno blanco**:



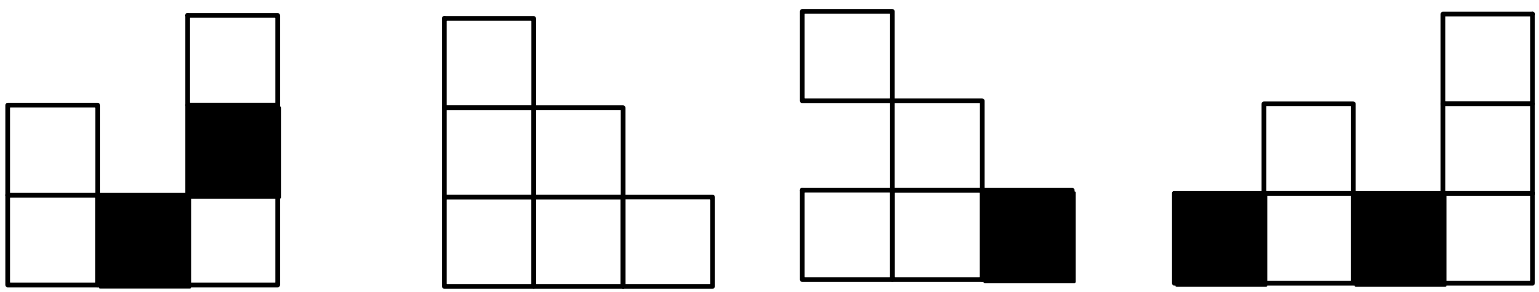
No hay más bloques **BN** que los construidos de este modo.

Los Bloques-**BN**-

Actividad 1

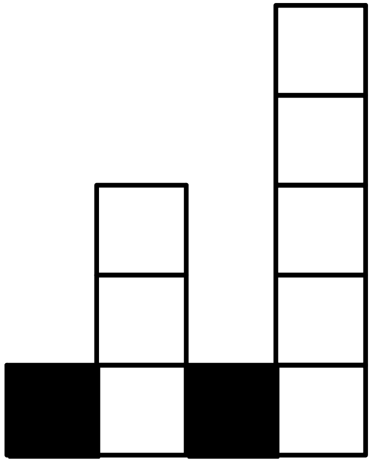
De las siguientes figuras,

A) B) C) D)



Indicar cuáles son Bloques **BN** y cuáles no.
Si lo es, construirlo; si no, explicar por qué.

Los Bloques-**BN**-



Este Bloque **BN** está formado por ocho bloques blancos, con cuatro cuadrados en la base.
Diremos que tiene una **configuración (8,4)**

Actividad 2.- ¿Cuántos bloques **BN** hay con la configuración (8,4)?

Designemos por ***Bq(8,4)*** *al número pedido.*

1) Los que tienen un cuadrado negro a la derecha (Regla 1 a)): ***Bq(8,3)***

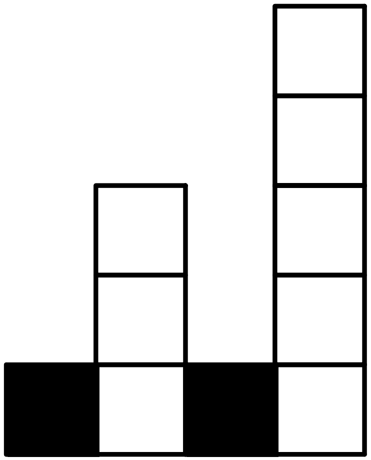
2) Los que no tienen un cuadrado negro a la derecha (Reglas 1 b) ó 2): ***Bq(7,4)***

Es decir ***Bq(8,4)=Bq(8,3)+Bq(7,4);*** *siendo* ***Bq(0,m)= 1; Bq(m, 1)=1***

Utilizando el Triángulo aritmético de Pascal: ***Bq(8,4)*** = $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$

Actividad 3.- ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$?

Designemos por *Sol(8,4)* a la solución.



Una solución: (0, 3, 0, 5)

Hay tantas soluciones como Bloques **BN** con la configuración (8, 4).

$$Sol(8,4)=Bq(8,4)=\binom{11}{3}$$

Los números Fib

Axioma: El **1** y el 22 son números **Fib**:

Si **abcd…g** es un número **Fib**, obtenemos otro número **Fib**:

Regla 1: Añadiendo un 1 **la derecha**: **abcd…g1**

Regla 2: Añadiendo un 22 a la **derecha: abcd…g22**

No hay más números **Fib** que los construidos de este modo.

Actividad 1 :
De los siguientes números, indicar cuáles son **Fib** y cuáles no:
a) 1221; b) 11122122; c) 2211222; d) 11222222; e)221112122
Si lo es, construirlo; si no, explicar por qué.

Los números Fib

Actividad-2: ¿**Cuántos números Fib poseen n cifras**?

Designemos por **F(n)** a la solución.

a) Números que acaban en 1 (Regla 1): **F(n-1)**
b) Números que acaban en 22 (Regla 2): **F(n-2)**

Por tanto, **F(n)= F(n-1)+F(n-2);** con **F(1)=1; F(2)=2**

n	1	2	3	4	5	6	……
F(n)	1	2	3	5	8	13	…..

Bibliografía consultada

Blaise Pascal
OBRAS
Ediciones Alfaguara, S.A. - Madrid, 1981

M. Glaymann y T. Vargas
La probabilidad en la escuela.
Ed. Teide. Madrid, 1975

Mason J. y otros
Pensar matemáticamente.
Labor. Barcelona, 1988

Dmitri Fomin y otros
Mathematical Circles.
AMS. 1996

Douglas R. Hofstadter
Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle.
Tusquets editores. Barcelona, 1987

V.A. Uspenski
Triángulo de Pascal.
Editorial MIR. Moscú, 1978